

# MAT-240: Geometria e Desenho Geométrico II

Notas de Aula e Exercícios - Prof. Ricardo Bianconi

1º Semestre de 2003

## 1. ÁREA EM GEOMETRIA EUCLIDEANA

### 1.1. INTRODUÇÃO

O que é área de uma figura geométrica plana?

Para motivar esta idéia, comecemos relembando o que é comprimento de um segmento. Quando dizemos que um segmento  $\overline{AB}$  mede um número  $x \in \mathbb{R}$ , isto quer dizer que temos uma unidade de medida (um segmento que dizemos medir 1, sendo fixado como unidade de medida padrão) e subdividimos  $\overline{AB}$  em outros segmentos medindo frações do segmento unitário. Se  $x = m/n$  é um número racional, isto quer dizer que podemos subdividir o segmento  $\overline{AB}$  em  $m$  segmentos, cada um destes medindo  $1/n$  do segmento unitário. Caso  $x$  seja um número irracional, esta medida foi obtida por um processo de aproximação infinito por subsegmentos de  $\overline{AB}$  de medidas racionais. Por exemplo, aproximamos um segmento  $\overline{AB}$  de medida  $\sqrt{2}$  por segmentos  $\overline{AB_1}$  de medida  $1,4 = 14/10$ ,  $\overline{AB_2}$  de medida  $1,41 = 141/100$ , etc.

Para a noção de área, usaremos uma idéia similar. Partiremos de uma figura medindo 1, e recobrimos outras figuras com cópias de frações desta figura unitária e, se necessário, faremos um processo de aproximação para valores irracionais. Faremos esta subdivisão da figura unitária por figuras semelhantes a ela. Por exemplo, faremos nossas contas usando quadrados, subdividindo o quadrado unitário em quadrados. Se usarmos triângulos, subdividiremos o triângulo unitário em triângulos semelhantes a este.

Na figura 1, exemplificamos o cálculo de área de retângulos com lados racionais. Cobrimos as figuras com cópias inteiras e fracionárias do quadrado unitário. A área de um quadrado de lado  $n$  inteiro será  $n^2$ , que é o número de quadrados unitários usados para preencher a figura. Se o lado do quadrado for um número racional  $r = m/n$ , preenchemos a figura com quadrados de lado  $1/n$ ; o quadrado unitário é coberto por  $n^2$  quadrados de lado  $1/n$ , então a área de cada um destes quadrados será  $1/n^2$ . Portanto, como precisaremos de  $m^2$  quadrados de lado  $1/n$  para cobrir o quadrado original de lado  $r = m/n$ , sua área será  $m^2 \times 1/n^2 = (m/n)^2 = r^2$ . Se o lado do quadrado for um irracional  $r \in \mathbb{R}$ , faremos aproximações racionais dos lados, aproximando o quadrado por dentro, por quadrados de lados racionais, obtendo novamente a área do quadrado igual a  $r^2$ .

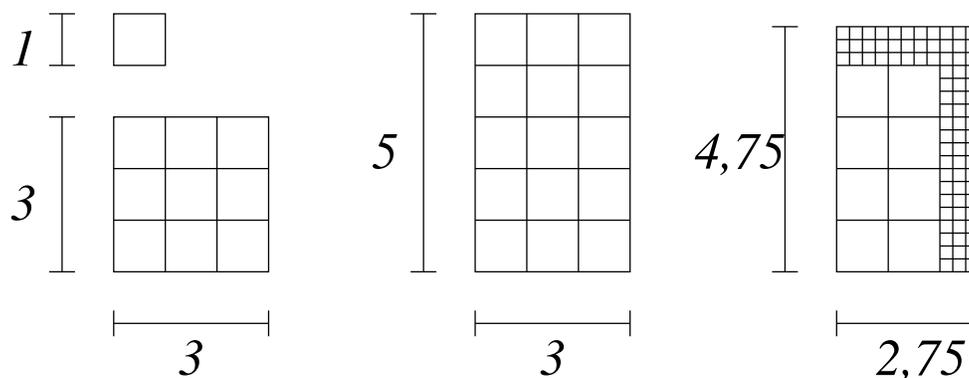


Figura 1: Áreas de retângulos: quadrado unitário; quadrado de lado 3; retângulo de lados 3 e 5; retângulo de lados  $2\frac{3}{4}$  e  $4\frac{3}{4}$ .

**Exercício 1:** Para retângulos de lados  $a$  e  $b$ , pelo mesmo raciocínio, obtemos que sua área será  $ab$ . Detalhe o procedimento (lados racionais e irracionais).

**Exercício 2:** Para triângulos retângulos de catetos  $a$  e  $b$ , olhando como metade de um retângulo, obtemos que sua área será  $ab/2$ . Detalhe o procedimento.

**Exercício 3:** Para triângulos quaisquer,  $\triangle ABC$ , de base  $a$  e altura  $h$ , a área é  $ah/2$ . Detalhe o procedimento, reduzindo aos triângulos retângulos determinados pela base e pela altura.

**Exercício 4:** Refaça os exercícios acima, mas agora usando um triângulo retângulo, com catetos medindo 1 e 2, como unidade de área.

**Exercício 5:** Refaça os exercícios acima, mas agora usando um triângulo equilátero como unidade de área. Qual deve ser a medida do lado para que o quadrado de lado 1 tenha área 1?

## 1.2. FUNÇÃO ÁREA

Área é uma função que associa a cada “figura geométrica plana” um número real positivo tal que, se duas figuras são congruentes, elas têm a mesma área, se duas figuras se juntam para formar uma terceira figura, “sem superposição”, então a área desta é a soma das áreas daquelas. Observe que para calcular as áreas acima, particionamos o interior das figuras. Vamos tornar tudo isto mais preciso.

**DEFINIÇÕES:** Uma **região triangular**  $T = \triangle ABC$  é o conjunto dos pontos de  $\triangle ABC$  (os lados do triângulo) e dos pontos de seu interior. Uma **região poligonal**  $R$  é a união de regiões triangulares  $T_1, \dots, T_n$ , tais que os interiores dos  $T_i$  são disjuntos e se  $T_i$  intersecta  $T_j$ , com  $i \neq j$ , então esta intersecção é um vértice comum ou uma aresta comum a ambos. O conjunto  $\{T_1, \dots, T_n\}$  é uma **triangulação de  $R$** . Um ponto  $P$  de uma região  $R$  é um **ponto interior** de  $R$  se existir

um triângulo  $\triangle ABC$  tal que  $\triangle ABC \subseteq R$  e  $P$  é ponto do interior de  $\triangle ABC$ . Um ponto  $P$  de uma região  $R$  é um **ponto de fronteira** de  $R$  se não for ponto interior de  $R$ . Por exemplo, os pontos interiores de  $\triangle ABC$  são os pontos do interior de  $\triangle ABC$  e os pontos de fronteira são os pontos de  $\triangle ABC$  (os pontos dos lados do triângulo). A **fronteira** de uma região poligonal  $R$  é o conjunto de seus pontos de fronteira e o **interior** de  $R$  é o conjunto de seus pontos interiores.

**Exercício 6:** Mostre que a fronteira de uma região poligonal  $R$  é a união de um ou mais polígonos.

**Exercício 7:** Mostre que se as regiões poligonais  $R_1$  e  $R_2$  se intersectam no máximo em pontos de fronteira, então  $R = R_1 \cup R_2$  é uma região poligonal. Para isto, você deve achar uma triangulação de  $R$  a partir de triangulações de  $R_1$  e de  $R_2$ . Cuidado que não basta tomar a união das triangulações, pois o resultado pode conter o vértice de um triângulo no meio da aresta de outro, ou dois triângulos intersectarem-se em partes de arestas. Para isto, você precisa considerar tais casos e subdividir os triângulos convenientemente (veja a figura 2).

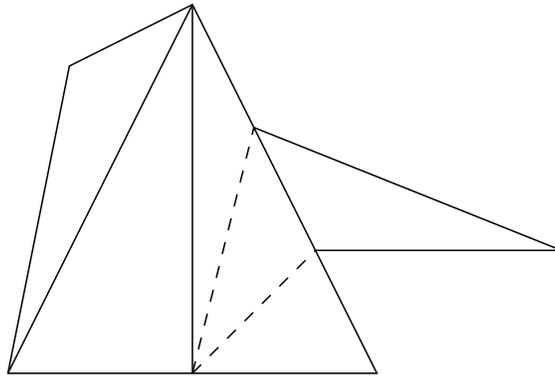


Figura 2: Unindo duas regiões. As linhas tracejadas indicam as subdivisões da triangulação antiga para obter uma triangulação da união das regiões.

**Exercício 8:** Mostre que a intersecção de duas regiões triangulares que tenham (alguns) pontos interiores em comum, tem como fronteira um polígono (convexo) de 3, 4, 5 ou 6 lados. Desenhe um exemplo de cada situação.

**Exercício 9:** Dado um polígono convexo de  $n$  lados, descreva como obter uma triangulação deste. (Sugestão: se o polígono tem vértices  $A_1, \dots, A_n$ , considere os triângulos  $\triangle A_1 A_i A_{i+1}$ .)

**Exercício 10:** Dadas uma região  $R$  e duas triangulações  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$  e  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  de  $R$ , mostre que existe uma triangulação  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_p\}$  de  $R$ , tal que para cada região triangular  $T_i$  (respectivamente,  $S_j$ ), existe um subconjunto de  $\mathcal{U}$  que triangula  $T_i$  (e um subconjunto de  $\mathcal{U}$  que triangula  $S_j$ ). Chamamos a triangulação  $\mathcal{U}$  de **refinamento** de  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{S}$ . Desenhe um exemplo (com uma cor para cada triangulação) para ver o que deve ser feito. Os exercícios acima devem ajudar a obter  $\mathcal{U}$ . Triangule cada intersecção  $T_i \cap S_j$  que não for vazia.

**Exercício 11:** Na situação do exercício anterior, mostre que a soma das áreas dos  $T_i$  é igual à soma das áreas dos  $S_j$ , que é igual à soma das áreas dos  $U_k$ .

**DEFINIÇÃO:** Dada uma região poligonal  $R$ , definimos sua área como a soma das áreas das regiões triangulares de qualquer triangulação de  $R$ . O exercício anterior indica que esta definição não depende da triangulação.

**Exercício 12:** Lembramos que um trapézio é um quadrilátero convexo  $ABCD$  com dois lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  paralelos, chamados de bases. Mostre que a área de um trapézio é  $(a + b)h/2$ , sendo que  $a = AB$ ,  $b = CD$  e  $h$  é a altura do trapézio em relação às bases.

**Exercício 13:** Lembramos que um polígono regular é um polígono convexo com todos os seus lados congruentes e todos os ângulos congruentes. Calcule a área de um polígono regular de  $n$  lados. Ache fórmulas dependendo do tamanho do lado para  $n = 6, 8, 12$  e  $16$ .

**Exercício 14:** Mostre que a área de um paralelogramo é  $bh$ , sendo  $b$  uma base e  $h$  a altura correspondente. (Recorte-o em dois triângulos congruentes.)

### 1.3. EQUIDECOMPONIBILIDADE

**DEFINIÇÃO:** Duas regiões poligonais  $R_1$  e  $R_2$  são ditas **equidecomponíveis** se existem triangulações  $\{T_1, \dots, T_n\}$  de  $R_1$  e  $\{T'_1, \dots, T'_n\}$  de  $R_2$ , tais que cada  $T_i$  é congruente a  $T'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Veremos que duas regiões poligonais são equidecomponíveis se, e somente se, elas têm mesma área. É claro que se são equidecomponíveis, então têm mesma área. Precisamos apenas mostrar a recíproca.

**Exercício 15:** Mostre que dois paralelogramos de mesma base e mesma altura são equidecomponíveis. Para isto, sejam  $ABCD$  e  $ABEF$  tais paralelogramos, com base  $\overline{AB}$ . Para terem a mesma altura,  $\overline{CD}$  e  $\overline{EF}$  pertencem à mesma reta, paralela à base. Observe que os triângulos  $\triangle ADF$  e  $\triangle BCE$  são congruentes. Considere os casos em que  $D - F - C$ ,  $F = C$  e  $D - C - F$  (por que só estes?). Desenhe as figuras.

**Exercício 16:** Mostre que dois triângulos de mesmas base e altura são equidecomponíveis. (Reduza ao caso dos paralelogramos.)

**Exercício 17:** Dado um retângulo de lados  $a$  e  $b$ , construa, com régua e compasso um quadrado de mesma área. Para isto, lembre-se que num triângulo retângulo de hipotenusa  $a + b$  e altura  $h$ , vale a relação  $h^2 = ab$ . Lembre-se também que a circunferência circunscrita a um triângulo retângulo tem seu centro na hipotenusa.

**Exercício 18:** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e um número real  $r > AB$ , existe um ponto  $P$  tal que  $\triangle ABC$  tem mesma área que  $\triangle PBC$ . Conclua que  $\triangle ABC$  e  $\triangle PBC$  são equidecomponíveis (considere a base comum  $\overline{BC}$ , etc.).

**Exercício 19:** Dado dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  de mesma área, mostre que eles são equidecomponíveis. Para isto, use o exercício anterior para reduzir ao caso de mesmas base e altura:

se os triângulos são congruentes, não precisamos fazer nada; senão, podemos supor que o lado  $\overline{DE}$  é maior que o lado  $\overline{AB}$ ; construa um triângulo  $\triangle BCP$  com  $\overline{BP} \equiv \overline{DE}$  e mesma área que  $\triangle ABC$ ; usando as bases  $\overline{BP}$  e  $\overline{DE}$ , termine o problema.

**Exercício 20:** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e um número real positivo  $r$  menor que a área de  $\triangle ABC$ , mostre que existe um ponto  $P$  em  $\overline{BC}$  tal que a área de  $\triangle ABP$  é  $r$ . Para isto, considere a base  $\overline{AB}$  e obtenha o ponto  $P$  de altura conveniente. Descreva como obtê-lo.

**Exercício 21:** Dada duas regiões  $R_1$  e  $R_2$  de mesma área, mostre que são equidecomponíveis. Para isto, sejam  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$  uma triangulação de  $R_1$  e  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  uma triangulação de  $R_2$ . Vamos descrever um processo para obtermos duas triangulações  $\mathcal{T}' = \{T'_1, \dots, T'_k\}$  de  $R_1$  e  $\mathcal{S}' = \{S'_1, \dots, S'_k\}$  de  $R_2$ , tais que  $T'_i$  tenha mesma área que  $S'_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Se  $T_1$  e  $S_1$  têm mesma área, definimos  $T'_1 = T_1$  e  $S'_1 = S_1$ . Descartamos  $S_1$  e  $T_1$ , e as regiões trianguladas por  $\{T_2, \dots, T_n\}$  e  $\{S_2, \dots, S_m\}$  continuam tendo mesma área e o número total de regiões triangulares restantes a serem tratadas é  $m + n - 2 < m + n$ .

Se  $T_1$  tem área maior do que  $S_1$ , então recortamos  $T_1$  em dois triângulos  $T'_1$  e  $T''_1$ , tais que  $T'_1$  tenha mesma área que  $S_1$  e definimos  $S'_1 = S_1$ . Descartamos  $S_1$  e  $T'_1$ , e as regiões trianguladas por  $\{T''_1, T_2, \dots, T_n\}$  e  $\{S_2, \dots, S_m\}$  continuam tendo mesma área e o número total de regiões triangulares restantes a serem tratadas é  $m + n - 1 < m + n$ .

Se  $S_1$  tem área maior do que  $T_1$ , então recortamos  $S_1$  em dois triângulos  $S'_1$  e  $S''_1$ , tais que  $S'_1$  tenha mesma área que  $T_1$  e definimos  $T'_1 = T_1$ . Descartamos  $T_1$  e  $S'_1$ , e as regiões trianguladas por  $\{T_2, \dots, T_n\}$  e  $\{S''_1, S_2, \dots, S_m\}$  continuam tendo mesma área e o número total de regiões triangulares restantes a serem tratadas é  $m + n - 1 < m + n$ .

Continuando o processo com as triangulações restantes, obtemos as duas triangulações desejadas. Por que o processo termina, não continua indefinidamente?

