Lógicas Construtivas: Intuicionismo, uma Introdução

Ricardo Bianconi

1 Introdução

Vamos tratar agora de Lógicas Construtivas, ou seja, aquelas em que se admitem apenas argumentos construtivos. O que seriam *argumentos construtivos*?

Não existe uma resposta consensual acerca disso. Cada escola de pensamento exige mais ou menos deste conceito. Um princípio que é aceito pelos chamados lógicos clássicos e rejeitado pelos construtivistas é o chamado *princípio do terceiro excluído*, que se manifesta nas provas por *redução ao absurdo*, qual seja, se uma proposição não pode ser falsa, então ela tem que ser verdadeira. Os construtivistas exigem mais do que isto para ser verdade. Por exemplo, se uma proposição afirmando a existência de uma função com uma dada propriedade não pode ser falsa, isto não quer dizer que ela é *plenamente* verdadeira, ou seja, plenamente aceitável. Exige-se muito mais do que isto, exige-se que se apresente uma construção explícita de tal função, que se possa calculá-la. O que varia entre as várias escolas construtivistas é o nível de exigência do que seja um método para calcular tal função. Para uns, basta descrever um algoritmo mais ou menos informal e usar a Tese de Church para afirmas que a função é recursiva. Outros não admitem a Tese de Church, exigindo a construção explícita da função. Os mais radicais, os *finitistas estritos*, não se contentam apenas com isto, mas defendem que se deve levar em conta os recursos materiais disponíveis para calcular tal função: *de que adianta descrever uma função recursiva f que demandaria um tempo maior que a idade do universo para se obter o valor de* $f(0)$?!

Vamos explorar aqui apenas o Intuicionismo, que está mais desenvolvidao tecnicamente e tem interesse mesmo em aplicações ditas clássicas. Para as pessoas interessadas, recomenda-se o livro *Varieties of Constructive Mathematics*[1] de Douglas Bridges e Fred Richman, que compara o intuicionismo, o construtivismo de Erret Bishop (mais exigente que o intuicionismo) e o construtivismo russo (menos exigente).

2 Intuicionismo

Os intuicionistas admitem como conceitos primitivos cada número natural e o conjunto dos números naturais (não precisam ser construídos). Todos os outros entes matemáticos deverão ser construídos. Daí, podemos considerar as proposições intuicionistas como sendo sobre números naturais: $A(n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

As demonstrações intuicionistas dividem-se em dois tipos:

(1º) Para se demonstrar $A \wedge B$, demonstra-se A e demonstra-se B; para se demonstrar $A \vee B$, demonstra-se A ou demonstra-se B; para se demonstrar $\neg A$, demonstra-se que A implica uma contradição; para se demonstrar $\exists x\, A(x)$, demonstra-se $A(n)$, para algum n.

(2º) Para se demonstrar $A \to B$, apresenta-se um procedimento (algorítmico) para transformar uma demonstração de A numa de B; para se demonstrar $\forall x\, A(x)$, apresenta-se um procedimento (algorítmico) para (uniformemente) produzir uma demonstração de $A(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

3 Cálculo Proposicional Intuicionista

Vamos estudar dois tipos de sistemas formais para o Cálculo Proposicional Intuicionista: o método axiomático e o método dos diagramas (ou *tabelaus*).

Nos dois casos, a **linguagem** consiste num conjunto de símbolos de variáveis proposicionais $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e $\to$.

Definição 1 As **fórmulas proposicionais** são definidas indutivamente:

1. uma variável proposicional é uma fórmula proposicional (às vezes chamadas de **fórmulas atômicas**);

[1] D. Bridges, F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*. Lecture Notes Series n. 97. London Mathematical Society, Cambridge University Press, Londres, 1987.

2. se A é fórmulas proposicional, então $\neg A$ também o é;

3. se A e B são fórmulas proposicionais, então $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \to B$ também o são.

3.1 O Método Axiomático

O método axiomático para o Cálculo Proposicional Intuicionista é parecido com o clássico, mudando-se apenas dois axiomas, mas mantendo a regra de *Modus Ponens* (ou MP): de A e de $A \to B$, concluir B.

Axiomas do Cálculo Proposicional Intuicionista:[2]

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
4. $A \wedge B \to A$
5. $A \wedge B \to B$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
10. $(A \wedge \neg A) \to B$

Para obtermos o sistema clássico, basta trocarmos os axiomas 3 e 10 por
$(Ax.\ 3')$ $\quad (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$
$(Ax.\ 10')$ $\quad \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$.

[2]Existem outras listas equivalentes, dependendo dos autores que as produzam.

