

**MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA - IF**  
**1º SEMESTRE 2010**

**LISTA 5**

Suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal.

1. Em cada item, ache o  $\cos \theta$  onde  $\theta$  é a medida do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$ :

$$(a) r : \left(-\frac{5}{2}, 2, 0\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \text{ e } s : \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} ;$$

$$(b) r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases} \text{ e } s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5\sqrt{2} + \lambda \end{cases} ;$$

$$(c) r : \begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } s : \begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases} ;$$

$$(d) r : x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3} \text{ e } s : \begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 8z = 1 \end{cases} .$$

2. Ache a medida em radianos do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\pi$  nos seguintes casos:

$$(a) r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \text{ e } \pi : z = 0;$$

$$(b) r : X = (0, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) \text{ e } \pi : 3x + 4y = 0;$$

$$(c) r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases} \text{ e } \pi : \sqrt{\frac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0.$$

3. Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  nos seguintes casos:

$$(a) \pi_1 : 2x + y - z - 1 = 0 \text{ e } \pi_2 : x - y + 3z - 10 = 0;$$

$$(b) \pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0) \text{ e } \pi_2 : x + y + z = 0.$$

4. Ache a reta  $t$  que intercepta as retas  $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}$  e  $s : \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$  e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados.

- 2
5. Ache a reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 3)$  e que forma ângulos de  $45^\circ$  e  $60^\circ$  respectivamente com o eixo  $Ox$  e  $Oy$ .
  6. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano  $\pi : x + y + z = 0$  e que forma um ângulo de  $45^\circ$  com o plano  $\pi_2 : x - y = 0$ .
  7. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta  $r : \begin{cases} 3z - x = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$  e forma um ângulo cuja medida é de  $\theta = \arccos \frac{2\sqrt{30}}{11}$  com a reta  $s : X = (1, 1, 0) + \lambda(3, 1, 1)$ .
  8. Calcule a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ :
    - (a)  $P = (0, -1, 0)$  e  $r : x = 2y - 3 = 2z - 1$ ;
    - (b)  $P = (-2, 0, 1)$  e  $r : X = (1, -2, 0) + \lambda(3, 2, 1)$ .
  9. Obtenha os pontos da intersecção dos planos  $\pi_1 : x + y = 2$  e  $\pi_2 : x = y + z$  que distam  $\sqrt{\frac{14}{3}}$  da reta  $s : x = y = z + 1$ .
  10. Obtenha os pontos da reta  $r$  que equidistam das retas  $s$  e  $t$ :
    - (a)  $r : x - 1 = 2y = z$ ,  $s : x = y = 0$  e  $t : x - 2 = z = 0$ ;
    - (b)  $r : x = y = z$ ,  $s : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$  e  $t : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$ .
  11. Obtenha uma equação vetorial da reta  $r$  que dista 1 do ponto  $P = (1, 2, 1)$ , é concorrente com  $s : X = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$  e paralela a  $t : 2x - z - 1 = y = 2$ .
  12. Calcule a distância do ponto  $P$  ao plano  $\pi$ :
    - (a)  $P = (0, 0, -6)$  e  $\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$ ;
    - (b)  $P = (9, 2, -2)$  e  $\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0)$ .
  13. Calcule a distância do ponto de intersecção de  $r : X = (1, 3, 4) + \lambda(1, 2, 3)$  e  $s : X = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$  ao plano determinado por  $t : X = (0, 1, 0) + \lambda(0, 6, 1)$  e  $h : x = y - 6z + 8 = 2x - 3$ .
  14. Obtenha os pontos da reta  $r : x = 2 - y = y + z$  que distam  $\sqrt{6}$  do plano  $\pi : x - 2y - z = 1$ .
  15. Determine os pontos da reta  $r : x - 1 = 2y = z$  que equidistam dos planos  $\pi_1 : 2x - 3y - 4z - 3 = 0$  e  $\pi_2 : 4x - 3y - 2z + 3 = 0$ .
  16. Obtenha uma equação geral do plano  $\pi$  que contém  $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$  e dista  $\sqrt{2}$  de  $P = (1, 1, -1)$ .

17. Obtenha uma equação geral do plano que dista 1 de  $O = (0, 0, 0)$  e contém a reta perpendicular comum às retas  $r : X = (2, 1, 2) + \lambda(1, 1, 1)$  e  $s : X = (-1, 0, 1) + \mu(1, 1, 2)$ .
18. Calcule a distância entre as retas  $r$  e  $s$ , onde:
- (a)  $r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1)$  e  $s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0$ ;
- (b)  $r : \frac{x+4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-2}$  e  $s : X = (21, -5, 2) + \lambda(6, -4, -1)$ ;
- (c)  $r : y = 3z - 2 = 3x + 1$  e  $s : 3x - 2z + 3 = 0 = y - z - 2$ .
19. Determine a reta  $r$  que contém o ponto  $A$ , é paralela ao plano  $\pi$  e dista  $d$  da reta  $s$ , onde
- (a)  $A = (1, 3, -1)$ ,  $\pi : x + z = 2$ ,  $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$  e  $d = 3$ ;
- (b)  $A = (1, 2, 0)$ ,  $\pi : x + y + z = 1$ ,  $s : X = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 0)$  e  $d = 2$ .
20. Dadas as retas  $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, 0)$  e  $s : X = (2, 0, 1) + \lambda(0, 0, 1)$  e os pontos  $P = (1, 0, 1)$  e  $Q = (2, 1, 1)$ , obtenha uma equação vetorial da reta que contém  $P$ , é concorrente com  $r$  e equidistante de  $Q$  e  $s$ .
21. Calcule a distância entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ :
- (a)  $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$  e  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$ ;
- (b)  $\pi_1 : x + y + z = \frac{5}{2}$  e  $\pi_2 : X = (2, 1, 2) + \lambda(-1, 0, 3) + \mu(1, 1, 0)$ .
22. O plano  $\pi$  é determinado pelas retas  $r : x + z = 5 = y + 4$  e  $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$ . Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de  $\pi$ .
23. Dentre os planos que distam 2 de  $\pi : x - y + z = 0$ , qual é o mais próximo de  $P = (2, 1, 1)$ ?