#### 1.4. COMPRIMENTO E ÁREA DE CÍRCULOS

Vamos considerar agora regiões delimitadas por outras curvas, além de segmentos, como, por exemplo, círculos, etc. O procedimento será de aproximação da região por regiões poligonais. Este procedimento foi muito desenvolvido por Eudoxo, um geômetra grego que viveu em torno de 300 A.C. Nos *Elementos* de Euclides existe a prova de que a área da circunferência é um múltiplo do quadrado do diâmetro (*Elementos*, Livro XII, proporsição 2). Arquimedes tem uma prova de que a área do círculo é igual à metade do raio multiplicado pelo perímetro e ainda faz uma boa estimativa dessa constante, o número  $\pi = 3,1415926\dots$

Para mostrar que a área da circunferência é um múltiplo do diâmetro ao quadrado, Euclides inscreve um polígono regular numa circunferência com “ $n$ ” lados. Vamos reproduzir o argumento a seguir.

**Exercício 22:** Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos semelhantes, com razão de semelhança  $r = AB/DE = BC/EF = CA/FD$ . Mostre que a área de  $\triangle ABC$  é  $r^2$  vezes a área de  $\triangle DEF$ .

**Exercício 23:** Mostre que a área de um polígono regular de  $n$  lados inscrito numa circunferência  $C$  tem área menor de que a de um polígono regular inscrito em  $C$  de  $m > n$  lados. Faça primeiro o caso em que  $m = 2n$ .

**Exercício 24:** Mostre que a área de um polígono regular de  $n$  lados circunscrito numa circunferência  $C$  tem área maior de que a de um polígono regular circunscrito em  $C$  de  $m > n$  lados. Faça primeiro o caso em que  $m = 2n$ .

**Exercício 25:** Mostre que se polígonos regulares de  $n$  lados inscritos (respectivamente, circunscritos) em circunferências de raios  $r$  e  $s$ , então a razão entre suas áreas é  $(r/s)^2$ .

O chamado **processo de exaustão** de Eudoxo é simplesmente o que hoje chamamos de limites ou aproximações sucessivas. Podemos definir a área de um círculo como o limite das áreas dos polígonos regulares inscritos ou circunscritos à circunferência, para  $n$  crescendo indefinidamente.

**Exercício 26:** Mostre que este limite existe. Para isto, observe que as áreas dos polígonos inscritos crescem com  $n$ , mas têm seus valores limitados pela área de um quadrado circunscrito.

**Exercício 27:** Faça estimativas do número  $\pi$ , usando polígonos de 16 lados inscritos numa circunferência. Observe que uma boa aproximação racional de  $\pi$  é  $355/113$ , com erro menor que  $3 \times 10^{-7}$ .

Recomendo a leitura dos *Elementos* de Euclides e as obras de Arquimedes. Eles são autores de primeira linha, escrevem com uma elegância e profundidade exemplares.

## 2. POSTULADOS DA GEOMETRIA ESPACIAL

Vamos relembrar os postulados da geometria plana, acrescentando os postulados para a geometria espacial.

### 2.1. POSTULADOS DE INCIDÊNCIA:

**Postulado I:** Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ , existe uma única linha contendo  $P$  e  $Q$ .

**Postulado II:** Dados três pontos não colineares (isto é, não na mesma linha)  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , existe um único plano contendo  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Tal plano será denotado por  $PQR$ .

**Postulado III:** Se dois planos distintos têm pontos em comum, então eles se intersectam em uma linha.

**Postulado IV:** Toda linha contém pelo menos dois pontos; todo plano contém pelo menos três pontos não colineares.

**Postulado V:** Existem pelo menos quatro pontos não coplanares (isto é, não no mesmo plano).

Usando apenas estes postulados, resolva os exercícios a seguir.

**Exercício 28:** Mostre que se duas linhas distintas se intersectam, então elas se intersectam exatamente em um ponto.

**Exercício 29:** Mostre que existem pelo menos 6 linhas e 4 planos numa geometria de incidência.

**Exercício 30:** Mostre que existem pelo menos três linhas distintas não concorrentes (isto é, existem  $\ell_1, \ell_2$  e  $\ell_3$  distintas e que não contêm um mesmo ponto  $P$ .)

**Exercício 31:** Mostre que dado um ponto  $P$ , existem pelo menos duas linhas distintas contendo  $P$ .

**Exercício 32:** Mostre que se dois pontos distintos  $A$  e  $B$  estão no plano  $\pi$ , então a linha  $\overleftrightarrow{AB}$  está toda contida no plano  $\pi$ .

## 2.2. POSTULADOS DE ORDEM:

Agora vamos enriquecer um pouco mais nossas geometrias, impondo uma relação de ordem entre pontos de uma mesma linha. Para isto, definimos uma relação ternária entre pontos denotada por  $A - B - C$  e falamos que “o ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ ” (ou que  $A$  é oposto a  $C$  em relação a  $B$ ) e deve satisfazer os seguintes postulados.

**Postulado VI:** Se  $A - B - C$ , então  $A, B$  e  $C$  são colineares e dois a dois distintos.

**Postulado VII:** Se  $A - B - C$ , então  $C - B - A$ .

**Postulado VIII:** Dados  $B \neq D$ , existem  $A, C, E \in \overleftrightarrow{BD}$  tais que  $A - B - D$ ,  $B - C - D$  e  $B - D - E$ .

**Postulado IX:** Dados  $A, B, C \in \ell$ , pontos distintos, então exatamente uma das relações  $A - B - C$ , ou  $A - C - B$  ou  $B - A - C$  é verdadeira.

**Postulado X:** (Pasch) Dados os pontos  $A, B$ , e  $C$  não colineares e uma linha  $\ell$  no plano  $ABC$ , se  $D \in \ell$  é um ponto tal que  $A - D - B$ , então ou  $\ell$  intersecta  $\overline{AC}$  ou  $\ell$  intersecta  $\overline{BC}$

Este último postulado tem consequências importantes. Lembre-se que um conjunto  $A$  do espaço é convexo se, para todos os pares de pontos  $P$  e  $Q$  em  $A$ , o segmento  $\overline{PQ}$  está todo contido em  $A$ .

**Exercício 33: (Separação nos planos)** Dada uma linha  $\ell$  contida num plano  $\pi$ , existem conjuntos  $H_1$  e  $H_2$  em  $\pi$  (chamados de *lados de  $\ell$  em  $\pi$* ) tais que  $H_1$  e  $H_2$  são convexos;  $H_1 \cap \ell = \emptyset$ ,  $H_2 \cap \ell = \emptyset$  e  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  e cada ponto do plano  $\pi$  está em  $H_1$ , ou em  $H_2$  ou em  $\ell$ ; se  $P \in H_1$  e  $Q \in H_2$  então o segmento  $\overline{PQ}$  intersecta a linha  $\ell$  num ponto  $R$ .

Para isto, seja  $P \in \pi$  um ponto fora de  $\ell$  e sejam  $H_1 = \{Q \in \pi : \overline{PQ} \cap \ell = \emptyset\}$  e  $H_2 = \{Q \in \pi : Q \notin \ell \text{ e } \overline{PQ} \cap \ell \neq \emptyset\}$ .

Então  $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap \ell = H_2 \cap \ell = \emptyset$ , e todo ponto do plano ou está em  $\ell$  ou em  $H_1$  ou em  $H_2$ . Falta mostrar que  $H_1$  e  $H_2$  são convexos e que dados  $A \in H_1$  e  $B \in H_2$ , o segmento  $\overline{AB}$  intersecta  $\ell$ .

Vamos mostrar que  $H_1$  é convexo. Para isto, sejam  $A, B \in H_1$ ,  $A \neq B$ , e suponhamos que  $A \neq P$  e  $B \neq P$  (os casos em que  $A = P$  ou  $B = P$  ficam para os leitores). Queremos mostrar que todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_1$ . Se  $A, B$  e  $P$  estão numa mesma linha  $\overleftrightarrow{AB}$ , então ou  $A - B - P$  ou  $A - P - B$  ou  $B - A - P$ . Mostre que em nenhum destes casos,  $\overline{AB}$  pode ter ponto nem de  $H_2$  e nem de  $\ell$ . Se  $A, B$  e  $P$  não são colineares, seja  $D \in \overline{AB}$  tal que  $A - D - B$ . Sabemos que  $\ell$  não intersecta nem  $\overline{AP}$  e nem  $\overline{BP}$  (por quê?). Se  $D \in \ell$  então  $\ell$  intersectaria  $\overline{AB}$ , e por Pasch, deveria intersectar  $\overline{AP}$  ou  $\overline{BP}$ . Portanto  $D \notin \ell$ . Se  $D \in H_2$ , então  $\ell$  intersecta  $\overline{DP}$ . Por Pasch, aplicado aos triângulos  $\triangle ADP$  e  $\triangle BDP$ , teríamos que  $\ell$  intersectaria  $\overline{AP}$  ou  $\overline{BP}$  (por quê?), uma contradição. Portanto, todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_1$ .

Vamos mostrar agora que  $H_2$  é convexo. Para isto, sejam  $A', B' \in H_2$ ,  $A' \neq B'$ . Precisamos mostrar que todos os pontos de  $\overline{A'B'}$  estão em  $H_2$ . Novamente temos dois casos, a saber,  $A', B'$  e  $P$  são colineares. Então ou  $A' - B' - P$  ou  $B' - A' - P$ . (Mostre que não pode ocorrer  $A' - P - B'$ .) Se  $A' - B' - P$ , pela definição de  $H_2$  existe um ponto  $R \in \ell \cap \overline{B'P}$ , tal que  $B' - R - P$ . Como  $\overline{A'B'} = \overline{B'P}$ , o único ponto de encontro de  $\ell$  com  $\overline{A'B'}$  é  $R$ . Como  $A' - B' - R$ , os pontos de  $\overline{A'B'}$  estão todos em  $H_2$  (por quê?). Suponhamos agora que  $A', B'$  e  $P$  sejam não colineares. Consideremos o triângulo  $\triangle A'B'P$ . Pela definição de  $H_2$ ,  $\ell$  intersecta ambos os lados  $\overline{A'P}$ , no ponto  $R$  e  $\overline{B'P}$ , no ponto  $S$ . Vamos mostrar que nenhum ponto de  $\overline{A'B'}$  pode estar em  $\ell$ . Seja  $T \in \overline{A'B'}$ ,  $A' - T - B'$ . Se  $T \in \ell$ , podemos ter  $R - S - T$ ,  $R - T - S$  ou  $S - R - T$ . Vamos considerar o caso  $R - S - T$ , deixando os outros dois para os leitores. Consideremos o  $\triangle A'TP$ , com a linha  $\overline{B'P}$ ; temos que  $B'P \neq A'T = A'B'$  e  $B'P \neq A'R = A'P$  (pois  $A', B'$  e  $P$  não são colineares); portanto  $B'P$  não encontra nem  $\overline{A'R}$  e nem  $\overline{A'T}$  (por quê?); como encontra  $\overline{RT}$  no ponto  $S$ , temos uma contradição ao postulado de Pasch. Aplicando Pasch aos triângulos  $\triangle A'TP$  e  $\triangle TB'P$ , temos que  $\overline{TP}$  intersecta  $\ell$  (por quê?) e, portanto  $T \in H_2$ , pela definição de  $H_2$ . Portanto  $H_2$  é convexo.

Agora sejam  $A'' \in H_1$  e  $B'' \in H_2$ . Precisamos mostrar que  $\overline{A''B''}$  intersecta  $\ell$  num ponto  $R$ . Se  $A'' = P$ , pela definição de  $H_2$ ,  $\overline{A''B''} = \overline{PB''}$  intersecta  $\ell$ . Se  $A'', B''$  e  $P$  não são colineares, como  $\overline{B''P}$  intersecta  $\ell$  e  $\overline{A''P}$  não intersecta  $\ell$  (por quê?), por Pasch no triângulo  $\triangle A''B''P$ ,  $\overline{A''B''}$  intersecta  $\ell$  num ponto  $R$ , como queríamos. Se  $A'', B''$  e  $P$  são colineares, como  $\overline{B''P}$  intersecta  $\ell$  (pela definição de  $H_2$ ), seja  $R$  este ponto em comum. Temos que  $B'' - R - P$  e, como  $A'' \in \overline{BP}$ ,  $A'' \in H_1$ ,  $A'' \neq P$ ,  $A'' \neq R$  e  $A'' \neq B$ , temos que, ou  $P - R - A''$  (que não pode ocorrer, pois  $A \in H_1$ , que é convexo), ou  $P - A'' - R$ , ou  $A'' - P - R$ , o que implica que  $\overline{A''B''}$  encontra  $\ell$  em  $R$ , como queríamos.

**DEFINIÇÃO:** Definimos o interior de uma semi reta  $\overrightarrow{AB}$  como o conjunto  $\text{int}(\overrightarrow{AB})$  dos pontos  $P \in \overrightarrow{AB}$  tais que  $P \neq A$  (a semi reta menos o vértice); interior de um segmento  $\overline{AB}$  como o conjunto  $\text{int}(\overline{AB})$  dos pontos  $P \in \overline{AB}$  tais que  $P \neq A$  e  $P \neq B$ ; e o interior do ângulo  $\angle AOB$  como o conjunto  $\text{int}(\angle AOB)$  obtido pela interseção  $H_1 \cap \overline{H_1}$ , sendo  $H_1$  o lado de  $\overleftrightarrow{OB}$  contendo  $A$  e  $\overline{H_1}$  o lado de  $\overleftrightarrow{OA}$  contendo  $B$ .

**Exercício 34:** (O Teorema das Barras Transversais) Se  $P \in \text{int}(\angle ABC)$  então  $\overline{BP}$  intersecta

$\overline{AC}$  num único ponto  $F$  com  $A - F - C$ .

**Exercício 35: (Separação do espaço)** Dada um plano  $\pi$ , existem conjuntos  $G_1$  e  $G_2$  (chamados de lados de  $\pi$ ) tais que  $G_1$  e  $G_2$  são convexos;  $G_1 \cap \pi = \emptyset$ ,  $G_2 \cap \pi = \emptyset$  e  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  e cada ponto do espaço está em  $G_1$ , ou em  $G_2$  ou em  $\pi$ ; se  $P \in G_1$  e  $Q \in G_2$  então o segmento  $\overline{PQ}$  intersecta o plano  $\pi$  num ponto  $R$ .

Para isto, seja  $P$  um ponto fora de  $\pi$  e sejam  $G_1 = \{Q : \overline{PQ} \cap \pi = \emptyset\}$  e  $G_2 = \{Q : Q \notin \pi \text{ e } \overline{PQ} \cap \pi \neq \emptyset\}$ .

Para provarmos que  $G_1$  é convexo, sejam  $A$  e  $B$  pontos de  $G_1$ . considere o plano  $\alpha = PAB$  (ou um plano  $\alpha$  contendo  $P$ ,  $A$  e  $B$ , caso sejam colineares). Se  $\alpha \cap \pi = \emptyset$ , como um plano é convexo, então  $\overline{AB} \subset \alpha \subset G_1$  (por que?). Caso  $\alpha \cap \pi \neq \emptyset$ , sejam  $H_1$  e  $H_2$  os lados da linha  $\alpha \cap \pi$  no plano  $\alpha$ . Então  $H_1 = G_1 \cap \alpha$  ou  $H_2 = G_1 \cap \alpha$  (por que?). Portanto  $\overline{AB} \subset G_1$  (por que?).

O mesmo tipo de argumento mostra que  $G_2$  também é convexo e as demais afirmações. (Façam os detalhes.)

### 2.3. POSTULADOS DE CONGRUÊNCIA:

Agora introduzimos uma noção de medida de comprimento na geometria, pela noção de congruência de segmentos, que é a relação  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  entre segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , cujas propriedades são descritas pelos postulados a seguir.

**Postulado XI:** Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$  e uma semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ , existe um único ponto  $C \in \overrightarrow{AB}$  tal que  $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$ .

**Postulado XII:** Dados  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , temos  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$  e, se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ , então  $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ .

**Postulado XIII:** Se  $A - B - C$ ,  $P - Q - R$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$ , então  $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$ .

Dados três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$ , definimos o ângulo  $\angle ABC$  como o conjunto  $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ . O ponto  $B$  é o vértice do ângulo.