Definição 2 Seja Γ um conjunto (finito) de fórmulas proposicionais e A uma fórmula proposicional. Dizemos que A é **dedutível** de Γ, ou em símbolos, $\Gamma \vdash A$ (ou simplesmente $\vdash A$, se $\Gamma = \varnothing$), se existir uma seqüência de fórmulas proposicionais $A_1, \ldots, A_n$, tal que A_n é A e para cada $i \leq n$, A_i é axioma, ou elemento de Γ (hipótese), ou obtida de A_j e A_k, com $j, k < i$, por MP (ou seja, A_j é uma fórmula C, A_k é uma fórmula $C \to D$ e A_i é a fórmula D).

Observação: Para evitar muitos símbolos, escreveremos $\Gamma, A \vdash B$ ou $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ao invés de $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ ou $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$, respectivamente.

Imitando os resultados para o caso clássico, pode-se provar as seguintes afirmações:

Exercício 1 Mostre que $\vdash A \to A$. (Dica: use esta forma do axioma 1: $A \to ((A \to A) \to A)$.)

Exercício 2 Mostre que vale o **Teorema da Dedução**: $\Gamma, A \vdash B$ se, e só se, $\Gamma \vdash A \to B$. (Dica: indução em uma dedução $C_1 \ldots, C_n$ de B a partir de Γ, A, prove que $\Gamma \vdash A \to C_i$; basta usar os axiomas 1 e 2.)

Exercício 3 Mostre (usando o Teorema da Dedução, se necessário) que:

1. $(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$
2. $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
3. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
4. $A \wedge (A \to B) \vdash A \wedge B$
5. $A \wedge B \vdash A \wedge (A \to B)$
6. $B \vdash B \wedge (A \to B)$
7. $(A \to B) \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$ (use o axioma 8)
8. $(A \to B) \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$ (use o axioma 9)
9. $(A \to B) \vdash (\neg B) \to (\neg A)$
10. $\vdash A \to (\neg\neg A)$

11. $\vdash (\neg\neg\neg A) \to \neg A$

12. $\vdash (\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A)$

13. $A, B \vdash A \wedge (A \to B)$

14. $\neg(A \vee B) \vdash (\neg A) \wedge (\neg B)$

15. $(\neg A), (\neg B) \vdash \neg(A \vee B)$

16. se $A \vdash C$ e $B \vdash C$, então $(A \vee B) \vdash C$

17. se $A \vdash B$ e $A \vdash C$, então $A \vdash (B \wedge C)$

18. se $\Gamma, A \vdash B$ e $\Gamma, \neg A \vdash B$, então $\Gamma \vdash B$

19. $A \wedge B \vdash C$ se, e só se, $A, B \vdash C$

20. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (para isto, prove que $A \vdash B \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ e que $A \vdash C \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$; use o axioma 8 e depois o Teorema da Dedução)

21. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$ (observe que $(A \wedge B) \vdash A \wedge (B \vee C)$, etc.)

22. $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

23. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$ (observe que $\vdash B \to (C \to (B \wedge C))$ e use que $(X \to Y) \vdash (X \vee Z) \to (Y \vee Z)$)

Exercício 4 Para o próximo exercício, precisamos das seguintes demonstrações:

1. $(\neg A \vee B) \vdash (A \to B)$ (use a equivalência entre $A \wedge (\neg A \vee B)$ e $(\neg A \wedge A) \vee (A \wedge B)$ e o axioma 10 para obter $A, (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$, etc)

2. $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \wedge \neg B$

3. $\neg\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \to B)$ (lembre-se que $(A \to B) \vdash (\neg B \to \neg A)$ e use o axioma 3)

4. $\neg\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(\neg\neg A \to \neg\neg B)$

5. $\neg(\neg\neg A \to \neg\neg B) \vdash (\neg\neg A \wedge \neg B)$

6. $\neg\neg(A \to B) \vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ (mostre que $\neg\neg(A \to B), \neg\neg A, \neg B \vdash (\neg\neg A \wedge \neg B), \neg(\neg\neg A \wedge \neg B)$ e use o axioma 3)

7. $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \vdash \neg\neg(A \to B)$ (mostre que $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \vdash \neg\neg(\neg\neg A \to \neg\neg B)$ e use algum item anterior que seja conveniente)

Exercício 5 Mostre que se A é dedutível no Cálculo Proposicional Clássico, então $\neg\neg A$ é dedutível no Cálculo Proposicional Intuicionista. Para isto prove que:

1. $\vdash \neg\neg((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg B) \to A)$ (use o exercício anterior para reduzir ao caso $\vdash (\neg A \to \neg\neg B) \to ((\neg A \to \neg\neg\neg B) \to \neg\neg A)$, que é uma forma do axioma 3)

2. $\vdash \neg\neg(\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B))$ (reduza ao caso $(\neg(A \wedge B) \vdash \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$)

3. se $\vdash \neg\neg A$ e $\vdash \neg\neg(A \to B)$, então $\vdash \neg\neg B$

3.2 O Método dos "Tableaux"

Existe um outro método de dedução equivalente, que vale tanto para o Cálculo Proposicional Intuicionista quanto para o Clássico (com as devidas modificações). Vamos descrever este método.

