MAT 105 - GEOMETRIA ANALÍTICA - IGC
1º SEMESTRE 2010

LISTA 5

Suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal.

1. Em cada item, ache o $\cos\theta$ onde θ é a medida do ângulo entre as retas r e s:

   (a) $r : (-\frac{5}{2}, 2, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, 1, 1)$ e $s : \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$;

   (b) $r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5\sqrt{2} + \lambda \end{cases}$;

   (c) $r : \begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases}$;

   (d) $r : x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ e $s : \begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 8z = 1 \end{cases}$.

2. Ache a medida em radianos do ângulo entre a reta r e o plano π nos seguintes casos:

   (a) $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ e $\pi : z = 0$;

   (b) $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0)$ e $\pi : 3x + 4y = 0$;

   (c) $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases}$ e $\pi : \sqrt{\frac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0$.

3. Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos π_1 e π_2 nos seguintes casos:

   (a) $\pi_1 : 2x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 3z - 10 = 0$;

   (b) $\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0)$ e $\pi_2 : x + y + z = 0$.

4. Ache a reta t que intercepta as retas $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}$ e $s : \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados.

5. Ache a reta que passa pelo ponto (1,-2,3) e que forma ângulos de 45^o e 60^o respectivamente com o eixo Ox e Oy.

6. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano $\pi : x + y + z = 0$ e que forma um ângulo de 45^o com o plano $\pi_2 : x - y = 0$.

7. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r : \begin{cases} 3z - x = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ e forma um ângulo cuja medida é de $\theta = \arccos \frac{2\sqrt{30}}{11}$ com a reta $s : X = (1, 1, 0) + \lambda(3, 1, 1)$.

8. Calcule a distância do ponto P à reta r:

   (a) $P = (0, -1, 0)$ e $r : x = 2y - 3 = 2z - 1$;

   (b) $P = (-2, 0, 1)$ e $r : X = (1, -2, 0) + \lambda(3, 2, 1)$.

9. Obtenha os pontos da intersecção dos planos $\pi_1 : x + y = 2$ e $\pi_2 : x = y + z$ que distam $\sqrt{\frac{14}{3}}$ da reta $s : x = y = z + 1$.

10. Obtenha os pontos da reta r que equidistam das retas s e t:

    (a) $r : x - 1 = 2y = z$, $s : x = y = 0$ e $t : x - 2 = z = 0$;

    (b) $r : x = y = z$, $s : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$ e $t : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$.

11. Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$, é concorrente com $s : X = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$ e paralela a $t : 2x - z - 1 = y = 2$.

12. Calcule a distância do ponto P ao plano π:

    (a) $P = (0, 0, -6)$ e $\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$;

    (b) $P = (9, 2, -2)$ e $\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0)$.

13. Calcule a distância do ponto de intersecção de $r : X = (1, 3, 4) + \lambda(1, 2, 3)$ e $s : X = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$ ao plano determinado por $t : X = (0, 1, 0) + \lambda(0, 6, 1)$ e $h : x = y - 6z + 8 = 2x - 3$.

14. Obtenha os pontos da reta $r : x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi : x - 2y - z = 1$.

15. Determine os pontos da reta $r : x - 1 = 2y = z$ que equidistam dos planos $\pi_1 : 2x - 3y - 4z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

16. Obtenha uma equação geral do plano π que contém $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ de $P = (1, 1, -1)$.

17. Obtenha uma equação geral do plano que dista 1 de $O = (0, 0, 0)$ e contém a reta perpendicular comum às retas $r : X = (2, 1, 2) + \lambda(1, 1, 1)$ e $s : X = (-1, 0, 1) + \mu(1, 1, 2)$.

18. Calcule a distância entre as retas r e s, onde:

    (a) $r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1)$ e $s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0$;

    (b) $r : \frac{x+4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-2}$ e $s : X = (21, -5, 2) + \lambda(6, -4, -1)$;

    (c) $r : y = 3z - 2 = 3x + 1$ e $s : 3x - 2z + 3 = 0 = y - z - 2$.

19. Determine a reta r que contém o ponto A, é paralela ao plano π e dista d da reta s, onde

    (a) $A = (1, 3, -1)$, $\pi : x + z = 2$, $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$ e $d = 3$;

    (b) $A = (1, 2, 0)$, $\pi : x + y + z = 1$, $s : X = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 0)$ e $d = 2$.

20. Dadas as retas $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, 0)$ e $s : X = (2, 0, 1) + \lambda(0, 0, 1)$ e os pontos $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (2, 1, 1)$, obtenha uma equação vetorial da reta que contém P, é concorrente com r e equidistante de Q e s.

21. Calcule a distância entre os planos π_1 e π_2:

    (a) $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$;

    (b) $\pi_1 : x + y + z = \frac{5}{2}$ e $\pi_2 : X = (2, 1, 2) + \lambda(-1, 0, 3) + \mu(1, 1, 0)$.

22. O plano π é determinado pelas retas $r : x + z = 5 = y + 4$ e $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$. Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de π.

23. Dentre os planos que distam 2 de $\pi : x - y + z = 0$, qual é o mais próximo de $P = (2, 1, 1)$?