Primeiro postulamos a construção de ângulos.

**Postulado XIV:** Dados o ângulo  $\angle AOB$ , uma semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$  e um dos lados  $H_1$  de  $\overrightarrow{PQ}$  num plano contendo  $\overrightarrow{PQ}$ , existe uma única semi-reta  $\overrightarrow{PR}$  tal que  $R \in H_1$  e  $\angle AOB \equiv \angle RPQ$ .

Agora comparamos ângulos.

**Postulado XV:** Dados os ângulos  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  e  $\angle GHI$ , temos  $\angle ABC \equiv \angle ABC$  e, se  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ABC \equiv \angle GHI$ , então  $\angle DEF \equiv \angle GHI$ .

**DEFINIÇÃO:** Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares  $(A, B, C)$  e  $(D, E, F)$ , dizemos que a correspondência  $A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto F$  é uma congruência de triângulos entre  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  (aqui a ordem em que aparecem os pontos é importante), se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ ,  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ ,  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ACB \equiv \angle DFE$ . Denotamos este conceito por  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  e insistimos que dizer  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  é diferente de dizer  $\triangle ACB \equiv \triangle DEF$ .

O próximo postulado é o critério Lado-Ângulo-Lado (LAL) de congruência de triângulos. No Livro I dos Elementos de Euclides, este enunciado é a Proposição IV. Sua demonstração depende de um postulado não enunciado de que duas circunferências cuja soma dos raios é menor que a distância entre os centros encontram-se em dois pontos. Ou, como é usado neste livro, dado um triângulo  $\triangle ABC$  e um segmento  $\overline{DE} \equiv \overline{AB}$ , então existe um ponto  $F$  tal que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Postulado XVI:** (LAL) Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

#### 2.4. POSTULADO DA CONTINUIDADE:

**Postulado XVII:** Dada uma linha  $\ell$ , suponha que  $X$  e  $Y$  são conjuntos não vazios de pontos de  $\ell$ , tais que  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $X \cup Y = \ell$ , e para todos os pontos  $A, B, C \in \ell$ , se  $A - B - C$  e  $A, C \in X$  então  $B \in X$  e se  $A - B - C$  e  $A, C \in Y$ , então  $B \in Y$ . Então, neste caso, existe um ponto  $O \in \ell$  e semi-retas opostas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , tais que  $A - O - B$ ,  $\text{int}(\overrightarrow{OA}) \subset X$ ,  $\text{int}(\overrightarrow{OB}) \subset Y$  e  $O \in X$  ou  $O \in Y$ .

Este postuldo tem muitas conseqüências importantes. Vamos começar com a propriedade de “arquimedianeidade”.

**Exercício 36:** Toda linha é arquimediana, ou seja, para qualquer conjunto de pontos  $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$  tais que  $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$  (para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ) de uma linha  $\ell$ , e para todo ponto  $P \in \ell$ , existe algum  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $P \in \overline{A_nA_{n+1}}$ .

Para isto, sejam  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overrightarrow{A_nA_{n-1}}$  (união de semi-retas) e  $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$  (intersecção das semi-retas opostas). Observe que  $X \cap Y = \emptyset$  e  $X \cup Y = \ell$  (por que?). Agora suponha que  $A, C \in X$  e  $A - B - C$ . Então existe alguma semi-reta  $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$  tal que  $A, C \in \overrightarrow{A_nA_{n-1}}$ . Portanto  $B \in \overrightarrow{A_nA_{n-1}}$  (por que?), ou seja,  $B \in X$ . De modo similar, mostramos que se  $A, C \in Y$  e  $A - B - C$ , então  $B \in Y$  (fa ca isto).

Suponha que  $Y \neq \emptyset$ . Pelo postuldo da continuidade, existe um ponto  $O \in \ell$  e semi-retas opostas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , tais que o interior de  $\overrightarrow{OA}$  está contido em  $X$  e o interior de  $\overrightarrow{OB}$  está contido em  $Y$  e  $O \in X$  ou  $O \in Y$ . Se  $O \in X$ , existe uma semi-reta  $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$  contendo  $O$ . Mas daí,  $A_{n+1} - O - A$ , contrário ao fato que interior de  $\overrightarrow{OA}$  está contido em  $X$  e o interior de  $\overrightarrow{OB}$  está contido em  $Y$ . Se  $O \in Y$ , seja  $C \in \ell$  tal que  $A_0 - C - O$  e  $\overline{CO} \equiv \overline{A_0A_1}$ . Como  $A_0 - C - O$ ,  $C$  está na semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  e  $C \neq O$ . Portanto  $C$  está no interior desta semi-reta, o que implica que  $C \in X$ . Portanto existe uma semi-reta  $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$  contendo  $C$ . Como  $\overline{A_nA_{n-1}} \equiv \overline{A_{n+1}A_n} \equiv \overline{A_0A_1} \equiv \overline{CO}$ , o ponto  $O$  estaria em  $\overrightarrow{A_{n+1}A_n}$ , contrário à hipótese de que  $O \in Y$  (lembre-se de que  $X \cap Y = \emptyset$ ).

Portanto  $Y$  tem que ser vazio, ou seja para todo ponto  $P \in \ell$ , existe algum  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $P \in \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ .

**Exercício 37: (Réguas)** Para cada linha  $\ell$ , existe (pelo menos) uma função bijetora  $f_\ell : \ell \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $A - B - C$  se, e somente se,  $f_\ell(B)$  está entre  $f_\ell(A)$  e  $f_\ell(C)$ , na ordem de  $\mathbb{R}$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  se, e somente se,  $|f_{AB}(B) - f_{AB}(A)| = |f_{CD}(D) - f_{CD}(C)|$ , sendo  $f_{AB}$  uma função para  $\overrightarrow{AB}$  e  $f_{CD}$  uma função para  $\overrightarrow{CD}$ . (Uma tal função  $f_\ell$  é chamada de sistema de coordenadas (ou régua graduada) da linha  $\ell$ .)

**Exercício 38: (Transferidores)** Existe uma função que associa a cada ângulo uma medida entre 0 e 180 (medida em graus), tal que ângulos congruentes têm mesma medida, ângulos retos (aqueles que são congruentes a seus suplementares) medem 90, e se  $\overrightarrow{OC}$  é a bissetriz de um ângulo  $\angle AOB$ , então  $\angle AOC$  mede a metade da medida de  $\angle AOB$ .

2.5. POSTULADO DAS PARALELAS

**Postulado XVIII:** Dado um plano  $\pi$ , uma linha  $\ell$  e um ponto  $P$  em  $\pi$ , sendo que  $P$  não está em  $\ell$ , então existe uma única linha  $\ell'$  em  $\pi$ , tal que  $P$  está em  $\ell'$  e  $\ell'$  não intersecta  $\ell$ .

A linha  $\ell'$  do postulado é dita **paralela** a  $\ell$ . Diremos que dois planos são paralelos se eles não se intersectam.

3. ÂNGULOS DIEDRAIS E TRIEDROS

3.1. PERPENDICULARES NO ESPAÇO

**Exercício 39:** Dados dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  distintos e ambos contendo a linha  $\ell$ . Sejam  $A, B \in \ell$  dois pontos distintos,  $\ell_1, \ell'_1 \subset \pi_1$  e  $\ell_2, \ell'_2 \subset \pi_2$  linhas perpendiculares a  $\ell$  e tais que  $A \in \ell_1 \cap \ell_2$  e  $B \in \ell'_1 \cap \ell'_2$ . Suponha que  $\ell_1 \perp \ell_2$ . Então  $\ell'_1 \perp \ell'_2$ .

Para isto, sejam  $C \in \ell_1$  e  $D \in \ell'_1$  do mesmo lado em relação a  $\pi_2$  e  $E \in \ell_2$  e  $F \in \ell'_2$  do mesmo lado em relação a  $\pi_1$  e tais que  $\overline{AC} \equiv \overline{BD} \equiv \overline{AE} \equiv \overline{BF}$  (veja a figura 3.)

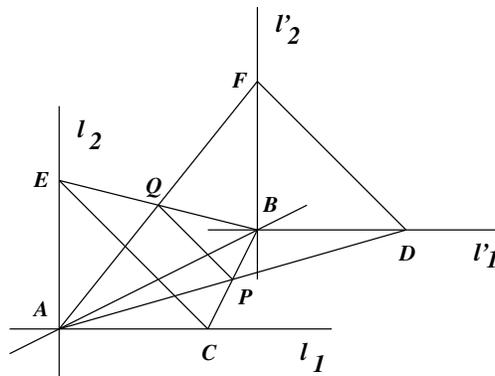


Figura 3: Construções de linhas perpendiculares.

Pelo teorema das barras transversais, os segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  cruzam-se num ponto  $P$  e os segmentos  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  cruzam-se no ponto  $Q$ . Por LAL,  $\triangle ABD \equiv \triangle BAC \equiv \triangle ABF \equiv \triangle BAE$  e  $\triangle APB \equiv \triangle BPA \equiv \triangle AQB \equiv \triangle BQA$ . Consequentemente, por LLL,  $\triangle APQ \equiv \triangle BPQ$ . Daí, segue por LAL que  $\triangle ADF \equiv \triangle BCE$ . Finalmente, por LLL,  $\triangle ACE \equiv \triangle BDF$ , ou seja,  $\ell'_1 \perp \ell'_2$ .

**Exercício 40:** Use o mesmo argumento desta demonstração para mostrar que  $\angle CAE \equiv \angle DBF$ , sem necessariamente supor que  $l_1 \perp l_2$  como no exercício anterior.

**DEFINIÇÃO:** No exercício acima, se  $\angle CAE$  é reto ou agudo, dizemos que este é o ângulo entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Caso seja obtuso, dizemos que seu suplementar é o ângulo entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Dados dois semiplanos distintos que se encontram na linha  $l$ , chamamos tal conjunto de **ângulo diedral**, e se  $\angle CAE$  está contido neles, definimos como sua medida, a medida de  $\angle CAE$ .

### 3.2. PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS E PLANOS

**Exercício 41:** Sejam  $l_1$  e  $l_2$  duas linhas distintas, contidas num plano  $\pi$  e concorrentes num ponto  $P$ . Se  $l_3 \perp l_1$  e  $l_3 \perp l_2$ , então  $l_3 \perp l$ , para toda linha  $l \subset \pi$  contendo o ponto  $P$ .

Para isto, seja  $l \subset \pi$  contendo o ponto  $P$ , distinta de  $l_1$  e  $l_2$ . Sejam  $A \in l_1$  e  $B \in l_2$  em lados opostos de  $\pi$  em relação a  $l$  e tais que  $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ . Sejam  $D, E \in l_3$ , tais que  $D-P-E$  e  $\overline{DP} \equiv \overline{EP}$ . Seja  $C \in l \cap \overline{AB}$  (que existe pelo teorema das barras transversais. (Veja a figura 4.)

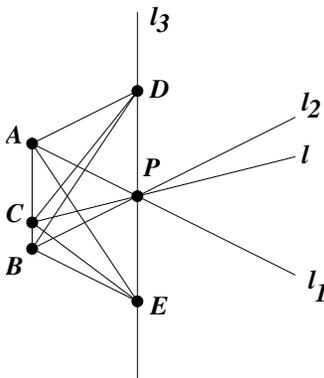


Figura 4: Linhas perpendiculares ao plano.

Por LAL,  $\triangle APD \equiv \triangle BPD \equiv \triangle APE \equiv \triangle BPE$ , donde segue por LLL que  $\triangle ABD \equiv \triangle ABE$ . Por LAL,  $\triangle ACD \equiv \triangle ACE$  e, por LLL,  $\triangle CPD \equiv \triangle CPE$ . Isto implica que  $\angle CPD$  é reto, ou seja,  $l_3 \perp l$ .

**DEFINIÇÃO:** No caso em que uma linha  $l_3 \perp l$  para toda  $l \subset \pi$  concorrente com  $l_3$ , dizemos que  $l_3$  é perpendicular ao plano  $\pi$  e denotamos  $l_3 \perp \pi$ .

**Exercício 42:** Mostre que se  $\pi_1 \cap \pi_2 = l$  e  $l' \subset \pi_2$ ,  $l' \perp \pi_1$ , então toda  $l_1 \subset \pi_2$ , se  $l_1 \perp l$ , então  $l_1 \perp \pi_1$ .

**DEFINIÇÃO:** Se o plano  $\pi_1$  contém uma linha  $l$  perpendicular ao plano  $\pi_2$ , dizemos que os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são perpendiculares e denotamos  $\pi_1 \perp \pi_2$ .

**Exercício 43:** Mostre que se  $\pi_1 \perp \pi_2$  então  $\pi_2 \perp \pi_1$ . (Isto é, mostre que se  $\pi_1$  contém uma linha  $l_1 \perp \pi_2$ , então  $\pi_2$  contém uma linha  $l_2 \perp \pi_1$ .)

**Exercício 44:** Dados um plano  $\pi$  e um ponto  $P \in \pi$ , existe uma linha  $l \perp \pi$  com  $P \in l$ .

Para isto, seja  $\pi_1$  um plano distinto de  $\pi$  e contendo o ponto  $P$ . Sejam  $l_1 = \pi \cap \pi_1$ ,  $l_2 \subset \pi$ , tal que  $P \in l_2$  e  $l_2 \perp l_1$  e  $l_3 \subset \pi_1$ , tal que  $l_3 \perp l_1$  e  $P \in l_3$ . Seja  $\pi_2$  o plano contendo  $l_2$  e  $l_3$ . (Veja a figura 5 (a).) Então  $\pi_2 \perp \pi$  (por que?). Seja  $l \subset \pi_2$ , tal que  $l \perp l_2$ . Então  $l \perp \pi$  (por que?).

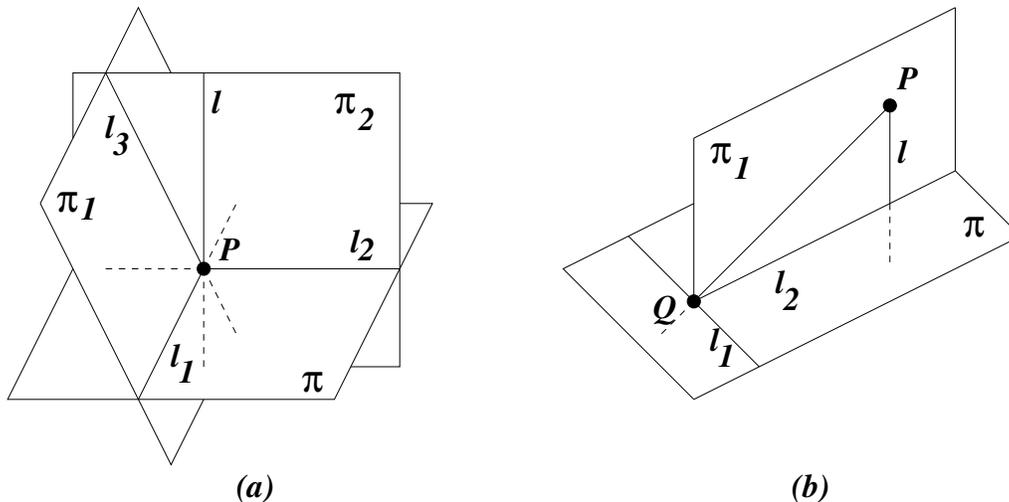


Figura 5: Linha perpendiculares ao plano  $\pi$  passando por  $P$ : (a)  $P \in \pi$ ; (b)  $P \notin \pi$ .

**Exercício 45:** Dados um plano  $\pi$  e um ponto  $P \notin \pi$ , existe uma linha  $l \perp \pi$  com  $P \in l$ .

Para isto, seja  $Q \in \pi$  um ponto qualquer. Se  $\overleftrightarrow{PQ} \not\perp \pi$ , seja  $l_1 \subset \pi$ , tal que  $l_1 \perp \overleftrightarrow{PQ}$  e  $Q \in l_1$ . Seja  $l_2 \subset \pi$ , tal que  $Q \in l_2$  e  $l_2 \perp l_1$ . Seja  $\pi_1$  o plano contendo  $l_2$  e  $\overleftrightarrow{PQ}$ . (Veja a figura 5 (b).) Então  $l_1 \perp \pi_1$  e, portanto,  $\pi_1 \perp \pi$ . Portanto a linha  $l \subset \pi_1$ , tal que  $P \in l$  e  $l \perp l_2$  é perpendicular ao plano  $\pi$  (por que?).