Definição 3 Uma **fórmula anotada** é um par $A : V$, ou $A : F$, sendo que A é uma fórmula proposicional. Uma **configuração** é um conjunto finito de conjuntos finitos de fórmulas anotadas. Omitiremos as chaves dos conjuntos de fórmulas anotadas: $A_1 : T_1, \ldots, A_n : T_n$ representará o conjunto $\{A_1 : T_1, \ldots, A_n : T_n\}$, sendo que A_i são fórmulas proposicionais e $T_i \in \{V, F\}$, $1 \leq i \leq n$.

A tabela a seguir apresenta as regras de transformações de conjuntos de fórmulas anotadas.

$$(V_\wedge)\ \frac{S, A \wedge B : V}{S, A : V, B : V} \qquad (F_\wedge)\frac{S, A \wedge B : F}{S, A : F|\ |S, B : F}$$

$$(V_\vee)\ \frac{S, A \vee B : V}{S, A : V|\ |S, B : V} \qquad (F_\vee)\frac{S, A \vee B : F}{S, A : F, B : F}$$

$$(V_\rightarrow)\ \frac{S, A \wedge B : V}{S, A : F|\ |S, B : V} \qquad (F_\rightarrow)\frac{S, A \rightarrow B : F}{S_V, A : V, B : F}$$

$$(V_\neg)\ \frac{S, \neg A : V}{S, A : F} \qquad (F_\neg)\ \frac{S, \neg A : F}{S_V, A : V}$$

Esta tabela deve ser entendida assim: o conjunto de cima da barra deve ser transformado pelo da parte de baixo da barra de cada regra; a linha $S, A : V|\ |S, B : V$ deve ser entendida como transformação do conjunto acima da linha em dois conjuntos, $\{S, A : V\}$ e $\{S, B : V\}$ (ramificação).

Dado o conjunto de fórmulas anotadas S, o conjunto S_V é o subconjunto de S (possivelmente vazio), contendo apenas as fórmulas de S da forma $A : V$.

Uma regra não explícita (por se tratarem de conjuntos) é que podemos repetir fórmulas anotadas caso necessário: por exemplo, o conjunto $S, A : V$ é o mesmo que o conjunto $S, A : V, A : V$.

Definição 4 Um **tableau** é uma seqüência (finita) $T = (C_1, \ldots, C_N)$ de configurações, tais que cada conjunto de cada C_{i+1} é obtido de um dos conjuntos S de C_i pela aplicação de uma das regras a pelo menos uma das fórmulas contidas em tal conjunto S. O tableau T **é fechado** se cada conjunto de C_N contém $A : V$ e $A : F$, para alguma A.

Definição 5 Um conjunto de fórmulas S é **inconsistente** se para algum tableau $T = (C_1, \ldots, C_N)$, com $C_1 = \{S\}$, é fechado. Uma fórmula A é um **teorema (intuicionista)** se $S = \{A : F\}$ for inconsistente.

Exemplo 1 Mostremos que o axioma 1, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ é um teorema neste sentido:

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A) : F$
2. $A : V, (B \rightarrow A) : F$ (aplicando a regra $F_\rightarrow$)
3. $A : V, B : V, A : F$ (novamente a regra $F_\rightarrow$) Fechou o tableau.

Como o tableau fechou, vemos que o primeiro axioma é teorema neste sentido.

Exemplo 2 Mostremos agora que $A \vee \neg A$ não é sempre teorema:

1. $(A \vee \neg A) : F$
2. $A : F, \neg A : F$ (regra $F_\vee$)
3. $A : V$ (regra $F_\neg$, que é a única possível de aplicar aqui) Não fechou e, dependendo de A, pode ser que não feche.

Como, neste caso, não há nenhuma outra possibilidade de tableau, $A \vee \neg A$ não é teorema se nem A e nem $\neg A$ são teoremas.

Exemplo 3 Vejamos o axioma 3, $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$:

1. $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)) : F$
2. $(A \to B) : V, ((A \to \neg B) \to \neg A) : F$
3. $(A \to B) : V, (A \to \neg B) : V, \neg A : F$
4. $(A \to B) : V, (A \to \neg B) : V, A : V$
5. $A : F, (A \to \neg B) : V, A : V| \; |B : V, (A \to \neg B) : V, A : F$
6. $A : F, (A \to \neg B) : V, A : V| \; |B : V, A : F, A : V| \; |B : V, \neg B : V, A : F$
7. $A : F, (A \to \neg B) : V, A : V| \; |B : V, A : F, A : V| \; |B : V, B : F$

O tableau ramificou-se duas vezes (nas linhas 5 e 6), fechando em todos os ramos. Assim, o axioma 3 é um teorema.

