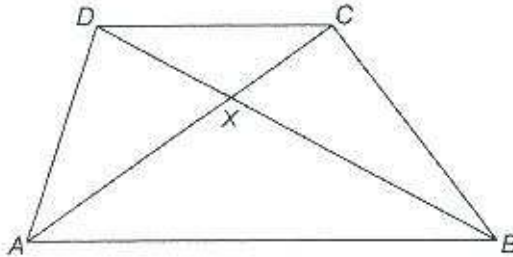


MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA - IF
1º SEMESTRE 2010

LISTA 2

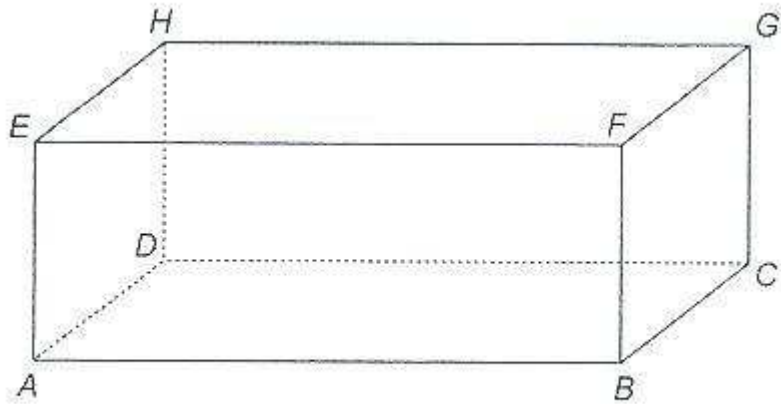
1. Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.i., então:
 - (a) $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ é l.i.;
 - (b) $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ é l.i.
2. Prove que $\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$ é l.d. para quaisquer vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} .
3. Determine os escalares a e b sabendo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i. e que $(a - 1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a + b)\vec{v}$.
4. No trapézio $ABCD$ da figura abaixo, o comprimento de AB é o dobro do comprimento de CD . Exprima \vec{AX} com combinação linear de \vec{AD} e \vec{AB} .



Nos exercícios 5 a 10 abaixo, as coordenadas dos vetores são dadas em relação a uma base qualquer fixada.

5. Suponha $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$.
 - (a) Ache as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.
 - (b) Verifique se \vec{u} é combinação linear de \vec{v} e \vec{w} .
 - (c) Escreva $\vec{r} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .
6. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?
7. Decida se é l.d. ou se é l.i.:
 - (a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$;
 - (b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$;
 - (c) $\vec{u} = (1, -3, 14)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$;
 - (d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (200, 2, 1)$ e $\vec{w} = (300, 2, 1)$;
 - (e) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, -7)$ e $\vec{w} = (4, 5, -4)$;
 - (f) $\vec{u} = (0, 0, 0)$;
 - (g) $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

- 2
8. Ache $m \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m - 1, 1, m - 2)$ e $\vec{w} = (m + 1, m - 1, 2)$. Em seguida, determine m para que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d.
 9. Determine m e n tais que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja l.d., sendo que $\vec{u} = (1, m, n + 1)$ e $\vec{v} = (m, n, 10)$.
 10. Ache m para que sejam l.d.:
 - (a) $\vec{u} = (m, 1, m)$ e $\vec{v} = (1, m, 1)$;
 - (b) $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ e $\vec{v} = (m, m, m)$;
 - (c) $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$;
 - (d) $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$ e $\vec{w} = (0, m, 2m)$.
 11. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ e $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$. Decida se $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base.
 12. Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base, prove que $(\alpha_1 \vec{e}_1, \alpha_2 \vec{e}_2, \alpha_3 \vec{e}_3)$ é uma base se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 não são nulos. Interprete geometricamente.
 13. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC .
 - (a) Explique por que $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ é uma base.
 - (b) Determine as coordenadas de \vec{AM} nesta base.
 14. No paralelepípedo retângulo da figura abaixo, HG, BC e CG medem, respectivamente, 3, 1 e 2.
 - (a) Explique por que $(\vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$ é uma base e verifique se é ortonormal.
 - (b) Explique por que, em relação à base do item (a), $\vec{AG} = (1, 1, 1)$.
 - (c) Mostre que o comprimento da diagonal AG é $d = \sqrt{14}$.
 - (d) Note que se simplesmente aplicarmos a fórmula para calcular a norma de um vetor dada em aula, obteríamos que o comprimento de \vec{AG} é $\sqrt{3}$. Por que o valor dá diferente do obtido no item (c)?



15. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{u}\|$ nos seguintes casos:
 - (a) $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$;
 - (b) $\vec{u} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$;

- (c) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$;
 (d) $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.
16. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.
17. São dadas as coordenadas de \vec{u} e \vec{v} em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, a medida angular entre \vec{u} e \vec{v} .
- (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$.
 (b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
 (c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
18. Determine x de modo que \vec{u} e \vec{v} sejam ortogonais.
- (a) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$.
 (b) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$.
 (c) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.
19. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{v} = (2, -4, 6)$. Quais desses vetores forma ângulo agudo com $(1, 0, 0)$?
20. Obtenha um vetor \vec{u} ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
21. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha \vec{u} de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a \vec{t} , tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1, 0, 0)$?
22. Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ e $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
23. Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores de norma 1 tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}$. Verifique se \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .
24. (a) Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
 (b) Calcule $\|2\vec{u} + 4\vec{v}\|^2$, sabendo que \vec{u} é unitário, $\|\vec{v}\| = 2$ e a medida angular entre \vec{u} e \vec{v} é $\frac{2\pi}{3}$ radianos.
25. Prove que:
- (a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$;
 (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$;
 (c) as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.
26. Prove que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losango.
27. A medida angular em radianos entre \vec{u} e \vec{v} é $\frac{\pi}{4}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule a medida angular em radianos entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.
28. Prove que:
- (a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$;
 (b) a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados;
 (c) a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.
29. Prove que as diagonais de um losango estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.