**Exercício 46:** Mostre que se duas linhas distintas  $l_1$  e  $l_2$  são perpendiculares a um plano  $\pi$ , então elas são coplanares. (Para isto, mostre que  $l_2$  está no plano determinado por  $l_1$  e o ponto de encontro entre  $l_2$  e  $\pi$ ; observe que este plano é perpendicular a  $\pi$ .)

**Exercício 47:** Mostre que se duas linhas distintas  $l_1$  e  $l_2$  são perpendiculares a um plano  $\pi$ , então elas são paralelas.

**Exercício 48:** Dados três planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  e linha  $l$ , tais que  $\pi_1 \perp \pi_3 \perp \pi_2$  e  $l = \pi_1 \cap \pi_2$ , mostre que  $l \perp \pi_3$ .

**Exercício 49:** Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma linha são paralelos (não se intersectam).

**Exercício 50:** Dado um plano  $\pi$  e um ponto  $P$  fora de  $\pi$ , existe um único plano  $\alpha$  contendo  $P$  e paralelo a  $\pi$ .

**Exercício 51:** Dados dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ , se a linha  $\ell \perp \alpha$ , então  $\ell \perp \beta$ .

**Exercício 52:** Dois ângulos não coplanares, cujos lados são paralelos e na mesma direção (o que significa isto?), então os planos que os contêm são paralelos.

**Exercício 53:** Duas retas no espaço são chamadas de **retas reversas** se elas não são coplanares. Mostre que elas não se intersectam e não são paralelas.

**Exercício 54:** Dadas duas retas reversas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , mostre que existe um plano contendo uma delas e paralelo à outra.

Para isto, justifique e complete as asserções a seguir. Escolha um ponto numa delas e trace por ele uma paralela à outra.

**Exercício 55:** No exercício anterior, mostre que o par de planos obtido é único.

**Exercício 56:** Dadas duas retas reversas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , mostre que existe uma única reta  $\ell_3$  perpendicular a ambas.

Para isto, justifique e complete as asserções a seguir. Obtenha o par de planos  $\pi_i$  contendo  $\ell_i$  e paralelo a  $\ell_j$ ,  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$ , do exercício anterior. Obtenha para cada  $\ell_i$  um plano  $\alpha_i$  que a contenha e que seja perpendicular ao plano  $\pi_j$ ,  $i \neq j$ . Mostre que a reta desejada é a intersecção de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  (por que se encontram?).

Dados um plano  $\pi$  e uma reta  $r$  fora de  $\pi$ , mas com um ponto  $P$  em comum, definimos o ângulo entre  $r$  e  $\pi$  como sendo o menor ângulo entre  $r$  e retas  $s$  em  $\pi$  contendo  $P$ .

**Exercício 57:** Dados um plano  $\pi$  e uma reta  $r$  fora de  $\pi$ , mas com um ponto  $P$  em comum, mostre que se  $r$  não for perpendicular a  $\pi$ , então existe uma única reta  $s$  em  $\pi$ , perpendicular a  $r$ . (Para isto, escolha um ponto  $A \in r$ , fora de  $\pi$  e desça uma perpendicular de  $A$  a  $\pi$ ; seja  $Q \in \pi$  o pé desta perpendicular; seja  $s \in \pi$ ,  $s \perp \overleftrightarrow{AP}$ , etc.)

**Exercício 58:** Com as notações e hipóteses do exercício anterior, mostre que o ângulo entre  $r$  e  $\pi$  é  $\angle AQP$ .

### 3.3. TRIEDROS E ÂNGULOS POLIEDRAIS

Dado um polígono convexo  $A_1 \dots A_n$  num plano  $\pi$  e um ponto  $P$  fora de  $\pi$ , o conjunto dos pontos das semi-retas  $\overrightarrow{PQ}$  com  $Q$  no polígono é chamado de **ângulo poliedral** e é denotado por  $\angle P - A_1 \dots A_n$ . No caso do polígono ser um triângulo, chamamos a figura de **triedro**. Cada parte plana de um ângulo poliedral é chamada de **face**, que consiste do conjunto  $\angle A_i P A_{i+1}$  junto com seu interior, e o ângulo de vértice em  $P$  nesta face,  $\angle A_i P A_{i+1}$ , é chamado **ângulo da face**.

**Exercício 59:** Mostre que a soma de dois ângulos de face de um ângulo triedral  $\angle P - ABC$  é maior do que o terceiro.

Para isto, justifique e complete cada uma das asserções seguintes. Podemos supor que  $\angle AOC > \angle AOB$  e  $\angle AOC > \angle BOC$ . No interior de  $\angle AOC$  existe um ponto  $D$ , tal que  $\angle AOD \equiv \angle AOB$ . Podemos supor que  $D \in \overline{AC}$  e que  $\overline{OB} \equiv \overline{OD}$ . Daí,  $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$ . Portanto,  $BC > DC$ , donde segue que  $\angle BOC > \angle DOC$ , etc.

**Exercício 60:** Mostre que a soma de  $n-1$  ângulos de face de um ângulo poliedral  $\angle P - A_1 \dots A_n$  é maior do que o  $n$ -ésimo.

**Exercício 61:** Seja  $A_1 \dots A_n$  um polígono convexo num plano  $\pi$  e  $P$  um ponto fora de  $\pi$ . Mostre que a soma dos ângulos das faces do ângulo poliedral  $\angle P - A_1 \dots A_n$  é menor do que 360.

Para isto, justifique e complete as asserções a seguir. Considere primeiro um triedro  $\angle O - ABC$ ; tome  $X$  um ponto no interior do  $\triangle ABC$  e conclua que  $\angle CAX + \angle XAB = \angle CAB < \angle CAO + \angle OAB$ ,  $\angle ABX + \angle XBC = \angle ABC < \angle ABO + \angle OBC$ , etc. A soma dos ângulos dos triângulos de vértice  $O$  e outros vértices  $A, B$  ou  $C$  é a mesma que a soma dos ângulos dos triângulos de vértice  $X$  e outros vértices  $A, B$  ou  $C$ . A soma dos ângulos de vértice  $O$  é menor que a soma dos ângulos de vértice  $X$ , que é 360.

**Exercício 62:** Mostre que dados números reais positivos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , tais que  $\sum \alpha_i < 360$  e cada  $\alpha_j$  é menor do que a soma dos outros  $\alpha_k, k \neq j$ , então existe ângulo poliedral de ângulos de faces medindo  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Os exercícios anteriores mostraram que estas condições são necessárias para a existência (isto é, se existir tal ângulo poliedral, então os ângulos de face têm que satisfazer as restrições). Agora estamos afirmando que estas condições também são suficientes para a existência (ou seja, basta ter as condições para que exista tal figura). Reduza o problema à existência de um polígono conveniente.

**Exercício 63:** Sejam  $\angle O - ABC$  e  $P - DEF$  dois ângulos triedrais, tais que  $\angle AOB \equiv \angle PDE$ ,  $\angle BOC \equiv \angle PEF$  e  $\angle COA \equiv \angle PFD$ . Mostre que os ângulos diedrais das faces correspondentes são também os mesmos.

Para isto, construa figuras congruentes para a comparação dos ângulos pertinentes.

## 4. POLIEDROS

### 4.1. INTRODUÇÃO - VOLUME

**Definições:** Dados quatro pontos não coplanares  $A, B, C$  e  $D$ , o **tetraedro**  $ABCD$  é um conjunto dos pontos contidos nas regiões triangulares  $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD$  ou  $\triangle BCD$ , cada uma das quais é chamada de **face**, cada segmento  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AD}, \overline{BD}$  e  $\overline{CD}$  é chamado de **aresta**, e cada ponto  $A, B, C$ , ou  $D$  é chamado de **vértice**. O interior do tetraedro  $ABCD$  é o conjunto dos pontos contidos na intersecção dos semiespaços determinados pelos planos das faces  $\triangle ABC$ , contendo o vértice  $D$ ;  $\triangle ABD$ , contendo o vértice  $C$ ;  $\triangle ACD$ , contendo o vértice  $B$  e  $\triangle BCD$ ,

contendo o vértice  $A$ . O **simplexo**  $ABCD$  é o conjunto dos pontos do tetraedro  $ABCD$  e de seu interior. (É melhor chamar isto de simplexo, que é um termo técnico que significa isto, do que *região tetraedral!*)

Uma **região poliedral** é a união de simplexos  $S_1, \dots, S_n$ , tais que seus interiores são disjuntos e se  $S_i$  intersecta  $S_j$ ,  $i \neq j$ , esta intersecção é um vértice, aresta ou face comum. O conjunto  $\{S_1, \dots, S_n\}$  é chamado também de **triangulação** de  $R$ . Um ponto  $P \in R$  é um **ponto interior** de  $R$  se existe um tetraedro  $ABCD$  tal que  $P$  está no interior deste tetraedro e o simplexo  $ABCD$  está contido em  $R$ . Um ponto  $P \in R$  é um **ponto de fronteira** se não for um ponto interior de  $R$ . A **fronteira** de uma região poliedral  $R$  é o conjunto de seus pontos de fronteira.

Um **poliedro** é a fronteira de uma região poliedral convexa. Um **cubo** é um poliedro cujas seis faces são quadrados, um **paralelepípedo** é um poliedro cujas seis faces são paralelogramos, contidos em planos dois a dois paralelos.

**Exercício 64:** Mostre que um poliedro é a união de regiões poligonais convexas não coplanares. Estas são chamadas as **faces** do poliedro. As arestas e vértices dos polígonos que determinam estas faces são as arestas e vértices do poliedro. (Observe que as faces de um poliedro são uniões de regiões triangulares.)

**Exercício 65:** Mostre que num poliedro, cada vértice pertence a pelo menos três faces.

Definimos **volume** de uma região poliedral como a quantidade de frações (e aproximações) de uma figura padrão de volume 1 (por exemplo, podemos usar um cubo de lado 1 como figura padrão de volume 1) que estão contidas no interior do sólido em questão, como fizemos para área.

**Exercício 66:** Mostre que um cubo de lado  $a$  tem volume  $a^3$ . Para isto, considere o caso em que  $a$  é um número racional e depois o caso em que  $a$  é irracional.

Para o cálculo de volumes dos vários sólidos, usaremos o **Princípio de Cavalieri**. Este princípio permite-nos calcular volumes de figuras a partir de volumes conhecidos. Arquimedes já usava casos particulares deste princípio. Seu enunciado diz que dados dois sólidos  $R_1, R_2$ , e um plano  $\pi$ , tais que, para todo plano  $\alpha$  paralelo a  $\pi$ , a área da intersecção de  $\alpha$  com  $R_1$  é igual à área da intersecção de  $\alpha$  com  $R_2$ , então os volumes de  $R_1$  e  $R_2$  são iguais. Ele pode ser justificado usando-se aproximações por cubos internos ao sólido. Faremos isto caso a caso.

#### 4.2. POLIEDROS REGULARES

Um poliedro é dito **regular** se todas as suas faces são congruentes a um polígono regular e cujos ângulos poliedrais são todos congruentes entre si.

**Exercício 67:** Mostre que tal polígono só pode ser ou um triângulo equilátero (com 3, 4 ou 5 triângulos no mesmo vértice), um quadrado (3 no mesmo vértice), ou um pentágono (3 no mesmo vértice). Para isto, calcule as somas dos ângulos de face em cada vértice. Lembre-se que os ângulos internos de um pentágono medem  $108^\circ$ .

**Exercício 68:** Mostre também que as possibilidades são tetraedro (4 faces), octaedro (8 faces) e icosaedro (20 faces) para face triangular, cubo (6 faces) para face quadrada e dodecaedro (12 faces) para face pentagonal. Faça um modelo em papel de cada um deles. (Veja a figura 6.)

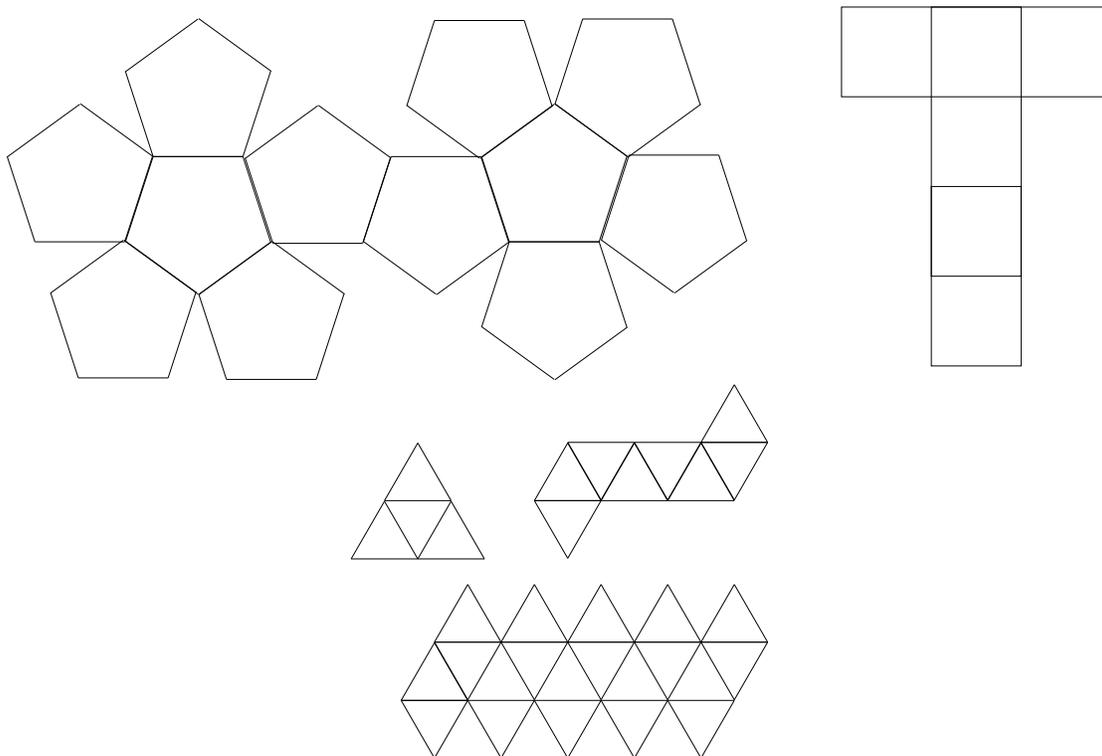


Figura 6: Planificações dos poliedros regulares.

**Exercício 69:** Calcule os cossenos dos ângulos diedrais de cada poliedro regular.

**Exercício 70:** Mostre que num poliedro regular, se  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, então  $V - A + F = 2$ . (Faça a contagem caso a caso.)

### 4.3. PRISMAS

Dadas uma linha poligonal  $A_1 \dots A_n$  num plano  $\pi$  e uma reta  $r$  fora de  $\pi$ , mas contendo algum ponto da linha poligonal, a **superfície prismática** determinada por  $r$  e  $A_1 \dots A_n$  é o conjunto dos pontos contidos em todas as retas paralelas a  $r$  e que contenham um ponto de  $A_1 \dots A_n$ . Se  $A_1 \dots A_n$  for um polígono convexo, chamamos a superfície prismática de convexa.

**Exercício 71:** Dada uma superfície prismática convexa determinada por  $r$  e  $A_1 \dots A_n$ , e dados dois planos paralelos entre si  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , que não sejam paralelos a  $r$ , mostre que eles intersectam a superfície prismática em (dois) polígonos convexos de  $n$  lados,  $A'_1 \dots A'_n$  e  $A''_1 \dots A''_n$ , congruentes entre si. Mostre também que os quadriláteros  $A'_i A'_{i+1} A''_{i+1} A''_i$  são paralelogramos.

Um **prisma** é um poliedro formado quando dois planos paralelos intersectam uma superfície prismática como no exercício. As faces determinadas pelos polígonos  $A'_1 \dots A'_n$  e  $A''_1 \dots A''_n$  são chamadas de **bases** e os paralelogramos  $A'_i A'_{i+1} A''_{i+1} A''_i$  são chamados de **faces laterais**. As arestas de um prisma que não pertençam às bases são chamadas de **arestas laterais**. Um prisma é chamado de **prisma reto** se as faces laterais forem perpendiculares às bases; caso contrário, é chamado de **prisma oblíquo**. Um prisma cuja base seja um polígono regular é chamado de **prisma regular**. Um prisma cuja base seja um paralelogramo é chamado de **paralelepípedo**.