Exemplo 4 Vamos mostrar que, apesar de $A \vee \neg A$ não ser teorema, sua dupla negação, $\neg\neg(A \vee \neg A)$ é teorema. Aqui usaremos o truque de repetir a mesma fórmula anotada.

1. $\neg\neg(A \vee \neg A) : F$
2. $\neg(A \vee \neg A) : V$ (que é o mesmo conjunto que $\neg(A \vee \neg A) : V, \neg(A \vee \neg A) : V$)

3. $\neg(A \vee \neg A) : V, (A \vee \neg A) : F$
4. $\neg(A \vee \neg A) : V, A : F, \neg A : F$
5. $\neg(A \vee \neg A) : V, A : V$
6. $(A \vee \neg A) : F, A : V$
7. $A : F, \neg A : F, A : V$

Como o tableau fechou, $\neg\neg(A \vee \neg A)$ é teorema.

O truque deste exemplo pode (e deve) ser usado para mostrar que se A é tautologia clássica (mas não intuicionista), $\neg\neg A$ é teorema.

Exercício 6 Mostre que cada axioma intuicionista (1 a 10) é um teorema no sentido dos tableaus.

Exercício 7 Mostre via tableaus que cada uma das fórmulas abaixo é um teorema:

1. $A \to \neg\neg A$
2. $A \to (\neg A \to B)$
3. $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$
4. $\neg\neg(\neg\neg A \to A)$
5. $(\neg\neg(A \to B)) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$
6. $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg\neg(A \to B))$
7. $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$
8. $(\neg(A \vee B)) \to (\neg A \wedge \neg B)$

Exercício 8 Mostre que NENHUM tableau fecha para as seguintes fórmulas:

1. $\neg\neg A \to A$
2. $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$

3. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Exercício 9 (Método dos Tableaux para o Cálculo Proposicional Clássico) Mostre que se tomarmos o conjunto S_V como sendo o príopio S nas regras $F_{\rightarrow}$ e $F_{\neg}$, então os axiomas e teoremas clássicos são teoremos no sentido dos tableaux.

4 Semântica e Completitude

Apresentaremos duas semânticas equivalentes para o Cálculo Proposicional Intuicionista e mostraremos a completitude dos dois métodos de demonstração. A primeira semântica é uma extensão das tabelas verdades do cálculo clássico e é mais apropriada ao método axiomático. A segunda é devido a Saul Kripke e é mais apropriada ao método dos tableaus. Da prova da equivalência das duas semânticas e pelos teoremas de correção e de completitude, segue que os dois métodos de demonstração produzem os mesmos teoremas.

4.1 Álgebras de Heyting

Definição 6 Uma **álgebra de Heyting** $\mathbb{A}$ é um reticulado distributivo e pseudo complementado, com máximo e mínimo, ou seja:

1. (reticulado) para cada $a, b \in \mathbb{A}$ existem $a \cup b = \min\{x \in \mathbb{A} : a \leq x, b \leq x\}$ e $a \cap b = \max\{x \in \mathbb{A} : x \leq a, x \leq b\}$;

2. (distributivo) para cada $a, b, c \in \mathbb{A}$, valem as igualdades $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ e $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$;

3. (pseudo complementado) dados $a, b \in \mathbb{A}$, existe um elemento $a \Rightarrow b \in \mathbb{A}$, definido por $a \Rightarrow b = \max\{x \in \mathbb{A} : a \cap x \leq b\}$, e é chamado de **pseudo complemento** de a relativo a b;

4. existem os elementos $\mathbf{0} = \min \mathbb{A}$ e $\mathbf{1} = \max \mathbb{A}$.

Definimos o **pseudo complemento** $-a$ de $a \in \mathbb{A}$ como sendo o elemento $-a = a \Rightarrow \mathbf{0}$.

Exercício 10 Mostre que numa álgebra de Heyting $\mathbb{A}$ valem:

1. $(a \Rightarrow b) = \mathbf{1}$ se, e só se, $a \leq b$;
2. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) = (a \cap b) \Rightarrow c$;
3. $a \cap (a \Rightarrow b) = a \cap b$;
4. $b \cap (a \Rightarrow b) = b$;

4.2 Correção e Completitude do Método Axiomático

Seja Form o conjunto das fórmulas proposicionais. Dada uma álgebra de Heyting $\mathbb{A}$, uma função $v : \text{Form} \to \mathbb{A}$ é chamada de **atribuição de valores** (ou de **avaliação**) se satisfaz as condições:

1. $v(A \wedge B) = v(A) \cap v(B)$;
2. $v(A \vee B) = v(A) \cup v(B)$;
3. $v(A \to B) = v(A) \Rightarrow v(B)$;
4. $v(\neg A) = -v(A)$.

