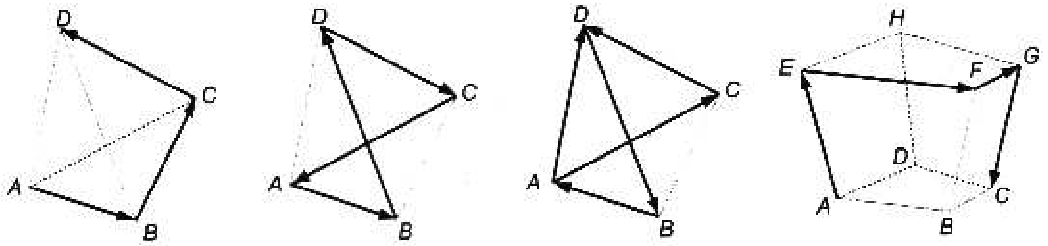
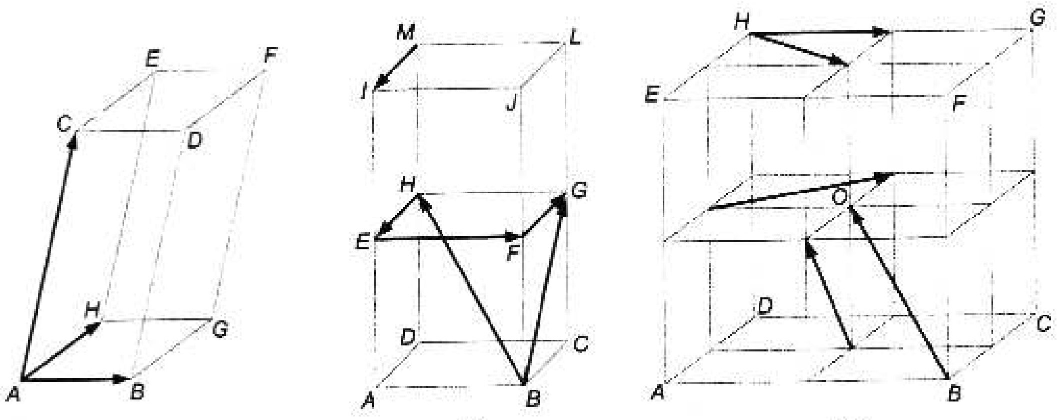
MAT 105 - GEOMETRIA ANALÍTICA - IGC
1º SEMESTRE 2010

LISTA 1

1. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:



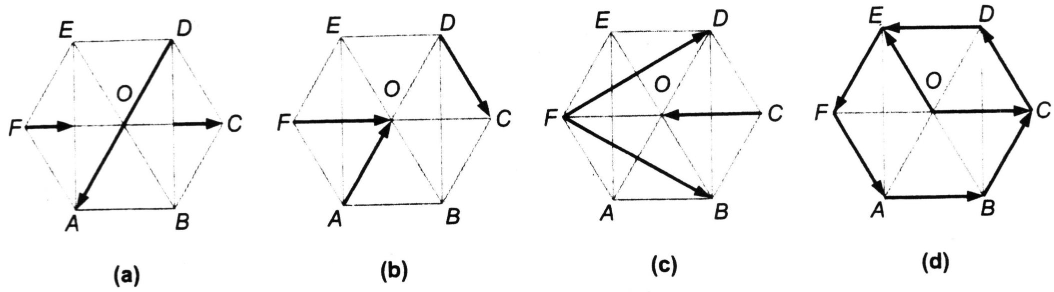
2. Ache a soma dos vetores indicados em cada caso, sabendo-se que
   (a) $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo.
   (b) $ABCDEFGH$ e $EFGHIJLM$ são cubos de arestas congruentes.
   (c) $ABCDEFGH$ é um cubo de centro O e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces.



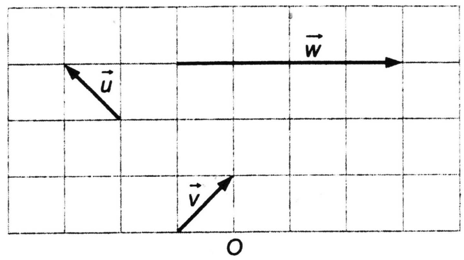
(a) (b) (c)

3. Utilize o paralelepípedo da Figura (a) acima para determinar o vetor $\overrightarrow{x}$ em cada caso:
   (a) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BE}$
   (c) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$

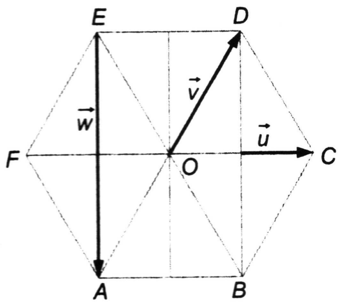
4. Na figura abaixo, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.