**Exercício 72:** Mostre que num prisma, se  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, então  $V - A + F = 2$ .

**Exercício 73:** Mostre que todas as arestas laterais de um prisma são congruentes.

**Exercício 74:** Mostre que faces laterais opostas de um paralelepípedo são congruentes.

**Exercício 75:** Mostre que as diagonais de um paralelepípedo (segmentos ligando um vértice de uma base a outro da face oposta, passando pelo interior dele).

**Exercício 76:** Mostre que quaisquer duas diagonais de um paralelepípedo intersectam-se em seus pontos médios.

**Exercício 77:** As diagonais de um cubo são perpendiculares entre si?

**Exercício 78:** Sejam  $ABCD$  e  $EFGH$  as bases de um paralelepípedo, tais que suas arestas laterais sejam os segmentos  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{CG}$  e  $\overline{DH}$ . Mostre que a correspondência  $A \mapsto G$ ,  $B \mapsto H$ ,  $C \mapsto E$  e  $D \mapsto F$  determina uma congruência do paralelepípedo com ele mesmo.

**Exercício 79:** Mostre que a área lateral de um prisma (isto é, a soma das áreas das faces laterais) é igual ao perímetro do polígono determinado por uma seção perpendicular às arestas laterais vezes o comprimento de uma destas arestas. (Veja a figura 7.)

**Exercício 80:** Dado um prisma oblíquo, mostre que ele tem o mesmo volume que um prisma reto de arestas laterais congruentes às do prisma oblíquo e cuja base é congruente a uma seção transversal perpendicular da superfície prismática que o define. (Veja a figura 7, em que descrevemos o processo no caso de um prisma de base triangular.)

**Exercício 81:** Mostre que o volume de um paralelepípedo reto de base retangular é igual à área da base vezes a altura (que neste caso é igual à medida das arestas laterais).

**Exercício 82:** Mostre que o volume de um paralelepípedo reto de base um triângulo retângulo é igual à área da base vezes a altura. (Reduza ao caso anterior.)

**Exercício 83:** Mostre que o volume de um paralelepípedo reto de base triangular é igual à área da base vezes a altura. (Reduza ao caso anterior, triangulando a base, etc.)

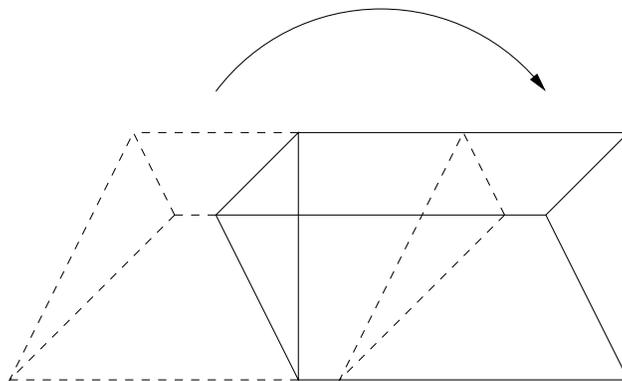


Figura 7: Construindo prisma reto de um oblíquo.

**Exercício 84:** Mostre que o volume de um paralelepípedo oblíquo é igual à área da base vezes a altura. (Construa um paralelepípedo reto, de mesma base e depois transforme-o num paralelepípedo reto de base retangular, etc.)

**Exercício 85:** Mostre que o volume de um paralelepípedo oblíquo de base triangular é igual à área da base vezes a altura. (Reduza ao caso anterior.)

**Exercício 86:** Mostre que o volume de um paralelepípedo reto ou oblíquo, de base qualquer, é igual à área da base vezes a altura. (Reduza ao caso anterior.)

**Exercício 87:** Calcule o volume de um prisma cuja base tem área 2, aresta lateral medindo 3 e o ângulo entre as arestas laterais e o plano da base é  $60^\circ$ .

#### 4.4. PIRÂMIDES

Dados um polígono convexo  $A_1 \dots A_n$  num plano  $\pi$  e um ponto  $P$  fora de  $\pi$ , a **pirâmide**  $PA_1 \dots A_n$  é o conjunto dos pontos do ângulo poliedral  $\angle P - A_1 \dots A_n$  entre  $P$  e  $\pi$ , junto com os pontos do interior do polígono  $A_1 \dots A_n$ . Os conjuntos  $\triangle PA_i A_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  e  $\triangle PA_n A_1$  são chamados de **faces laterais** e o conjunto composto pelo polígono  $A_1 \dots A_n$  e seu interior é chamado de **base** da pirâmide. Os pontos  $P, A_1, \dots, A_n$  são chamados de **vértices** e os segmentos  $\overline{PA_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\overline{A_i A_{i+1}}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , e  $\overline{A_1 A_n}$  são chamados de **arestas** da pirâmide.

Um tetraedro é uma pirâmide de base triangular. O a medida do segmento  $\overline{PQ}$ ,  $Q \in \pi$  e  $\overline{PQ} \perp \pi$ , é chamada de **altura** da pirâmide.

Como já determinamos os volumes dos prismas, usaremos prismas para aproximar os volumes das pirâmides. Para isto, escolha uma das arestas  $\overline{PA_i}$ , subdivida-a em segmentos de mesmo tamanho e, em cada ponto destes segmentos trace um plano paralelo ao plano da base; nos pontos em que estes planos encontrarem outras arestas, trace retas paralelas à aresta original. Assim construímos uma pilha de prismas, dentro ou fora da pirâmide. Na figura 8 mostramos esta construção no caso de um tetraedro.

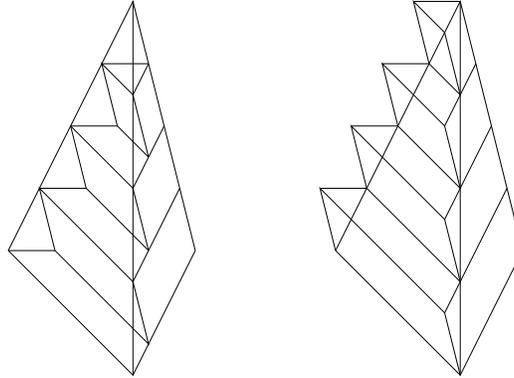


Figura 8: Construindo prismas dentro e fora da pirâmide.

**Exercício 88:** Mostre que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Para isto, calcule  $(n + 1)^3 - 1 = 3[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + 3[1 + 2 + \dots + n] + n$ , assim (observe os cancelamentos do lado esquerdo das equações):

linha 1:	$2^3 - 1^3$	$=$	$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
linha 2:	$3^3 - 2^3$	$=$	$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
linha 3:	$4^3 - 3^3$	$=$	$3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha n:	$(n + 1)^3 - n^3$	$=$	$3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$
soma:	$(n + 1)^3 - 1^3$	$=$	$3 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + 3 \cdot [1 + 2 + \dots + n] + n$

**Exercício 89:** Dada a pirâmide  $PABC$  de base triangular  $\triangle ABC$ , seja  $Q$  no plano  $ABC$ , tal que  $\overline{PQ}$  seja perpendicular ao plano  $ABC$ . Sejam  $n > 0$ ,  $P_0 = P$ ,  $P_n = Q$  e  $P_i \in \overline{PQ}$  tais que  $P_{i-1} - P_i - P_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , e  $\overline{P_i P_{i+1}} \equiv \overline{P_0 P_1}$  (ou seja, subdividimos o segmento  $\overline{PQ}$ , cuja medida é a altura da pirâmide, em  $n$  segmentos congruentes). Seja  $T_i$  o triângulo obtido pela intersecção do plano paralela à base  $ABC$  e passando pelo ponto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (observe que  $T_n$  é o triângulo da base). Seja  $A_i$  a área do triângulo  $T_i$ . Mostre que  $A_i/A_n = (i/n)^2$ , por semelhança de triângulos convenientes.

**Exercício 90:** Use os dois exercícios anteriores para mostrar que o volume de uma pirâmide, de altura  $h$  e área da base  $A$ , é igual a  $A \cdot h/3$ .

Para isto, faça a construção indicada na figura 8, obtendo prismas por dentro e por fora da pirâmide. Veja que a soma dos volumes dos prismas de fora, o da pirâmide (indicado com a letra  $V$ ), e a soma dos volumes dos prismas de dentro satisfazem as desigualdades

$$A \cdot h \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = A \cdot h \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \leq V \leq A \cdot h \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = A \cdot h \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$$

**Exercício 91:** Calcule o volume do tetraedro  $ABCD$ , cujas arestas medem todas o mesmo valor  $r > 0$ .

**Exercício 92:** Calcule o volume de uma pirâmide de base um paralelogramo, cujas diagonais medem 1 e 2, e altura 5. (Resposta: 5.)

**Exercício 93:** Calcule o volume de um tetraedro  $ABCD$  cujas arestas medem  $AB = AC = 13$ ,  $BC = 24$ ,  $AD = BD = CD = 15$ . (Resposta: 714.)

**Exercício 94:** Um **tronco de pirâmide** é o sólido obtido cortando-se um pirâmide  $PA_1 \dots A_n$  por um plano paralelo à base  $A_1 \dots A_n$ , e entre a base e o vértice  $P$ . Deste modo, esta figura terá duas bases. Determine uma fórmula para o volume do tronco de uma pirâmide, dependendo das áreas das duas bases e de sua altura. (Resposta:  $(A + B) \cdot h/3$ ,  $A$  e  $B$  são as áreas das bases.)

**Exercício 95:** Mostre o princípio de Cavalieri para pirâmides e prismas. Considere somente planos paralelos à base.

**Exercício 96:** Dado o tetraedro  $ABCD$ , trace um plano perpendicular a cada aresta, passando pelo ponto médio da aresta. Mostre que todos estes planos têm um (único) ponto em comum  $P$  e que  $\overline{PA} \equiv \overline{PB} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{PD}$ .

Esta é a generalização para o espaço do circuncentro de um triângulo. Comece achando o circuncentro  $M$  do  $\triangle ABC$ . Trace uma reta  $r$  perpendicular ao plano  $ABC$ , passando por  $M$ . Trace o plano perpendicular à aresta  $\overline{AD}$ , passando por seu ponto médio. Mostre que este plano encontra a reta  $r$  num ponto  $P$ . Por congruências de triângulos convenientes, conclua que  $P$  é o ponto procurado.

**Exercício 97:** Dado o tetraedro  $ABCD$ , trace um plano bissetor a cada ângulo diedral (o que é isto?). Mostre que estes planos bissetores encontram-se num ponto  $Q$  no interior do tetraedro, que é equidistante das faces do tetraedro.

Esta é a generalização para o espaço do incentro de um triângulo. Mostre, por exemplo, que o plano bissetor do ângulo diedral determinado pelas faces  $ABC$  e  $ABD$ , é determinado pelas bissetrizes dos ângulos  $\angle CAD$  e  $\angle CBD$ . (Veja a figura 9.)

Mostre que todo ponto de um plano bissetor é equidistante das faces do ângulo diedral. Mostre que dois planos bissetores do tetraedro encontram-se numa linha; que três encontram-se num ponto e mostre que este ponto é equidistante das faces; e que, portanto, o quarto plano bissetor também passa por este ponto.

**Exercício 98:** Num triângulo, podemos traçar as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, e também a dos ângulos suplementares dos ângulos internos. Com isto, obtemos além do incentro, mais três pontos equidistantes das retas que suportam os lados do triângulo. Qual é o resultado análogo no caso do tetraedro?

**Exercício 99:** Mostre que numa pirâmide, se  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, então  $V - A + F = 2$ .

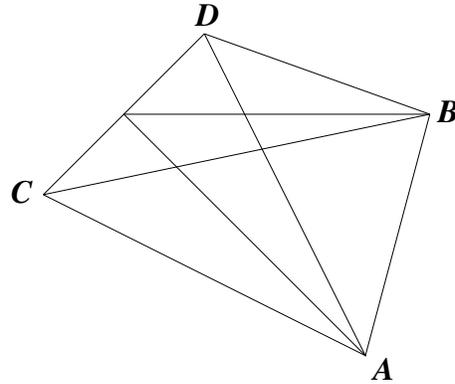


Figura 9: Plano bissetor de um ângulo diedral.

**Exercício 100:** Mostre que num poliedro qualquer, se  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, então  $V - A + F = 2$ . (Para isto, escolha um vértice  $P$  qualquer do poliedro e conte o número de vértices, arestas e faces das várias pirâmides obtidas ligando-se  $P$  aos outros vértices do poliedro. Observe o que acontece com tais números se você encosta uma pirâmide num poliedro: você perde uma face de cada e duas arestas (dois vértices) coincidem, etc.)

#### 4.5. SÓLIDOS EQUIDECOMPONÍVEIS

Dizemos que dois tetraedros  $ABCD$  e  $EFGH$  são **congruentes** se existir uma associação entre vértices respectivos, digamos  $A \mapsto E$ ,  $B \mapsto F$ ,  $C \mapsto G$  e  $D \mapsto H$ , tal que  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ ,  $\triangle ABD \equiv \triangle EFH$ ,  $\triangle ACD \equiv \triangle EGH$  e  $\triangle BCD \equiv \triangle FGH$ . Neste caso, diremos que os simplexos determinados pelos tetraedros também são congruentes.

Dizemos que duas regiões polidrais  $R_1$  e  $R_2$  são **equidecomponíveis** se existirem triangulações  $T = \{T_1, \dots, T_n\}$  de  $R_1$  e  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$  de  $R_2$ , tais que cada  $T_i$  é congruente a  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

David Hilbert propôs em 1900 o problema de se provar que todos os sólidos (polidrais) de mesmo volume são equidecomponíveis, em analogia ao caso do plano. Mas em 1901, Max Dehn descobriu que isto nem sempre é verdade.

Vamos mostrar que no espaço, existem dois tetraedros de mesmo volume, mas que não são equidecomponíveis. Tais tetraedros têm mesma base e mesma altura.

**Exercício 101: (Lema de Dehn)** Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ , e  $0 < \theta < \pi/2$ , tal que  $\cos \theta = 1/n$ . Mostre que  $\theta$  não é múltiplo racional de  $\pi$ .

Para isto, lembre-se de que  $\cos[(k \pm 1)\theta] = \cos k\theta \cos \theta \mp \sin k\theta \sin \theta$ . Daí,  $\cos(k+1)\theta = 2 \cos k\theta \cos \theta - \cos(k-1)\theta$ . Substituindo  $\cos \theta = 1/n$  (da hipótese), temos

$$\cos k\theta = (2/n) \cos(k-1)\theta - \cos(k-2)\theta, \quad k \geq 2.$$

Se  $\theta$  fosse múltiplo racional de  $\pi$ , digamos  $\theta = m\pi/n$ ,  $m, p \in \mathbb{N}$ ,  $m, p \neq 0$ , então, para  $k = p$ ,  $\cos k\theta = \cos m\pi = \pm 1$ . Por isso, para terminar, basta mostrar que para este  $\theta$ ,  $\cos k\theta \neq \pm 1$ ,

para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$ . Temos  $\cos \theta = 1/n$ ,  $\cos 2\theta = (2/n)\cos \theta - \cos 0 = (2 - n^2)/n^2$ . O numerador é estritamente menor do que o denominador (em valores absolutos), portanto não é  $\pm 1$ ;  $\cos 3\theta = (2/n)\cos 2\theta - \cos \theta = (4 - 3n^2)/n^3$ , que não é número inteiro (justifique: considere os casos em que  $n$  é ímpar ou par; olhe os divisores primos de  $n$ ). Tente achar uma forma indutiva de terminar este raciocínio.

Dizemos que os números reais  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  são **linearmente dependentes** se existem números inteiros  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , nem todos nulos, tais que  $\sum_i a_i x_i = 0$ . Por exemplo  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = (1 + \sqrt{5})/2$ ,  $x_3 = (1 - \sqrt{5})/2$  são linearmente dependentes, pois se  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_3 = -1$ ,  $\sum_1^3 a_i x_i = 0$ .