Uma fórmula A é uma **tautologia intuicionista** se, para toda álgebra de Heyting $\mathbb{A}$ e toda avaliação $v : \text{Form} \to \mathbb{A}$, $v(A) = \mathbf{1}$.

O exercício a seguir é uma simples indução numa dedução de A.

Exercício 11 Teorema da Correção para o Método Axiomático Mostre que se $\mathbb{A}$ é uma álgebra de Heyting e $v : \text{Form} \to \mathbb{A}$ é uma atribuição de valores às fórmulas proposicionais, então:

1. $v(A) = \mathbf{1}$ se A é um dos axiomas;
2. se $v(A) = v(A \to B) = \mathbf{1}$, então $v(B) = \mathbf{1}$.

Conclua que se $\vdash A$ então $v(A) = \mathbf{1}$.

Para provar a recíproca, o Teorema da Completitude, precisamos definir uma álgebra de Heyting muito especial, a chamada **álgebra de Lindenbaum** do Cálculo Proposicional intuicionista.

Exercício 12 Seja $\sim$ a seguinte relação entre fórmulas proposicionais: $A \sim B$ se (e só se) $\vdash A \to B$ e $\vdash B \to A$. Mostre que

1. $\sim$ é uma relação de equivalência: $A \sim A$; se $A \sim B$, então $B \sim A$; se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$ (dica: use os axiomas 1 e 2 e que $\vdash A \to A$);
2. se $A \sim B$, então $(\neg A) \sim (\neg B)$;
3. se $A \sim C$ e $B \sim D$, então $(A \wedge B) \sim (C \wedge D)$ e $(A \vee B) \sim (C \vee D)$;
4. se $A \sim C$ e $B \sim D$, então $(A \to B) \sim (C \to D)$.

Exercício 13 Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das classes de equivalência da relação $\sim$ do exercício anterior e denotemos a classe da fórmula A como $[A]$. Mostre que:

1. a relação $\leq$, definida por $[A] \leq [B]$ se $A \vdash B$, é uma ordem parcial em $\mathcal{A}$;
2. com tal ordem parcial $\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo, com mínimo $\mathbf{0} = [A \wedge \neg A]$ e máximo $\mathbf{1} = [A \to A]$;
3. mostre que $[A] \Rightarrow [B] = [A \to B]$ define um pseudo complemento de $[A]$ relativo a $[B]$.

Definição 7 Com as operações definidas acima, o conjunto $\mathcal{A}$ torna-se uma álgebra de Heyting, chamada de **Álgebra de Lindenbaum** do Cálculo Proposicional Intuicionista.

Exercício 14 **Teorema da Completitude para o Método Axiomático:** Mostre que se A é uma tautologia intuicionista, então $\vdash A$. (Dica: se $\nvdash A$, considere $v(A) = [A] \in \mathcal{A}$.)

4.3 Modelos de Kripke

Definição 8 Um **modelo de Kripke** é uma tripla $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash)$, sendo que $\mathcal{G}$ é um conjunto não vazio (que poderemos chamar de conjunto de estados de conhecimento); $\mathcal{R}$ é uma relação reflexiva (isto é $\alpha\,\mathcal{R}\,\alpha$, $\alpha \in \mathcal{G}$) e transitiva (isto é, se $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta$ e $\beta\,\mathcal{R}\,\gamma$, então $\alpha\,\mathcal{R}\,\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}$); $\Vdash$ é uma relação entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas proposicionais, tal que:

1. se A é fórmula atômica e $\alpha \Vdash A$, então para todo $\beta \in \mathcal{G}$, se $\alpha \mathcal{R} \beta$, então $\beta \Vdash A$;
2. se $\alpha \Vdash A$ e $\alpha \Vdash B$, então $\alpha \vdash A \wedge B$;
3. se $\alpha \Vdash A$ ou $\alpha \Vdash B$, então $\alpha \vdash A \vee B$;
4. se para todo β tal que $\alpha \mathcal{R} \beta$, $\beta \nVdash A$, então $\alpha \Vdash \neg A$;
5. se para todo β tal que $\alpha \mathcal{R} \beta$, se $\beta \Vdash A$ então $\beta \Vdash B$, então $\alpha \Vdash A \to B$.

Dizemos que uma fórmula A é válida se, para todo modelo de Kripke $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash)$ e todo $\alpha \in \mathcal{G}$, temos que $\alpha \Vdash A$.

