

**MAT 105 - GEOMETRIA ANALÍTICA - IGC**  
**1º SEMESTRE 2010**

**LISTA 3**

Fixe uma base ortonormal positiva  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

1. Sabendo que  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\|\vec{v}\| = 7$  e a medida angular em radianos entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é  $\frac{\pi}{6}$ , calcule  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  e  $\|4\vec{u} \wedge 9\vec{v}\|$ .
2. A medida angular entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é  $\frac{\pi}{3}$  e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$  e  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ , calcule a norma de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .
3. Calcule  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  e  $\vec{v} \wedge \vec{u}$  nos casos:
  - (a)  $\vec{u} = (6, -2, -4)$ ,  $\vec{v} = (-1, -2, 1)$ ;
  - (b)  $\vec{u} = (7, 0, -5)$ ,  $\vec{v} = (1, 2, -1)$ ;
  - (c)  $\vec{u} = (1, -3, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 4)$ ;
  - (d)  $\vec{u} = (2, 1, 2)$ ,  $\vec{v} = (4, 2, 4)$ .
4. Calcule a área do paralelogramo  $ABCD$ , sendo  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$  e  $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$ .
5. Calcule a área do triângulo  $ABC$ , sendo  $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$  e  $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$ .
6. Determine  $\vec{x}$  de norma  $\sqrt{3}$ , ortogonal a  $(1, 1, 0)$  e a  $(-1, 0, 1)$  e que forma ângulo agudo com  $(0, 1, 0)$ .
7. Ache  $\vec{x}$  tal que  $\vec{x} \cdot (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) = 9$  e  $\vec{x} \wedge (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$ .
8. Dados  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 2)$ , ache uma base ortonormal positiva  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  tal que  $\vec{a}$  é paralelo a  $\vec{u}$ ,  $\vec{a}$  tem mesmo sentido que  $\vec{u}$ ,  $\vec{b}$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e sua primeira coordenada é positiva.

Fixe um sistema de coordenadas ortogonal.

9. Sejam  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (0, 1, 1)$  e  $C = (2, 0, 0)$ . Mostre que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices de um triângulo equilátero.
10. Mostre que os pontos  $A = (2, 6, -5)$ ,  $B = (6, 9, 7)$ ,  $C = (5, 5, 0)$  e  $D = (3, 10, 2)$  são vértices de um paralelogramo.
11. Sejam  $A = (3, 0, -1)$ ,  $B = (0, 3, 0)$ ,  $C = (5, 1, -2)$  e  $D = (-4, 1, 2)$ . Mostre que esses pontos são vértices de um trapézio e diga quais são as bases, os lados não paralelos e as diagonais.
12. Verifique se  $r = s$  nos casos:

(a)

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

(b)  $r : X = (1, 2, 1) + \lambda(-1, 2, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $s : X = (1, 2, 1) + \lambda(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(c)  $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -\frac{1}{2})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $s : X = (0, 1, \frac{1}{2}) + \lambda(-2, 0, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- 2 13. (a) Sejam  $B = (-5, 2, 3)$  e  $C = (4, -7, -6)$ . Escreva equações nas formas vetorial, paramétrica e simétrica para a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ . Verifique se  $D = (3, 1, 4)$  pertence a essa reta.  
 (b) Dados  $A = (1, 2, 3)$  e  $\vec{u} = (3, 2, 1)$ , escreva equações da reta que contém  $A$  e é paralela a  $\vec{u}$ , nas formas vetorial, paramétrica e simétrica. Obtenha dois vetores diretores unitários dessa reta.

14. Escreva equações paramétricas para a reta  $r$ , que passa pelo ponto  $A = (2, 0, -3)$  e

(a) é paralela à reta

$$s : \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$$

(b) é paralela à reta que passa pelos pontos  $B = (1, 0, 4)$  e  $C = (2, 1, 3)$

(c) é paralela à reta

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

15. Sejam  $B = (1, 1, 0)$  e  $C = (-1, 0, 1)$ . Escreva equações paramétricas da reta que contém o ponto  $(3, 3, 3)$  e é paralela à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ .

16. Usando somente números inteiros, escreva uma equação vetorial da reta que contém o ponto médio do segmento de extremidades  $(1, 1, 3)$  e  $(3, 1, -1)$  e tem  $(\frac{\sqrt{3}}{49}, \frac{3\sqrt{3}}{98}, -\frac{\sqrt{3}}{7})$  como vetor diretor.

17. Sejam  $A = (3, 6, -7)$ ,  $B = (-5, 2, 3)$  e  $C = (4, -7, -6)$ .

(a) Mostre que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices de um triângulo.

(b) Escreva equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice  $C$ .

18. Sejam  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (0, 0, 1)$  e  $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ . Determine os pontos de  $r$  equidistantes de  $A$  e  $B$ .

19. Verifique se  $\pi_1 = \pi_2$  (e explique porque) nos seguintes casos:

(a)  $\pi_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$  e  $\pi_2 : X = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -2)$ ;

(b)  $\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$  e  $\pi_2 : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$ ;

(c)  $\pi_1 : X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$  e  $\pi_2 : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 3, -5) + \mu(1, 1, 3)$ ;

(d)  $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$  e  $\pi_2 : 2x - 6y + 4z + 4 = 0$ ;

(e)  $\pi_1 : x - \frac{y}{2} + 2z - 1 = 0$  e  $\pi_2 : -2x + y - 4z + 2 = 0$ .

20. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas para o plano  $\pi$  descritos abaixo:

(a)  $\pi$  contém  $A = (1, 2, 0)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (1, 1, 0)$  e  $\vec{v} = (2, 3, -1)$ ;

(b)  $\pi$  contém  $A = (1, 1, 0)$  e  $B = (1, -1, -1)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ ;

(c)  $\pi$  contém  $A = (1, 0, 1)$  e  $B = (0, 1, -1)$  e é paralelo a segmento de extremidades  $C = (1, 2, 1)$  e  $D = (0, 1, 0)$ ;

(d)  $\pi$  contém  $A = (1, 0, 1)$  e  $B = (2, 1, -1)$  e  $C = (1, -1, 0)$ .

21. Obtenha equações paramétrica do plano que contém o ponto  $A = (1, 1, 2)$  e é paralelo ao plano  $\pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$ .

22. Obtenha uma equação geral do plano  $\pi$  nos seguintes casos:

- (a)  $\pi$  contém  $A = (1, 1, 0)$  e  $B = (1, -1, -1)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ ;  
 (b)  $\pi$  contém  $A = (1, 0, 1)$  e  $B = (2, 1, -1)$  e  $C = (1, -1, 0)$ ;  
 (c)  $\pi$  contém  $P = (1, -1, 1)$  e  $r : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$ .

23. Verifique se o vetor  $\vec{u}$  é paralelo ao plano  $\pi : 4x - 6y + z - 3 = 0$  quando:

- (a)  $\vec{u} = (-1, -2, 3)$ ; (b)  $\vec{u} = (3, 2, 0)$ ; (c)  $\vec{u} = (-3, 2, 24)$ .

24. Dadas equações paramétricas do plano  $\pi$ , obtenha uma equação geral de  $\pi$  nos seguintes casos:

$$(a) \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases} \quad (b) \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases} \quad (c) \pi : \begin{cases} x = \lambda - 3\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$$

25. Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano  $\pi$ :

- (a)  $4x + 2y - z + 5 = 0$ ; (b)  $5x - y - 1 = 0$ ; (c)  $y - z - 2 = 0$ .

26. Mostre que o ponto  $P = (4, 1, -1)$  não pertence à reta  $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$  e obtenha uma equação geral do plano determinado por  $r$  e  $P$ .