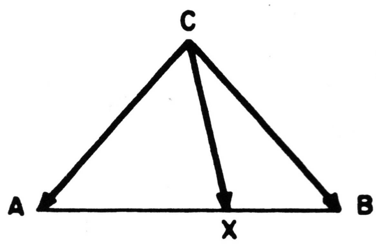
5. Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$?
6. Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura abaixo, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + \frac{5}{4}\vec{w}$ por uma flecha de origem O.



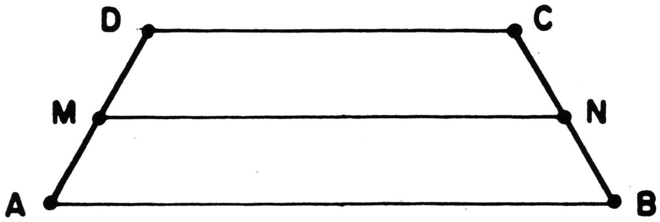
7. Na figura abaixo, $ABCDEF$ é um hexágono regular. Determine X, sabendo que $\overrightarrow{CX} = -3\vec{u} + 2\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$.



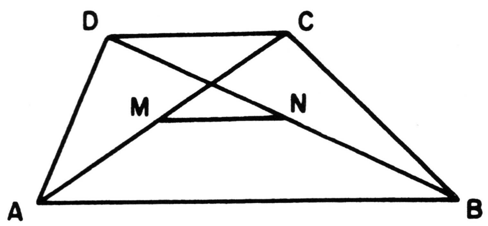
8. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e m. (*Sugestão:* na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, faça aparecer C em ambos os membros.)



9. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z, tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ e $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, m, n e p.
10. Num triângulo ABC é dado X sobre o lado AB tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre o lado BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam. (*Sugestão:* use o exercício anterior, achando qual dever ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.)
11. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (*Atenção:* não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)

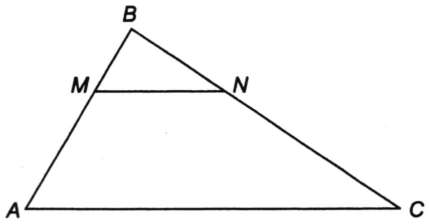


12. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (*Atenção:* não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)

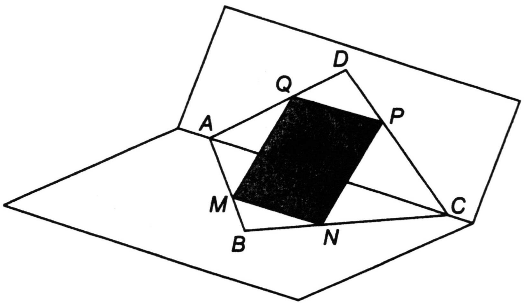


13. Num triângulo ABC, sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que
$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}.$$
14. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.
15. Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O, prove que
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$
16. Seja $OABC$ um tetraedro e seja X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
17. Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ en termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
18. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

19. (a) No triângulo ABC da figura (a), M divide o segmento AB e N divide o segmento CB na mesma razão r. Prove que $MN \parallel AC$ e calcule $\frac{\|\overrightarrow{MN}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$.
    (b) No quadrilátero $ABCD$ (eventualmente reverso, como na figura (b)), M divide o segmento AB, N divide BC, P divide CD e Q divide AD, todos na mesma razão r. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.
    (c) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ do item anterior seja um paralelogramo. Mostre que as quatro diagonais (as duas de $ABCD$ e as duas de $MNPQ$) têm um ponto em comum.



(a)



(b)

20. Sejam A, B e C pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:
    (a) X pertence à reta AB se e somente se existem escalares α e β tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ e $\alpha + \beta = 1$.
    (b) X pertence ao segmento AB se e somente se existem escalares α e β tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.
    (c) X é **interior ao segmento** AB (isto é, existe um escalar λ tal que $0 < \lambda < 1$ e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$) se e somente se $\overrightarrow{XA}$ e $\overrightarrow{XB}$ são de sentido contrário.