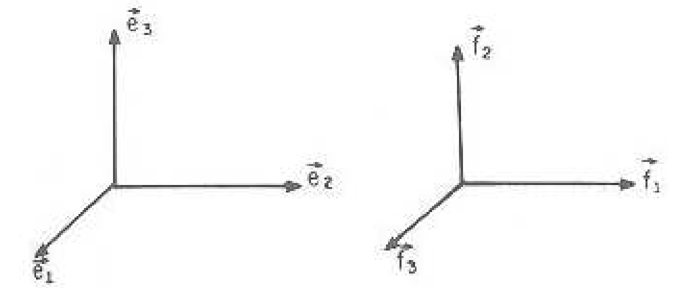
MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA - IF
1º SEMESTRE 2010

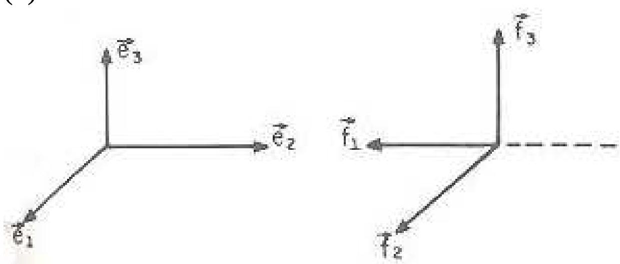
LISTA 3

1. Verifique se as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ têm mesma orientação ou orientações opostas nos seguintes casos:

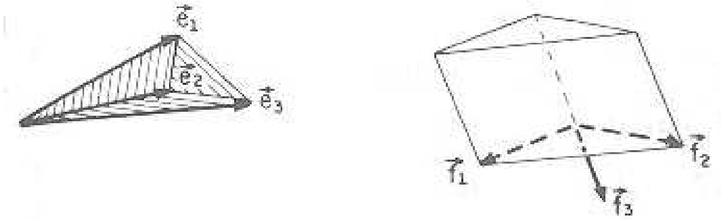
   (a)



   (b)



   (c)



   (d) $\begin{array}{l} \vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_2 \end{array}$ (e) $\begin{array}{l} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{array}$ (f) $\begin{array}{l} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{array}$

Fixe uma base ortonormal positiva $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

2. Sabendo que $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 7$ e a medida angular em radianos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, calcule $||\vec{u}\wedge\vec{v}||$ e $||4\vec{u}\wedge 9\vec{v}||$.
3. A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$ e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
4. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{v} \wedge \vec{u}$ nos casos:
   (a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1)$;
   (b) $\vec{u} = (7, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$;
   (c) $\vec{u} = (1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 4)$;
   (d) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 4)$.
5. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.
6. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$.
7. Determine $\vec{x}$ de norma $\sqrt{3}$, ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$ e que forma ângulo agudo com $(0, 1, 0)$.
8. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) = 9$ e $\vec{x} \wedge (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$.
9. Dados $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$, ache uma base ortonormal positiva $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{u}$, $\vec{a}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$, $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sua primeira coordenada é positiva.

Fixe um sistema de coordenadas ortogonal.

9. Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 0, 0)$. Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo equilátero.
10. Mostre que os pontos $A = (2, 6, -5)$, $B = (6, 9, 7)$, $C = (5, 5, 0)$ e $D = (3, 10, 2)$ são vértices de um paralelogramo.
11. Sejam $A = (3, 0, -1)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (5, 1, -2)$ e $D = (-4, 1, 2)$. Mostre que esses pontos são vértices de um trapézio e diga quais são as bases, os lados não paralelos e as diagonais.
12. Verifique se $r = s$ nos casos:
    (a)
    $$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$
    (b) $r : X = (1, 2, 1) + \lambda(-1, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s : X = (1, 2, 1) + \lambda(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (c) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -\frac{1}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s : X = (0, 1, \frac{1}{2}) + \lambda(-2, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
13. (a) Sejam $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$. Escreva equações nas formas vetorial, paramétrica e simétrica para a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Verifique se $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta.
    (b) Dados $A = (1, 2, 3)$ e $\vec{u} = (3, 2, 1)$, escreva equações da reta que contém A e é paralela a $\vec{u}$, nas formas vetorial, paramétrica e simétrica. Obtenha dois vetores diretores unitários dessa reta.

14. Escreva equações paramétricas para a reta r, que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ e
   (a) é paralela à reta
   $$s : \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$$
   (b) é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$
   (c) é paralela à reta
   $$s : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$
15. Sejam $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, 1)$. Escreva equações paramétricas da reta que contém o ponto $(3, 3, 3)$ e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$.
16. Usando somente números inteiros, escreva uma equação vetorial da reta que contém o ponto médio do segmento de extremidades $(1, 1, 3)$ e $(3, 1, -1)$ e tem $(\frac{\sqrt{3}}{49}, \frac{3\sqrt{3}}{98}, -\frac{\sqrt{3}}{7})$ como vetor diretor.
17. Sejam $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.
   (a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.
   (b) Escreva equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.
18. Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$ e $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$. Determine os pontos de r equidistantes de A e B.
19. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ (e explique porque) nos seguintes casos:
   (a) $\pi_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$ e $\pi_2 : X = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -2)$;
   (b) $\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$ e $\pi_2 : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$;
   (c) $\pi_1 : X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$ e $\pi_2 : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 3, -5) + \mu(1, 1, 3)$;
   (d) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - 6y + 4z + 4 = 0$;
   (e) $\pi_1 : x - \frac{y}{2} + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : -2x + y - 4z + 2 = 0$.
20. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas para o plano π descritos abaixo:
   (a) π contém $A = (1, 2, 0)$ e á paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$;
   (b) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$;
   (c) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo a segmento de extremidades $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$;
   (d) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.
21. Obtenha equações paramétrica do plano que contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$.
22. Obtenha uma equação geral do plano π nos seguintes casos:
   (a) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$;
   (b) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$;
   (c) π contém $P = (1, -1, 1)$ e $r : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

23. Verifique se o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano $\pi : 4x - 6y + z - 3 = 0$ quando:

$$\text{(a)} \quad \vec{u} = (-1, -2, 3); \quad \text{(b)} \quad \vec{u} = (3, 2, 0); \quad \text{(c)} \quad \vec{u} = (-3, 2, 24).$$

24. Dadas equações paramétricas do plano π, obtenha uma equação geral de π nos seguintes casos:

$$\text{(a)} \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases} \qquad \text{(c)} \quad \pi : \begin{cases} x = \lambda - 3\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$$

25. Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano π:

$$\text{(a)} \quad 4x + 2y - z + 5 = 0; \quad \text{(b)} \quad 5x - y - 1 = 0; \quad \text{(c)} \quad y - z - 2 = 0.$$

26. Mostre que o ponto $P = (4, 1, -1)$ não pertence à reta $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$ e obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.