Seja  $X \subseteq \mathbb{R}$  um conjunto não vazio, tal que se  $a, b \in X$ , então  $a + b, a - b \in X$ ; uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de **função aditiva** se, para todos  $a, b \in X$ ,  $f(a + b) = f(a) + f(b)$ . Por exemplo, a função  $f(x) = cx$ ,  $c \in \mathbb{R}$  constante, é aditiva.

Dada uma função aditiva  $f$ , tal que  $f(\pi) = 0$ , e um poliedro  $\mathcal{A} = A_1 \dots A_t$ , sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  as medidas em radianos dos ângulos diedrais e  $l_1, \dots, l_n$  os comprimentos das arestas correspondentes. Seja  $F_f(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n l_i f(\alpha_i)$ .

**Exercício 102:** Suponha que a região poliedral  $\mathcal{A}$  seja decomposta como a união de duas regiões poliedrais  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  (isto é,  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ , e  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  tenham interiores disjuntos). Então  $F_f(\mathcal{A}) = F_f(\mathcal{B}) + F_f(\mathcal{C})$ .

Para isto, sobre as arestas de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ , marcar todos os seus vértices. Isto divide as arestas em segmentos que não contêm nenhum vértice em seus interiores. Chamaremos tais segmentos de ligações. Podem existir tais ligações nas arestas, nas faces e no interior de  $\mathcal{A}$ . Observe que a soma dos ângulos diedrais adjacentes a uma ligação contida numa aresta de  $\mathcal{A}$  é o ângulo diedral de  $\mathcal{A}$  correspondente à aresta; a soma dos ângulos diedrais adjacentes a uma ligação contida numa face de  $\mathcal{A}$  é  $\pi$  e a soma dos ângulos diedrais adjacentes a uma ligação contida no interior de  $\mathcal{A}$  é  $2\pi$ . Com estas observações, termine o raciocínio. Desenhe exemplos de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  em que ocorrem todos estes tipos de ligações.

**Exercício 103:** (Teorema de Hadwiger) Dados duas regiões poliedrais  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$ , se existir uma função aditiva  $f$ , tal que  $f(\pi) = 0$  e  $F_f(\mathcal{A}_1) \neq F_f(\mathcal{A}_2)$ , então  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  não são equidecomponíveis.

Suponha que são equidecomponíveis, e conclua que  $F_f(\mathcal{A}_1) = F_f(\mathcal{A}_2)$

**Exercício 104:** (Teorema de Dehn) Mostre que um cubo e um tetraedro regular de mesmo volume não são equidecomponíveis.

Para isto, mostre que se  $\alpha$  é a medida dos ângulos diedrais do tetraedro, então  $\cos \alpha = 1/3$ ; seja  $f$  aditiva, tal que  $f(\alpha) \neq 0$  e  $f(\pi) = 0$ ;  $f$  existe, pois  $\alpha$  e  $\pi$  não são linearmente dependentes (por que?).

**Exercício 105:** Tente obter dois tetraedros  $ABCD$  e  $ACBE$  de mesma base e mesma altura (e, portanto, mesmo volume), mas que não sejam equidecomponíveis. (Sugestão: use  $\overline{AB} \perp \overline{AC}$  e  $\overline{BD} \perp \overline{ABC}$ , etc.)

**Nota:** Consulte o livro “Figuras equivalentes e equicompostas” de V. G. Boltijanskii, (traduzido por Seiji Hariki, editora Atual, São Paulo, 1996) para maiores detalhes sobre este tópico.

## 5. CILINDROS E ESFERAS

### 5.1. CILINDROS

**Definições:** Dada uma circunferência  $\mathcal{C}$  num plano  $\pi$  e uma reta  $r$  fora de  $\pi$ , e não paralela a  $\pi$ , a **superfície cilíndrica**  $S$  determinada por  $\mathcal{C}$  e  $r$  é o conjunto dos pontos em todas as retas  $s$  paralelas a  $r$  e que contenham um ponto de  $\pi$ .

A reta que passa pelo centro de  $\mathcal{C}$  e é paralela a  $r$  é chamada de **eixo** de  $S$ . As retas paralelas a  $r$  e que passam pelos pontos de  $\mathcal{C}$  são chamadas de **geratrizes** de  $S$ .

Dada uma superfície cilíndrica  $S$ , como acima, e dois planos distintos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  paralelos a  $\pi$ , o **cilindro** determinado por  $S$ ,  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é o conjunto dos pontos contidos em  $S$ , entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , (que constituem a **superfície lateral** do cilindro), junto com os pontos contidos nas circunferências dadas pelas intersecções de  $S$  com os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , e seus pontos interiores (que constituem as **bases** do cilindro).

Se  $r \perp \pi$ , o cilindro é chamado de **cilindro reto**, e se  $r \not\perp \pi$ , o cilindro é chamado de **cilindro obíquo**.

A **altura** do cilindro é a distância entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

**Exercício 106:** Inscrevendo um polígono regular de  $n$  lados na circunferência de uma das bases e tomando o prisma determinado pelo polígono, por  $r$  e pelos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , mostre que se  $n \rightarrow \infty$ , o volume destes prismas convergem para o número  $\pi R^2 h$ , sendo que  $R$  é o raio da circunferências das bases e  $h$  é a altura do cilindro. (Veja a figura 10.)

Definimos o **volume do cilindro** como sendo este número,  $V = \pi R^2 h$ .

**Exercício 107: Área da superfície lateral de um cilindro.** Inscrevendo um polígono regular de  $n$  lados na circunferência de uma das bases e tomando o prisma determinado pelo polígono, por  $r$  e pelos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , mostre que se  $n \rightarrow \infty$ , a soma das áreas das faces laterais destes prismas convergem para o número  $2\pi R^2 \ell$ , sendo que  $R$  é o raio da circunferências das bases e  $\ell$  é o comprimento do eixo do cilindro (que é o segmento ligando os centros das circunferências das bases).

Faça o mesmo, com um polígono circunscrito. (Veja a figura 10.)

Definimos o **área lateral do cilindro** como sendo este número,  $V = 2\pi R^2 \ell$ .

**Exercício 108:** Seja  $S$  uma superfície cilíndrica determinada pela circunferência  $\mathcal{C}$  (contida no plano  $\pi$ ) e pela reta  $r$ . Mostre que se  $\pi_1$  é um plano paralelo a  $\pi$ , então sua intersecção com  $S$  também é uma circunferência de mesmo raio que  $\mathcal{C}$ . Mostre que o eixo do cilindro também passa pelo centro desta circunferência.

**Exercício 109:** Mostre que se  $S$  é uma superfície cilíndrica oblíqua, então existem dois planos distintos  $\eta$  e  $\xi$  não paralelos, tais que as intersecções destes planos com  $S$  são circunferências de mesmo raio.

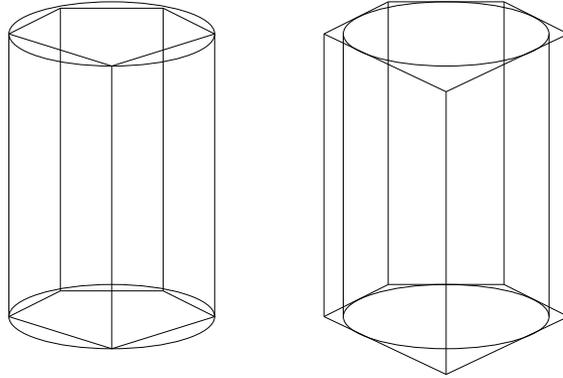


Figura 10: Calculando volume a área lateral de um cilindro.

**Exercício 110:** Mostre que no exercício anterior, se a superfície for reta, e  $\theta$  é um plano não paralelo e nem coincidente com  $\pi$ , então a intersecção de  $\theta$  com  $S$  não é uma circunferência.

**Exercício 111:** O interior de um cilindro de raio da base  $R > 0$  e eixo  $t$ , é o conjunto dos pontos entre os dois planos das bases que têm distância menor do que  $R$  do eixo. Mostre que o interior de um cilindro é um conjunto convexo.

## 5.2. ESFERAS

**Definições:** Dado um ponto  $C$  no espaço e um número real  $R > 0$ , a **esfera de centro  $C$  e raio  $R$**  é o conjunto  $\mathcal{S}$ , dos pontos  $P$  do espaço, tais que  $CP = R$ .

Os segmentos  $\overline{CP}$ , com  $P \in \mathcal{S}$  são chamados de **raios** de  $\mathcal{S}$  e os segmentos  $\overline{PQ}$ , com  $P, Q \in \mathcal{S}$  são chamados de **cordas** de  $\mathcal{S}$ . Se  $\overline{PQ}$  é uma corda que contenha o centro  $C$ , também chamamos este segmento de **diâmetro** de  $\mathcal{S}$ .

Os pontos  $Q$  tais que  $CQ < R$  são chamados de **pontos interiores** e os pontos  $T$  do espaço, tais que  $CT > R$  são chamados de **pontos exteriores** da esfera.

**Exercício 112: Volume da esfera.** Dada a esfera de raio  $R > 0$ , subdividimos um diâmetro em  $2n$  partes iguais. Seja  $\overline{MN}$  tal diâmetro, e enumere os pontos  $M_j \in \overline{MN}$ ,  $-n \leq j \leq n$ , de modo que  $M_{-n} = M$ ,  $\overline{M_j M_{j+1}} \equiv \overline{M_0 M_1}$ ,  $M_j - M_{j+1} - M_{j+2}$ . Estes pontos dão a divisão de  $\overline{MN}$  em  $2n$  partes iguais. Planos passando por cada  $M_j$  ( $-n < j < n$ ) e perpendiculares a  $\overline{MN}$ , cortam a esfera em circunferências de raios  $\rho_j = R\sqrt{(1 - j^2/n^2)}$ . (Veja a figura 11.) No interior da esfera, colocamos cilindros de raios  $\rho_j$  e alturas  $R/n$ , entre os planos passando por  $\overline{M_{j-1}M_j}$ , se  $j > 0$  ou  $\overline{M_{j+1}M_j}$ , se  $j < 0$ . A soma dos volumes destes cilindros é

$$\sum_{j=-n}^n \frac{\pi \rho_j^2 R}{n} = 2\pi \sum_{j=1}^n \frac{\rho_j^2 R}{n} = 2\pi R^3 \sum_{j=1}^n \frac{n^2 - j^2}{n^3} = 2\pi R^3 \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right).$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , esta soma tende ao valor  $4\pi R^3/3$ .

Faça o cálculo das somas dos volumes dos cilindros de raios  $\rho_j$  ( $-n < j \leq n$ ) e alturas  $R/n$ , entre os planos perpendiculares ao diâmetro  $\overline{MN}$  contendo  $M_{j-1}$  e  $M_j$  (por fora da esfera). Verifique que o limite para  $n \rightarrow \infty$  destas somas é também  $4\pi R^3/3$ .

Definimos o volume da esfera de raio  $R$  como o número  $4\pi R^3/3$ .

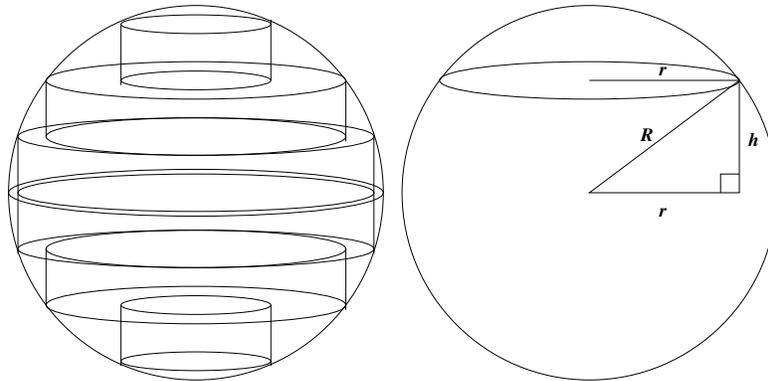


Figura 11: Calculando volume de uma esfera.

**Exercício 113: Área da esfera.** Para calcularmos a área de uma esfera, aproximamos a esfera por poliedros inscritos (ou circunscritos), tomando o limite da área do poliedro, para a área (e diagonais) de cada face do poliedro tendendo a zero. Para obtermos um valor numérico, podemos supor que as faces dos poliedros são triângulos ou quadriláteros (veja a figura 12). Olhando as pirâmides de bases as faces do poliedro e vértices de topos no centro da esfera, temos que o volume dos poliedros tendem ao volume da esfera  $4\pi R^3/3$ . O volume de cada poliedro é igual à soma dos volumes das pirâmides, o que é igual à área do poliedro vezes  $1/3$  de uma altura média das pirâmides. No limite, tal altura média tende ao raio  $R$  da esfera e a área dos poliedros tendem à área da esfera, que então deve ser  $4\pi R^2 = (4\pi R^3/3) \div (R/3)$ .

Definimos a área da esfera de raio  $R$  como sendo o número  $4\pi R^2$ .

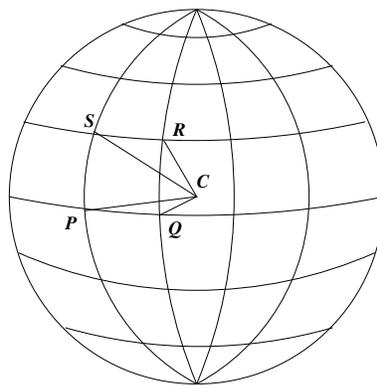


Figura 12: Calculando a área de uma esfera.

**Exercício 114:** Mostre que uma reta encontra um esfera em no máximo dois pontos.

**Exercício 115:** Mostre que, dada uma esfera  $S$  e um ponto  $P$  em seu exterior, existe pelo menos uma reta passando por  $P$  e por um único ponto de  $S$ . Tal reta é chamada de **reta tangente** a  $S$ . Mostre que o conjunto de todos os pontos  $Q$  de  $S$ , tais que  $\overleftrightarrow{PQ}$  é tangente a  $S$  é uma circunferência. Calcule seu raio em função da distância de  $P$  ao centro de  $S$  e de seu raio.

**Exercício 116:** Dada a esfera  $S$  de centro  $C$  e raio  $R > 0$ , dado um ponto  $X$  no exterior de  $S$ , seja  $Y$  o ponto obtido pela intersecção do segmento  $\overline{PC}$  e do plano contendo a circunferência dos pontos de tangência  $Q$  em  $S$  das retas  $\overleftrightarrow{XQ}$ . Mostre que  $XC \cdot YC = R^2$ .

**Exercício 117:** Mostre que a intersecção de uma esfera e um plano é um único ponto (e, neste caso, chamamos o plano de **plano tangente** a  $S$ ), ou uma circunferência.

**Exercício 118:** Mostre que dada uma esfera  $S$  e um ponto  $Q \in S$ , existe um único plano  $\pi$  tangente a  $S$  e contendo  $Q$ . Mostre que a reta  $\overleftrightarrow{CQ} \perp \pi$ , sendo que  $C$  é o centro da esfera.

## 6. CONES E SEÇÕES CÔNICAS

### 6.1. CONES

Uma **superfície cônica circular** é o conjunto dos pontos do espaço contidos nas retas que ligam os pontos de uma circunferência  $\mathcal{C}$  a um ponto  $V$  fora do plano que contém  $\mathcal{C}$ . O ponto  $V$  é o **vértice**, e cada reta ligando  $V$  a um ponto de  $\mathcal{C}$  é uma **geratriz**. A reta que liga  $V$  ao centro de  $\mathcal{C}$  é o **eixo** da superfície cônica.

Se o eixo é perpendicular ao plano da circunferência  $\mathcal{C}$ , então chamamos o cone de **superfície cônica circular reta**.

Podemos subdividir um cone em **duas faces**: uma face consiste das semi-retas partindo de  $V$  e passando por  $\mathcal{C}$  e a outra face consiste das semi-retas partindo de  $V$  e opostas a  $\mathcal{C}$ .

