MAT 105 - GEOMETRIA ANALÍTICA - IGC
1º SEMESTRE 2010

LISTA 4

Suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal cuja base é positiva.

1. Obtenha uma equação vetorial para a reta r.

   (a) $r : \begin{cases} x - y - 3z + 4 = 0 \\ x + 2y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$

   (b) $r : \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$

2. Estude a posição relativa das retas r e s.

   (a) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ e $s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

   (b) $r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

   (c) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

   (d) $r : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ e $s : \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$

   (e) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ e $s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$

   (f) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$

   (g) $r : \frac{x+1}{2} = y = -z$ e $s : \begin{cases} x + y - 3z + 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

   (h) $r : x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ e $s : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

3. No exercício acima, obtenha, quando for o caso, o ponto de interseção das retas r e s.

4. No exercício 2 acima, obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado pelas retas r e s.

5. Determine m para que as retas $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$ e $X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$ sejam coplanares, e nesse caso estude sua posição relativa.

6. Calcule m em cada caso, usando a informação dada sobre as retas

$$r : \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} , \quad s : x = \frac{y}{m} = z \quad \text{e} \quad t : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

   (a) r e s são paralelas;
   (b) r, s e t são paralelas a um mesmo plano;
   (c) r e t são concorrentes;
   (d) s e t são coplanares;
   (e) r e s são reversas.

7. Estude a posição relativa de r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de interseção P.
   (a) $r : X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$ e $\pi : x - y - z = 2$;
   (b) $r : \frac{x-1}{2} = y = z$ e $\pi : X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$;
   (c) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi : X = (0, \frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, \frac{-1}{2}, 0) + \mu(0,1,1)$;
   (d) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e $\pi : x + y = 2$;
   (e) $r : X = (0,0,0) + \lambda(1,4,1)$ e $\pi : X = (1,-1,1) + \lambda(0,1,2) + \mu(1,-1,0)$;
   (f) $r : \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$ e $\pi : 3x - 6y - z = 0$.

8. Sejam $r : X = (n,2,0) + \lambda(2,m,n)$ e $\pi : nx - 3y + z = 1$. Obtenha condições sobre m e n para que:
   (a) r e π sejam paralelos;
   (b) r e π sejam transversais;
   (c) r esteja contida em π.

9. Calcule m para que r seja paralela a π onde $r : X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ e $\pi : X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1)$.

10. A reta t é paralela a Oxz, está contida em $\pi : x + 2y - z = 2$, e é concorrente com a reta $s : X(2,1,1) + \lambda(1,2,0)$. Obtenha uma equação vetorial de t.

11. Nos ítens do exercício 2 em que r e s são reversas, obtenha uma equação geral do plano que contém r e é paralelo a s.

12. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2:
    (a) $\pi_1 : X = (1,1,1) + \lambda(0,1,1) + \mu(-1,2,1)$ e $\pi_2 : X = (1,0,0) + \lambda(1,-1,0) + \mu(-1,-1,-2)$;
    (b) $\pi_1 : X = (4,2,4) + \lambda(1,1,2) + \mu(3,3,1)$ e $\pi_2 : X = (3,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,4)$;
    (c) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y - 4z = 0$;
    (d) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$ e $\pi_2 : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$;

13. Mostre que os planos $\pi : \begin{cases} x = -\lambda + 2\mu \\ y = m\lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + m\lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + m\mu \end{cases}$ são transversais, qualquer que seja o número real m.
14. Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2 : X = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, -1, m)$.
15. Verifique se as retas r e s são ortogonais e, em caso afirmativo, verifique se também são perpendiculares.
    (a) $r : x + 3 = y = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = -z$.
    (b) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}, \quad s : X = (1, 3, 0) + \lambda(0, -7, 5)$.
    (c) $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(3, 1, 4), \quad s : X = (-1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$.
    (d) $r : 36x - 9y = 3y + 4z = 18, \quad s : x + y = z - y - 2 = 0$.
16. Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém P e é perpendicular a r, nos casos:
    (a) $P = (2, 6, 1)$, $r : X = (-3, 0, 0) + \lambda(1, 1, 3)$.
    (b) $P = (1, 0, 1)$, r contém $A = (0, 0, -1)$ e $B = (1, 0, 0)$.
17. Obtenha equações da reta perpendicular comum às retas r e s.
    (a) $r : X = (2, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1), \quad s : x + y - 2 = z = 0$.
    (b) $r : x = y - 1 = z + 3, \quad s : 2x - y = y + z = 2x - z + 1$.
18. Obtenha uma equação geral do plano π_1, que contém $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(0, 3, 1)$ e é perpendicular a $\pi_2 : x + y - 2z - 2 = 0$, e obtenha uma equação vetorial de $\pi_1 \cap \pi_2$.
19. Dê uma equação vetorial da reta paralela ao plano π, perpendicular à reta AB, e que intercepta a reta s, sendo $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $s : X = (4, 5, 0) + \lambda(3, 6, 1)$.
20. Verifique se r e π são perpendiculares:
    (a) $r : X = (3, 1, 4) + \lambda(-1, 0, 1), \quad \pi : X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 0) + \mu(1, 1, 1)$.
    (b) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(3, -3, 1), \quad \pi : 6x - 6y + 2z - 1 = 0$.
    (c) $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \pi : x - y + z = 1$.
    (d) $r : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \pi : 2x - 2y + 4z = 1$.
21. Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto P e é perpendicular ao plano π.
    (a) $P = (1, -1, 0)$, $\pi : X = (1, -1, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1)$.
    (b) $P = (1, 2, 3)$, $\pi : 2x + y - z = 2$.
22. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto P e é perpendicular à reta r.
    (a) $P = (0, 1, -1)$, $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, 1)$.
    (b) $P = (0, 0, 0)$, r contém $A = (1, -1, 1)$ e $B = (-1, 1, -1)$.
    (c) $P = (1, 1, -1)$, $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

23. Obtenha o simétrico do ponto P em relação ao plano π, nos casos:
    (a) $P = (1, 4, 2)$, $\pi : x - y + z - 2 = 0$;
    (b) $P = (1, 1, 1)$, $\pi : 4y - 2z + 3 = 0$.
24. Verifique se π_1 e π_2 são perpendiculares
    (a) $\pi_1 : X = (1, -3, 4) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, 3)$,
    $\pi_2 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 6) + \mu(1, -1, 0)$.
    (b) $\pi_1 : X = (4, 3, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(3, 1, 0)$, $\pi_2 : y - 3z = 0$.
    (c) $\pi_1 : x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 0$
25. Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2 : X = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, -1, m)$ e verifique se existe algum valor de m para o qual π_1 e π_2 sejam perpendiculares.
26. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $(2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1 : x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $\pi_2 : 8x - 4y + 16z - 1 = 0$.
27. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(4, 1, 0)$ e é perpendicular a $\pi : 3x + y + z = 0$.
28. A diagonal BC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$. Conhecendo $A = (1, 1, 0)$, determine os outros três vértices.