Exercício 15 Mostre que se $\alpha \Vdash A$ e $\alpha \mathcal{R} \beta$, então $\beta \Vdash A$. Observe que, por definição, isto vale para A atômica. Prove por indução na quantidade de símbolos em A.

Exercício 16 Vamos mostrar que $A \to (B \to A)$ é válida. Justifique as afirmações a seguir. Seja $\alpha \in \mathcal{G}$. Se $\alpha \Vdash (B \to A)$, então, pela definição de $\Vdash$ para a implicação, $\alpha \Vdash A \to (B \to A)$; se $\alpha \Vdash \neg A$, então $\alpha \Vdash (B \to A)$ e, portanto, $\alpha \Vdash A \to (B \to A)$. Se existir β, tal que $\alpha \mathcal{R} \beta$ e $\beta \Vdash A$, então $\beta \Vdash B \to A$ e protanto $\alpha \Vdash A \to (B \to A)$.

Exercício 17 Seja $\mathcal{G} = \{\alpha, \beta\}$ (apenas dois elementos), com $\alpha \mathcal{R} \beta$ (e, é claro, $\alpha \mathcal{R} \alpha$ e $\beta \mathcal{R} \beta$), A uma fórmula atômica e $\beta \Vdash A$, mas $\alpha \nVdash A$. Mostre que $\alpha \nVdash (A \vee \neg A)$, ou seja, $(A \vee \neg A)$ não é válida.

4.4 Correção e Completitude do Método dos Tableaus

Para o método dos tableaus, é mais conveniente trabalhar com os modelos de Kripke. Mas veremos a seguir que as duas noções semânticas são equivalentes.

Dizemos que um conjunto de fórmulas anotadas $S = \{A_1 : V, \ldots, A_m : V, B_1 : F, \ldots, B_n : F\}$ é **realizável** se existe um modelo de Kripke $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash)$ e algum $\alpha \in \mathcal{G}$, tais que $\alpha \Vdash A_i$, $1 \leq i \leq m$, e $\alpha \nVdash B_j$, $1 \leq j \leq n$. Assim, se A é uma fórmula válida (em qualquer modelo de Kripke), $\{A : V\}$ é realizável, mas $\{A : F\}$ não o é. Uma configuração $C = \{S_1, \ldots, S_k\}$ é realizável se pelo menos um dos $S \in C$ for realizável.

Exercício 18 Seja S um conjunto de fórmulas anotadas. Suponha que S seja realizável. Mostre que:

1. $(V_\wedge)$ se $(A \wedge B) : V \in S$, então $S \cup \{A : V, B : V\}$ também é realizável;
2. $(V_\vee)$ se $(A \vee B) : V \in S$, então pelo menos um dos conjuntos $S \cup \{A : V\}$ ou $S \cup \{B : V\}$ é realizável;
3. $(V_\neg)$ se $(\neg A) : V \in S$, então $S \cup \{A : F\}$ é realizável;
4. $(V_\rightarrow)$ se $(A \rightarrow B) : V \in S$, então pelo menos um dos conjuntos $S \cup \{A : F\}$ ou $S \cup \{B : V\}$ é realizável;
5. $(F_\wedge)$ se $(A \wedge B) : F \in S$, então pelo menos um dos conjuntos $S \cup \{A : F\}$ ou $S \cup \{B : F\}$ é realizável;
6. $(F_\vee)$ se $(A \vee B) : F \in S$, então $S \cup \{A : F, B : F\}$ também é realizável;
7. $(F_\neg)$ se $(\neg A) : F \in S$, então $S_V \cup \{A : V\}$ é realizável;
8. $(F_\rightarrow)$ se $(A \rightarrow B) : F \in S$, então $S_V \cup \{A : V, B : F\}$ também é realizável.

Exercício 19 Teorema da Correção para o Método dos Tableaus: Seja $(C_1, \ldots, C_n)$ um tableau. Mostre que se C_i é realizável, então C_{i+1} também é realizável. Conclua que tal tableau não pode fechar. Assim, se A é teorema, então A é válida em qualquer modelo de Kripke.