Dada a circunferência  $\mathcal{C}$  e um ponto  $V$  fora do plano de  $\mathcal{C}$ , o conjunto dos pontos em  $\mathcal{C}$ , de seu interior (no plano de  $\mathcal{C}$ ) e dos segmentos  $\overline{VP}$ , para  $P \in \mathcal{C}$ , é chamado de **cone**,  $V$  é seu **vértice**, o conjunto dos pontos em  $\mathcal{C}$  e em seu interior (no plano de  $\mathcal{C}$ ) é chamado de **base**, e o conjunto dos pontos nos segmentos  $\overline{VP}$ , para  $P \in \mathcal{C}$ , é chamado de **superfície lateral** do cone. A distância de  $V$  ao plano de  $\mathcal{C}$  é a **altura** do cone.

**Exercício 119:** Inscrevendo pirâmides num cone, mostre que seu volume é  $Ah/3$ , sendo  $A$  a área da base e  $h$  sua altura.

**Exercício 120:** Inscrevendo pirâmides num cone circular reto, mostre que a área da superfície lateral é  $2\pi R\ell$ , sendo  $R > 0$  o raio da base e  $\ell$  o tamanho de um segmento ligando o vértice à circunferência da base. Ache uma fórmula para esta área, conhecendo-se o raio da base e a altura do cone.

**Exercício 121:** Mostre que se  $S$  é uma esfera e  $V$  um ponto no exterior de  $S$ , o conjunto dos pontos contidos nas retas tangentes a  $S$  e que passam por  $V$  é uma superfície cônica circular reta.

## 6.2. SEÇÕES CÔNICAS

A curva obtida da intersecção do cone com um plano que não passa por  $V$  é chamada de **seção cônica**, ou simplesmente de cônica. Podem ser de três tipos: parábola (quando o plano é paralelo a uma geratriz), hipérbole (quando o plano intersecta as duas faces do cone, formando duas curvas) e elipse (quando intersecta só uma das faces e não é uma parábola). Veja a figura 13.

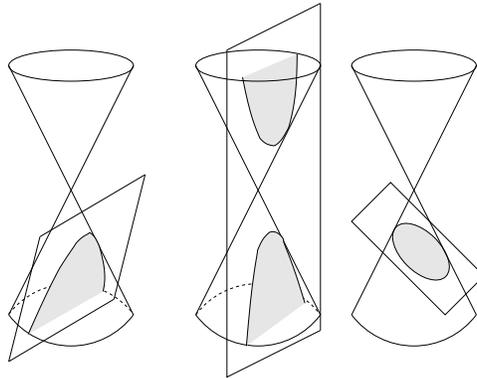


Figura 13: Seções cônicas: parábola, hipérbole e elipse.

Agora vamos obter propriedades métricas das cônicas. Para isto, primeiro vamos fazer umas construções, devidas ao matemático francês naturalizado belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847).

Primeiro, inscrevemos uma esfera no cone e tangente ao plano da cônica. Isto quer dizer que a esfera é tangente às geratrizes do cone e ao plano da cônica. No caso da parábola, existe uma única esfera com tal propriedade, e nos casos da elipse e da hipérbole, existem duas destas esferas. No diagrama da figura 14 temos uma visão lateral destes casos.

Os pontos de tangência das esferas com o plano da cônica são chamados de sf focos da cônica, denotados por  $F_1$  e  $F_2$ , no diagrama. Cada esfera inscrita no cone intersecta o cone numa seção circular deste, por um plano perpendicular a seu eixo. Este plano intersecta o plano da cônica numa reta, que chamamos de diretriz da cônica. Nos diagramas da figura 14, são denotadas por  $d_1$  e  $d_2$  (estão numa visão lateral).

Vamos verificar que as cônicas têm uma propriedade importante em relação aos focos e diretrizes.

Sejam  $\beta$ , o plano da cônica;  $\alpha$ , o plano contendo a circunferência da intersecção de uma das esferas com o cone;  $F$ , o foco correspondente a esta esfera e  $d$  a diretriz, que é a intersecção de  $\alpha$  e  $\beta$ . Sejam  $\phi$  o ângulo agudo entre uma geratriz do cone e o plano  $\alpha$  e  $\psi$  o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$ . Escolha um ponto  $P$  qualquer na cônica e sejam  $Q$  em  $d$ , tal que o segmento  $\overline{PQ}$  é perpendicular a  $d$ ;  $R$  em  $\alpha$ , tal que o segmento  $\overline{PR}$  seja perpendicular a  $\alpha$  e  $S$  em  $\alpha$  o ponto de intersecção da geratriz  $\overleftrightarrow{VP}$  com  $\alpha$ . (Veja o diagrama da figura 14.) Vamos determinar a razão de segmentos  $PF/PQ$ .

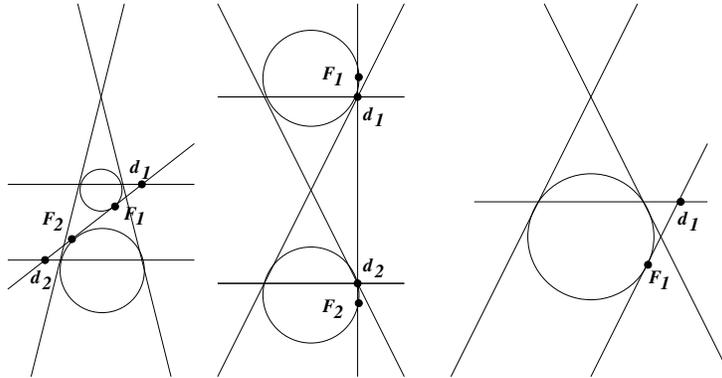


Figura 14: Vista lateral dos focos  $F_1, F_2$  e diretrizes  $d_1$  e  $d_2$  da elipse, hipébole e parábola.

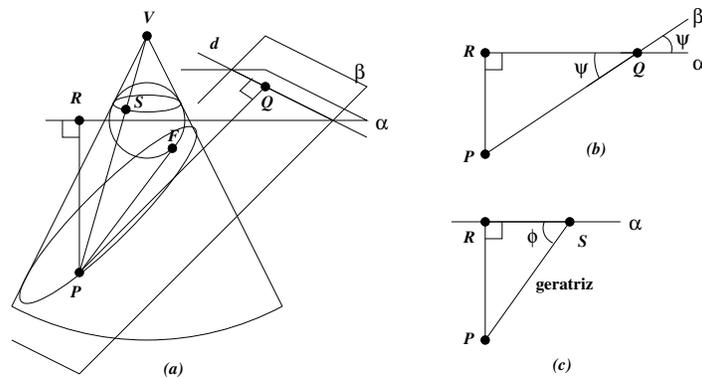


Figura 15: Propriedade dos focos e diretrizes: (a) visão em perspectiva; (b) visão lateral do triângulo  $\triangle PQR$ ; (c) visão lateral do triângulo  $\triangle PSR$ .

**Exercício 122:** Verifique que  $PF = PS$ . (observe que ambos os segmentos estão em retas tangentes à esfera. Ligue o centro  $C$  da esfera a  $S$  e a  $F$ , e considere os triângulos retângulos  $\triangle PCF$  e  $\triangle PCS$ , etc.)

**Exercício 123:** Verifique que  $PR = PQ \text{sen } \psi$  e  $PR = PS \text{sen } \phi$ . (Considere os triângulos retângulos  $\triangle PRQ$  e  $\triangle PRS$ , etc. Para garantir que o ângulo  $\angle PQR$  mede  $\psi$ , temos que garantir que o segmento  $\overline{RQ}$  é perpendicular a  $d$ ; verifique isto.)

O número  $e = PF/PQ = \text{sen } \psi / \text{sen } \phi$  não depende do ponto  $P$  e é chamado de excentricidade da cônica.

**Exercício 124:** Verifique que as duas diretrizes de uma elipse ou hipérbole são paralelas.

**Exercício 125:** Verifique que a excentricidade é a mesma para os dois focos e correspondentes diretrizes.

**Exercício 126:** Comparando os ângulos  $\phi$  e  $\psi$ , verifique que

- (a)  $e = 1$  se, e somente se, a cônica é uma parábola;
- (b)  $0 < e < 1$  se, e somente se, a cônica é uma elipse;
- (c)  $e > 1$  se, e somente se, a cônica é uma hipérbole.

Vamos explorar mais propriedades dos focos e diretrizes da elipse e da hipérbole.

**Exercício 127:** Mostre que se  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse  $\mathcal{E}$ , então, variando o ponto  $P$  em  $\mathcal{E}$ ,  $PF_1 + PF_2$  é constante. (Verifique que  $PF_1 + PF_2 = ed$ , sendo  $d$  a distância entre as diretrizes e  $e$  a excentricidade; veja a figura 16.)

**Exercício 128:** Mostre que se  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole  $\mathcal{H}$ , então, variando o ponto  $P$  em  $\mathcal{H}$ , o valor absoluto de  $PF_1 - PF_2$  é constante. (Verifique que  $|PF_1 - PF_2| = ed$ , sendo  $d$  a distância entre as diretrizes e  $e$  a excentricidade; veja a figura 16.)

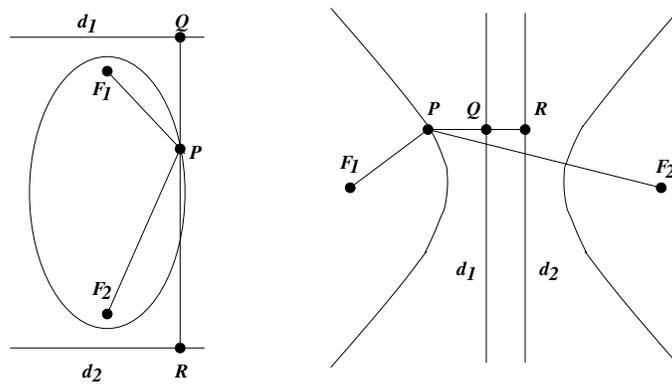


Figura 16: Propriedade dos focos e diretrizes para elipse e hipérbole.

Para a elipse e a hipérbole, o ponto médio  $O$  do segmento  $\overline{F_1F_2}$  é chamado de **centro** da cônica; a reta  $\overleftrightarrow{F_1F_2}$  intersecta a cônica em dois pontos  $V_1$  e  $V_2$ , chamados de **vértices** da cônica; o segmento  $\overline{V_1V_2}$  é chamado de **eixo focal** ou **eixo maior** da cônica; a reta perpendicular ao eixo focal da elipse encontra a elipse em dois pontos  $B$  e  $B'$ ; o segmento  $\overline{BB'}$  é chamado de **eixo menor** da elipse.

**Exercício 129:** Mostre que se  $\overline{V_1V_2}$  é o eixo maior;  $\overline{BB'}$  é o eixo menor;  $F_1$  e  $F_2$  são os focos e  $C$  o centro da elipse  $\mathcal{E}$ , de excentricidade  $e$  e distância entre as diretrizes  $2d$ , então

- (a)  $V_1V_2 = 2ed$  ( $e$  denotamos  $a = ed$ );
- (b)  $CF_1 = CF_2 = ea = e^2d$ ;
- (c)  $CB = CB' = a\sqrt{1 - e^2} = ed\sqrt{1 - e^2}$  (denotamos  $b = ed\sqrt{1 - e^2}$ );
- (d)  $e = CF_1/CV_1 = (\sqrt{a^2 - b^2})/a$ .

**Exercício 130:** Ainda na situação do exercício anterior, dado um ponto  $P$  em  $\mathcal{E}$ , sejam  $X$  na reta  $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ , tal que  $\overline{PX} \perp \overline{V_1V_2}$  (perpendicular) e  $Y$  na reta  $\overline{BB'}$ , tal que  $\overline{PY} \perp \overline{BB'}$ ; sejam  $x = CX$  e  $y = CY$  (tamanhos dos segmentos). Veja o diagrama na figura 17. Mostre que

- (a)  $X$  está no segmento  $\overline{V_1V_2}$  e  $Y$  está no segmento  $\overline{BB'}$ ;
- (b)  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  (use a propriedade da soma das distâncias aos focos ser constante e use triângulos retângulos convenientes para calcular estas distâncias).

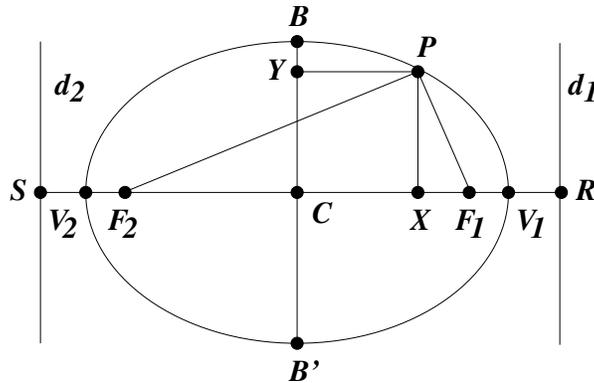


Figura 17: Focos, diretrizes, eixos e centro da elipse.

**Exercício 131:** Faça o mesmo para uma hipérbole. Pelo centro  $C$  da hipérbole, trace uma reta perpendicular ao eixo focal; de um ponto  $P$  da hipérbole, trace perpendiculares ao eixo focal, obtendo um ponto  $X$  neste, e à reta perpendicular ao eixo focal, obtendo um ponto  $Y$ . Sejam  $e$  a excentricidade,  $2d$  a distância entre as diretrizes. Verifique que:

- (a)  $V_1V_2 = 2ed$  (e denotamos  $a = ed$ );
- (b)  $CF_1 = CF_2 = ea = e^2d$ ;
- (c) seja  $b = ea\sqrt{e^2 - 1}$ ; verifique que  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$  (use a propriedade da diferença das distâncias aos focos ser constante e use triângulos retângulos convenientes para calcular estas distâncias).

(d) sejam  $r$  e  $s$  as retas  $r: bx - ay = 0$  e  $s: bx + ay = 0$ ; mostre que se  $y_1 = b\sqrt{1 - (x_1/a)^2}$  e  $y_2 = -b\sqrt{1 - (x_2/a)^2}$  (ou seja,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  estão na hipérbole  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ ), então

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow \infty} d((x_1, y_1), r) &= 0, & \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} d((x_1, y_1), s) &= 0, \\ \lim_{x_2 \rightarrow \infty} d((x_2, y_2), s) &= 0, & \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} d((x_2, y_2), r) &= 0. \end{aligned}$$

(Para isto, mostre que a diferença entre as coordenadas  $y$  da hipérbole e da reta correspondente tende a zero e conclua o exercício. Uma sugestão para os limites:

$$\frac{bx}{a} - \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - 1} = \left( \frac{bx}{a} - \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - 1} \right) \left( \frac{bx/a + \sqrt{b^2x^2/a^2 - 1}}{bx/a + \sqrt{b^2x^2/a^2 - 1}} \right) = \frac{1}{bx/a + \sqrt{b^2x^2/a^2 - 1}};$$

use a última expressão para calcular o limite.)

As retas  $r$  e  $s$  são chamadas de **assíntotas** da hipérbole de equação  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ .

(e) Calcule a excentricidade  $e$  tal que  $a = b$ .

(f) Dada a hipérbole  $x^2 - y^2 = a^2$ , determine suas equações nas coordenadas  $(u, v)$ , sendo  $u = (x + y)/\sqrt{2}$ ,  $v = (y - x)/\sqrt{2}$ ; faça o mesmo nas coordenadas  $(w, z)$ , sendo  $w = (x - y)/\sqrt{2}$ ,  $z = (x + y)/\sqrt{2}$ . (Observe que, neste caso, os eixos coordenados estão sobre as assíntotas, as quais são perpendiculares entre si.)

**Exercício 132:** Faça o mesmo para a parábola. Ou seja, Dado o foco  $F$  e a diretriz  $d$ , a reta  $l$  perpendicular a  $d$  e passando por  $F$  é o eixo focal da parábola. Seja  $a$  a distância entre  $F$  e  $O$ , o pé da perpendicular a  $d$  passando por  $F$ . Sejam  $P$  um ponto da parábola;  $X$  em  $d$ , tal que  $\overline{PX} \perp d$ ;  $Y$  no eixo focal  $l$ , tal que  $\overline{PY} \perp l$ . Verifique que  $OY = OX^2/2a + a/2$  (use a propriedade da distância do ponto ao foco ser igual a  $PX$ ).

**Exercício 133:** Os exercícios acima mostram como chegar à equação de uma cônica num sistema de coordenadas centrado no centro da cônica e com eixos o eixo focal e o eixo perpendicular ao eixo focal. Obtenha as equações da parábola, elipse e hipérbole para outros sistemas de coordenadas.

