MAT 2352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VAR. II
2º SEMESTRE 2010

LISTA 1

1. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Desenhe o conjunto $\varphi(B)$ nos seguintes casos:
   (a) B é o retângulo $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$;
   (b) B é o retângulo $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$;
   (c) B é o retângulo $1 \leq \rho \leq 2$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.
2. Considere a transformação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(u, v) = (u + v, u - v)$. Desenhe $\varphi(B)$, nos seguintes casos:
   (a) B é a reta $v = 0$;
   (b) B é o quadrado $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 1$;
   (c) B é a circunferência de raio r;
   (d) B é o círculo de raio r.
3. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y, x + y)$. Desenhe $f(B)$, onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
4. Represente geometricamente o campo vetorial dado nos seguintes casos:
   (a) $\vec{v}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$;
   (b) $\vec{v}(x, y) = (1 - x^2)\vec{j}$;
   (c) $\vec{v}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$;
   (d) $\vec{v}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$;
   (e) $\vec{v}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$.
5. Represente geometricamente o campo vetorial $\vec{f}(x, y) = \vec{i} + (x - y)\vec{j}$ nos pontos das seguintes retas:
   (a) $x = y$;
   (b) $y = x - 1$;
   (c) $x - 2 = y$.
6. Seja $\vec{F}(x, y) = \nabla f$, onde $f(x, y) = x + 2y$. Desenhe $\vec{F}(x, y)$ nos pontos da reta $x + 2y = 1$.
7. Seja $\vec{F}(x, y) = \nabla\varphi$, onde $\varphi(x, y, z) = x + y + z$. Desenhe $\vec{F}(x, y, z)$ nos pontos tais que $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.
8. Calcule o rotacional dos seguintes campos vetoriais:
   (a) $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$;
   (b) $\vec{F}(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;
   (c) $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} - x^2\vec{j}$.

9. Considere o escoamento bidimensional

$$\vec{v}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

Represente o campo geometricamente, calcule rot$\vec{v}$ e interprete.

10. Considere o escoamento bidimensional

$$\vec{v}(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{i} + \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{j},$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante. Verifique que rot$\vec{v}(x,y) \neq 0$ se $\alpha \neq 1$.

11. Calcule o divergente dos seguintes campos vetoriais:
    (a) $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$;
    (b) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;
    (c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2-y^2)\vec{i} + \sin(x^2+y^2)\vec{j} + (\arctan z)\vec{k}$.
12. Calcule o Laplaciano das seguintes funções:
    (a) $\varphi(x,y) = xy$;
    (b) $\varphi(x,y) = ln(x^2+y^2)$.
13. Seja f um campo escalar e F um campo vetorial. Diga se cada uma das expressões abaixo tem significado. Em caso negativo, justifique. Em caso afirmativo, diga se é um campo escalar ou vetorial.
    (a) rot$f$;
    (b) ∇f;
    (c) ∇F;
    (d) div$F$;
    (e) rot(∇f);
    (f) ∇(rot$f$);
    (g) ∇(div$f$);
    (h) div(∇f);
    (i) ∇(div$F$).