Agora passaremos à completitude. A demonstração descreverá um algoritmo que, dada a fórmula A, ou produzirá um tableau fechado começando com $S = \{A : F\}$, ou um modelo de Kripke (finito) realizando S. Tal modelo será construído a partir de conjuntos de fórmulas anotadas com a seguinte propriedade:

Definição 9 Um coleção de conjuntos de fórmulas anotadas $\mathcal{G}$ é chamado de **coleção de Hintikka** se cada $\alpha \in \mathcal{G}$ for um conjunto consistente de fórmulas anotadas (ou seja, nenhum tableau começando com tal conjunto fecha) e satisfizer as seguintes condições:

1. se $(A \wedge B) : V \in \alpha$, então $A : V \in \alpha$ e $B : V \in \alpha$;

2. se $(A \wedge B) : F \in \alpha$, então $A : F \in \alpha$ ou $B : F \in \alpha$;

3. se $(A \vee B) : V \in \alpha$, então $A : V \in \alpha$ ou $B : V \in \alpha$;

4. se $(A \vee B) : F \in \alpha$, então $A : F \in \alpha$ e $B : F \in \alpha$;

5. se $(A \rightarrow B) : V \in \alpha$, então $A : F \in \alpha$ ou $B : V \in \alpha$;

6. se $(A \rightarrow B) : F \in \alpha$, então para algum $\beta \in \mathcal{G}$, temos que $\alpha_V \subseteq \beta$, $A : V \in \beta$ e $B : V \in \beta$;

7. se $(\neg A) : V \in \alpha$, então $A : F \in \alpha$;

8. se $(\neg A) : F \in \alpha$, então para algum $\beta \in \mathcal{G}$, temos que $\alpha_V \subseteq \beta$ e $A : V \in \beta$.

Exercício 20 Seja $\mathcal{G}$ uma coleção de Hintikka. Definimos a relação $\mathcal{R}$ em $\mathcal{G}$ por $\alpha \mathcal{R} \beta$ se $\alpha_V \subseteq \beta$. Definimos a relação $\Vdash$ entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas por $\alpha \Vdash A$ se A é atômica e $A : V \in \alpha$ e estendemos de modo que $(\mathcal{G}\mathcal{R}, \Vdash)$ forme um modelo de Kripke. Mostre como estender $\Vdash$ de modo a abarcar todas as fórmulas.

Exercício 21 Teorema da Completitude para o Método dos Tableaus: Mostre que se A é válida, então A é um teorema. Para isto, suponhamos que A não seja teorema, ou seja, nenhum tableau para $\{A : F\}$ fecha. Vamos obter uma coleção de Hintikka que servirá de modelo (para $\neg A$). Aplicando uma das regras F obteremos um conjunto de fórmulas anotadas S_0; aplicamos todas as regras possíveis exceto $F_{\rightarrow}$ e $F_{\neg}$, obtendo S_1, que tem a seguinte propriedade:

1. se $(A \wedge B) : V \in S_1$, então $A : V, B : V \in S_1$;

2. se $(A \vee B) : V \in S_1$, então ou $A : V \in S_1$, ou $B : V \in S_1$;

3. se $(A \rightarrow B) : V \in S_1$, então ou $A : F \in S_1$, ou $B : V \in S_1$;

4. se $(\neg A) : V \in S_1$, então $A : F \in S_1$;

5. se $(A \wedge B) : F \in S_1$, então ou $A : F \in S_1$, ou $B : F \in S_1$;

6. se $(A \vee B) : F \in S_1$, então $A : F, B : F \in S_1$.

Depois aplicamos a S_1 as regras $F_\to$ e $F_\neg$ onde couber, obtendo um ou mais conjuntos U_0, dots, U_k, resultantes da aplicação da regra $F_\to$ a cada ocorrência de $(A \to B) : F$ em S_1 e da regra $F_\neg$ a cada ocorrência de $(\neg A) : F$ em S_1. Assim, por exemplo, se $(A \to B) : F \in S_1$, para algum i, $U_i = (S_1)_V \cup \{A : V, B : F\}$. Sejam $S_2, \ldots, S_{k+2}$ o resultado de aplicar as outras regras (como no caso de S_1) a cada U_i. Depois faça o mesmo tratamento com as regras $F_\to$ e $F_\neg$ com S_2, e assim por diante. Este procedimento termina? Se A não for teorema, $\{A : F\}$ é consistente. Daí, podemos escolher os S_j todos consistentes. Detalhe os argumentos e verifique que o método esboçado ou produz um modelo de Kripke para $\neg A$, ou produz um tableau fechado para $\{A : F\}$.

4.5 Equivalência entre as duas Semânticas

Vamos mostrar aqui que uma fórmula A é uma tautologia intuicionista (no sentido das álgebras de Heyting) se, e só se, A é válida no sentido dos modelos de Kripke. Para isto vamos obter um modelo de Kripke a partir de uma álgebra de Heyting e, reciprocamente, obteremos uma álgebra de Heyting a partir de um modelo de Kripke.

4.5.1 Passando do modelo de Kripke para a álgebra de Heyting

Comecemos com um modelo de Kripke $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash)$ e uma fórmula A válida. Seja $\mathbb{A} = \{X : X \subseteq \mathcal{G}$, e tal que se $\alpha \in X$ e $\alpha \mathcal{R} \beta$, então $\beta \in X\}$ (dizemos que tais X são $\mathcal{R}$-fechados). Seja $\leq$ a ordem parcial em $\mathcal{A}$ dada pela inclusão $X \leq Y$ se, e só se, $X \subseteq Y$. Definimos $\cap$ e $\cup$ como a intersecção e a união de conjuntos.

Exercício 22 Mostre que, assim, $\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo, com mínimo $\mathbf{0} = \varnothing$ e máximo $\mathbf{1} = \mathcal{G}$.

Exercício 23 Sejam $X, W \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{A}$, tais que $Y \subseteq (\mathcal{G} \setminus X) \cup W$ e Y é maximal $\mathcal{R}$-fechado (ou seja, Y é $\mathcal{R}$-fechado e se $Z \subseteq (\mathcal{G} \setminus X) \cup W$ e Z é $\mathcal{R}$-fechado, então $Z \subseteq Y$). (Por que existe um tal Y maximal?) Mostre que $Y = X \Rightarrow W$.

Exercício 24 Mostre que é uma avaliação a função $v : \text{Form} \to \mathbb{A}$, $v(A) = \{\alpha \in \mathcal{G} : \alpha \Vdash A\}$, e que se A é uma fórmula válida em $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash)$, então $v(A) = \mathbf{1}$.

4.5.2 Passando da álgebra de Heyting para o modelo de Kripke

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Heyting. Um **filtro** em $\mathcal{A}$ é um subconjunto F de $\mathcal{A}$, tal que $\mathbf{1} \in F$, e $a \cap b \in F$ se, e só se $a, b \in F$.

Exercício 25 Mostre que se F é um filtro, $a \in F$ e $a \leq b$, então $b \in F$.

Exercício 26 Mostre que F é um filtro se, e só se, $a, a \Rightarrow b \in F$ implicar que $b \in F$. (Dica: calcule $a \cap a \Rightarrow b$.)

Se F é um filtro em $\mathbb{A}$ e $a \in \mathbb{A}$, então o **filtro gerado** por F e a é o menor filtro contendo $F \cup \{a\}$.

Exercício 27 Mostre que se F é filtro e $(a \Rightarrow b) \notin F$, então o filtro gerado por F e a não tem o elemento b.

Exercício 28 Mostre que se o filtro F não possui o elemento $-a = (a \Rightarrow \mathbf{0})$, então o filtro gerado por F e a também não possui tal elemento.

Dizemos que o filtro F é um **filtro primo** se $a \cup b \in F$ implicar que ou $a \in F$ ou $b \in F$. Um filtro $F \subseteq \mathbb{A}$ é um **filtro maximal** se $F \neq \mathbb{A}$ e se F' é um filtro tal que $F \subseteq F' \neq \mathbb{A}$, então $F = F'$.

Exercício 29 Mostre que um filtro maximal é um filtro primo.

Exercício 30 Mostre que dados um filtro F e $a \notin F$, então existe um filtro primo $P \supseteq F$ tal que $a \notin P$. (Dica: use o Lema de Zorn no conjunto de todos os filtros $F' \supseteq F$, tais que $a \notin F'$, e verifique que o elemento maximal obtido é realmente um filtro primo.)

Seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todos os filtros primos $F \neq \mathbb{A}$ e seja $\mathcal{R}$ a relação de inclusão $\subseteq$. Seja $v : \text{Form} \to \mathbb{A}$ uma avaliação. Definimos a relação $\Vdash$ assim: $\alpha \Vdash A$ se $v(A) \in \alpha$ (lembre-se de que α é um filtro em $\mathbb{A}$).

Exercício 31 Mostre que $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash)$ assim definidos forma um modelo de Kripke, tal que a fórmula A é válida neste modelo se, e só se, $v(A) = \mathbf{1}$, v definida acima. Para isto, verifique:

1. se A é atômica e $\alpha \Vdash A$, então para todo β, $\alpha \mathcal{R} \beta$, $\beta \Vdash A$;
2. $\alpha \Vdash A \wedge B$ se, e só se, $\alpha \Vdash A$ e $\alpha \Vdash B$;
3. $\alpha \Vdash A \vee B$ se, e só se, $\alpha \Vdash A$ ou $\alpha \Vdash B$;
4. se $\alpha \Vdash \neg A$, então para todo β, se $\alpha \mathcal{R} \beta$, então $\beta \nVdash A$;
5. se $\alpha \Vdash (A \to B)$, então para todo β, se $\alpha \mathcal{R} \beta$, se $\beta \Vdash A$, então $\beta \Vdash B$.

Exercício 32 Mostre que A é uma tautologia intuicionista no sentido de álgebras de Heyting se, e só se, A for válida em todo modelo de Kripke.