**Exercício 134:** Dada uma equação da forma  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , determine qual figura é descrita por ela. Para isto, faremos mudanças de coordenadas, para facilitar o reconhecimento:

(a) para eliminar o termo em  $xy$ , tente achar coeficientes  $a$  e  $b$  tais que se  $x = au + bv$  e  $y = -bu + av$ , substituindo na equação, obtemos uma equação de segundo grau em  $u$  e  $v$ , que não tem termo em  $uv$ ; para que a unidade de medida em  $u$  e  $V$  coincida com a de  $x$  e  $y$ , imponha também que  $a^2 + b^2 = 1$ ;

(b) verifique que se  $A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$  é a nova equação, então  $B' = 0$  e  $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ ;

(c) se a equação obtida tem termos em  $u^2$  e em  $v^2$ , podemos eliminar os termos lineares (isto é, em  $u$  e em  $v$ ), completando quadrados, assim:  $Gu^2 + Hu + L = G(u + H/(2G))^2 + M$  e  $Nv^2 + Ov + p = N(v + O/(2N))^2 + Q$  (ache  $M$  e  $Q$ ); faça o mesmo com a variável  $v$ ; substituimos as variáveis  $u = t - H/(2G)$  e  $v = w - O/(2N)$ ; com isto, podemos reconhecer a cônica descrita pela equação.

(d) Se a equação obtida é  $A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$ , com  $C' = 0$  e  $A' \neq 0$ , ou  $A' = 0$  e  $C' \neq 0$ , verifique que a cônica é uma parábola.

(e) Os casos que podem dar problema:  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$  é um quadrado perfeito; a equação final pode ser da forma  $c^2t^2 - d^2w^2 = 0$ , ou da forma  $c^2t^2 + d^2w^2 = 0$ , ou da forma  $c^2t^2 + d^2w^2 + p^2 = 0$  com  $p \neq 0$ . A que figuras correspondem estas equações?

### 6.3. CONSTRUÇÕES DE CÔNICAS

**Exercício 135:** Uma construção da parábola por dobraduras. Dada uma reta  $d$  e um ponto  $F$  fora de  $d$ , para cada  $Q$  em  $d$ , seja  $l$  a mediatriz do segmento  $\overline{FQ}$  e  $P$  o ponto de encontro de  $l$  com a reta  $l_1$  (por que se encontram?), perpendicular a  $d$  e passando por  $Q$ . Verifique que  $P$  é um ponto da parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ . As dobraduras são feitas de modo que o ponto  $D$  fique sobre o ponto  $Q$ , ou seja, dobramos ao longo da mediatriz.

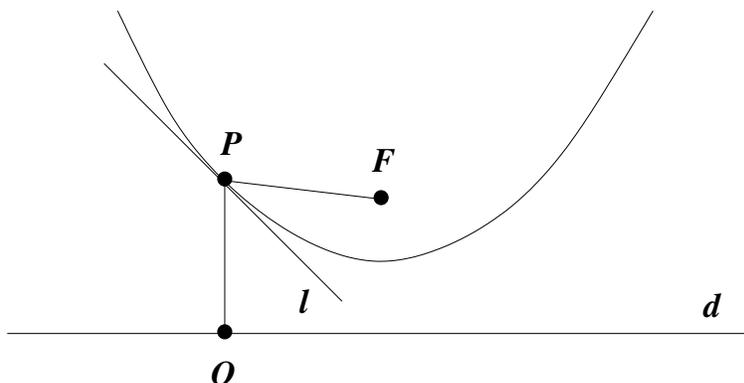


Figura 18: Construção da parábola por dobraduras.

**Exercício 136:** Uma construção de uma elipse com dobraduras. Dada uma circunferência de centro  $C$ , escolha um ponto  $D$  no interior da circunferência e distinto de  $C$ . Para cada ponto  $Q$  na circunferência seja  $l$  a mediatriz do segmento  $\overline{DQ}$  e seja  $P$  o ponto de encontro de  $\overline{CQ}$  com  $l$ . Variando  $Q$ , obtemos todos os pontos  $P$  da elipse de focos  $C$  e  $D$  e eixo maior medindo o raio da circunferência (veja a figura 19). As dobraduras são feitas de modo que o ponto  $D$  fique sobre o ponto  $Q$ , ou seja, dobramos ao longo da mediatriz.

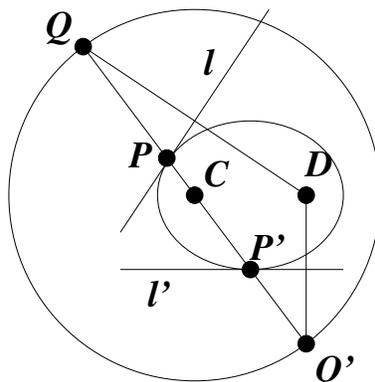


Figura 19: Construção da elipse por dobraduras.

O exercício aqui consiste em verificar que tal construção é correta. Ou seja, verifique que  $CP + DP = r$ , sendo  $r$  o raio da circunferência.

**Exercício 137:** Uma construção da hipérbole por dobraduras. Dada uma circunferência de centro  $C$ , escolha um ponto  $D$  no exterior da circunferência e distinto de  $C$ . Para cada ponto  $Q$  na

circunferência seja  $l$  a mediatriz do segmento  $\overline{DQ}$  e seja  $P$  o ponto de encontro da reta  $\overleftrightarrow{CQ}$  com  $l$ . Variando  $Q$ , obtem os todos os pontos  $P$  da hipérbole de focos  $C$  e  $D$  (veja a figura 20). As dobraduras são feitas de modo que o ponto  $D$  fique sobre o ponto  $Q$ , ou seja, dobramos ao longo da mediatriz.

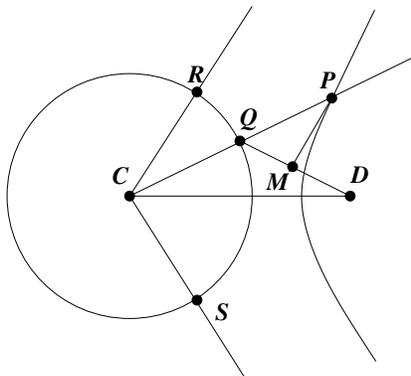


Figura 20: Construção da hipérbole por dobraduras.

Observe que neste caso, se  $\overline{DQ}$  é tangente à circunferência, então a reta  $\overleftrightarrow{CQ}$  é paralela a  $l$  (por que?) e portanto não determina nenhum ponto de hipérbole. No entanto as duas mediatrizes  $l$  tais que isto ocorre são as **assíntotas** da hipérbole. Uma caracterização das assíntotas é que qualquer reta paralela a ela e distinta dela, corta a hipérbole num único ponto, mas não é uma tangente à hipérbole. Verifique que qualquer outra reta não paralela a uma assíntota e que encontra a hipérbole em um ponto, então encontra-a em dois pontos.

Outro ponto a ser verificado é que os dois pontos  $R$  e  $S$  da circunferência tais que  $\overline{DR}$  e  $\overline{DS}$  são tangentes à circunferência dividem-na em duas partes (à esquerda e à direita da reta  $\overleftrightarrow{RS}$  no diagrama da figura 20); os pontos  $Q$  em cada um destes lados determinam cada um dos ramos da hipérbole.

O exercício aqui consiste em verificar que tais tal construção é correta. Ou seja, verifique que  $|CP - DP| = r$ , sendo  $r$  o raio da circunferência.

**Exercício 138:** Nas três construções acima, a linha de dobradura (a mediatriz do segmento) é tangente à cônica. Para verificar isto, considere a figura 21 em cada item abaixo.

(a) Para a parábola (esboçado na figura 21 (a)), a mediatriz nunca é perpendicular à diretriz (por que?) e se  $P'$  está na mediatriz que define  $P$ , então  $PQ = PF$  e  $P'Q = P'F$  (por que?). Mas se  $P' \neq P$ , descendo a perpendicular de  $P'$  a  $d$ , obtendo  $Q'$  em  $d$ , então  $P'Q' < P'F$  (por que?). Portanto a linha de dobradura só toca a parábola num único ponto. Por que isto implica que é uma tangente à parábola?

(b) Para a elipse (esboçado na figura 21 (b)), se  $P'$  está na mediatriz  $l$  que define  $P$ , sejam  $Q$  e  $Q'$  são os pontos da circunferência, correspondentes a  $P$  e  $P'$ , respectivamente, então  $PD = PQ$ ,  $P'D = P'Q$  por construção (por que?) e  $P'D = P'Q'$  por hipótese (por que?). Mas isto não pode ocorrer, pois  $P'$  seria equidistante de  $Q$  e  $Q'$  e, como  $\triangle CQQ'$  é isósceles (por que?),  $P'$  deveria

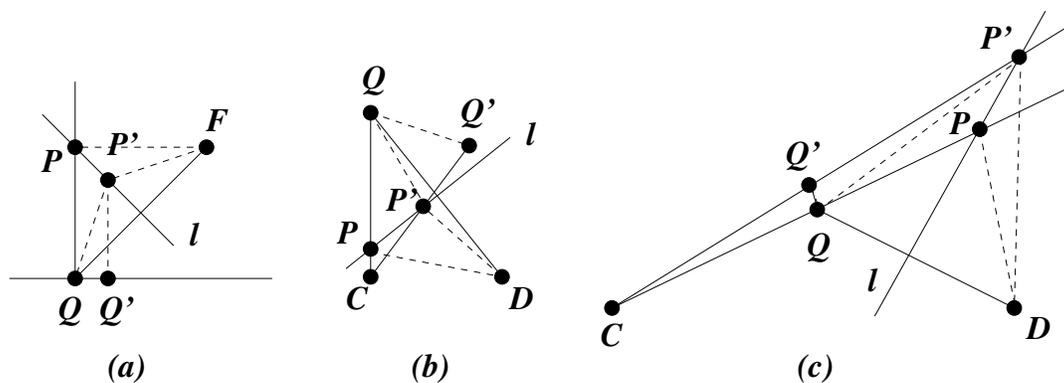


Figura 21: A linha de dobradura é tangente: (a) parábola; (b) elipse e (c) hipérbole.

estar na mediatriz de  $\overleftrightarrow{QQ'}$ , que só encontra a reta  $\overleftrightarrow{CQ'}$  no ponto  $C$  (por que?). Portanto a linha de dobradura só toca a elipse num único ponto. Por que isto implica que é uma tangente à elipse?

(c) Para a hipérbole (esboçado na figura 21 (c)), o argumento é parecido com o da elipse. Faça-o. Verifique que as mediatrizes que definem pontos da hipérbole não são paralelas a nenhuma das assíntotas.

**Exercício 139:** Uma propriedade de reflexão das cônicas. Verifique nas construções acima que para a elipse e a hipérbole, os segmentos que ligam um ponto da cônica com os dois focos fazem o mesmo ângulo com a reta tangente neste ponto; que para a parábola, a reta perpendicular à diretriz passando por um ponto da parábola faz o mesmo ângulo com a reta tangente que o segmento que liga este ponto ao foco.

**Exercício 140:** Mais uma construção de uma parábola (usando régua e um compasso ou esquadro para traçar paralelas e perpendiculares). Partimos de uma linha  $l$ , um ponto  $Q$  em  $l$  e um ponto  $P$  fora de  $l$ . Usamos uma linha auxiliar  $m$  paralela a  $l$  e não passando por  $P$ . A reta passando por  $P$  e perpendicular a  $l$  corta  $m$  no ponto  $A$ ; a reta  $linQP$  corta  $m$  em  $B$ ; a reta perpendicular a  $l$  e passando por  $B$  corta a reta  $\overleftrightarrow{QA}$  num ponto  $R$ . (Veja a figura 22.) Verifique que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  estão numa parábola. (Para isto, coloque coordenadas convenientes, etc.)

**Exercício 141:** Mais uma construção de uma elipse. Dadas duas retas paralelas  $m$  e  $n$ , dois pontos,  $C$  em  $m$  e  $D$  em  $n$ , e mais um ponto  $P$  entre  $m$  e  $n$  e não colinear com  $C$  e  $D$ , usando uma reta auxiliar  $l$ , paralela a  $m$  e não passando por  $P$ , a reta  $\overleftrightarrow{DP}$  encontra  $l$  em  $A$ ,  $\overleftrightarrow{CP}$  encontra  $l$  em  $B$  e as retas  $\overleftrightarrow{CA}$  e  $\overleftrightarrow{DB}$  encontram-se no ponto  $Q$ . Os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $C$  e  $D$  estão na mesma elipse. (Veja a figura 23.) Verifique isto.

**Exercício 142:** Mais uma construção de uma hipérbole. Dadas duas retas  $m$  e  $n$ , concorrentes no ponto  $C$ , um ponto  $P$ , fora destas retas, e um linha auxiliar  $l$ , passando por  $C$ , não passando por  $P$  e distinta de  $m$  e de  $n$ , por  $P$  traçamos uma paralela a  $m$ , que encontra  $l$  em  $B$ , e uma paralela a  $n$ , que encontra  $l$  em  $A$ ; por  $A$ , traçamos uma paralela a  $m$ , que encontra a paralela a  $n$ , passando

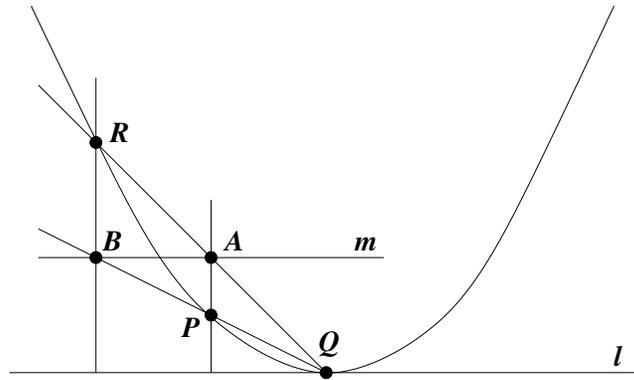


Figura 22: Outra construção da parábola.

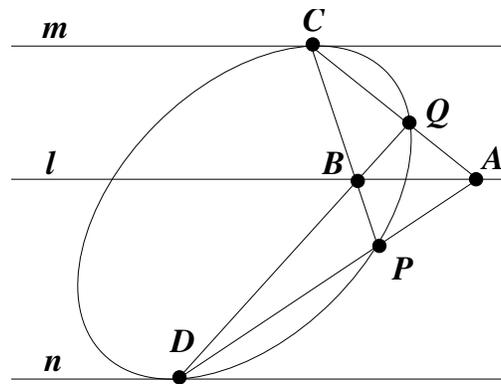


Figura 23: Outra construção da elipse.

por  $B$ , num ponto  $Q$ . Os pontos  $P$  e  $Q$  estão numa hipérbole, cujas assíntotas são as retas  $m$  e  $n$ . (Veja a figura 24, em que fazemos a construção de dois pontos,  $Q$  e  $R$ , em dois ramos distintos da hipérbole.) Verifique isto.

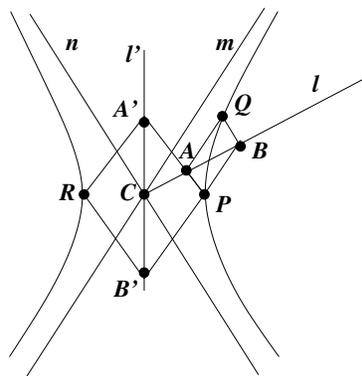


Figura 24: Outra construção da hipérbole.

**Exercício 143:** Uma construção de cônicas. Dadas duas retas concorrentes num ponto  $O$ , um ponto  $C$  e um ponto  $D$  em cada uma destas retas e distintos de  $O$ , um ponto  $P$  fora destas linhas e uma reta auxiliar, passando por  $O$ , mas não por  $P$ ,  $C$  e nem  $D$ , as retas  $CP$  e  $DP$  encontram a reta auxiliar em  $A$  e  $B$ ; as retas ligando  $A$  e  $B$  a  $C$  e a  $D$  encontram-se num ponto  $Q$  da cônica. Dependendo da posição de  $P$ , podemos ter uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. (Veja a figura 25.)

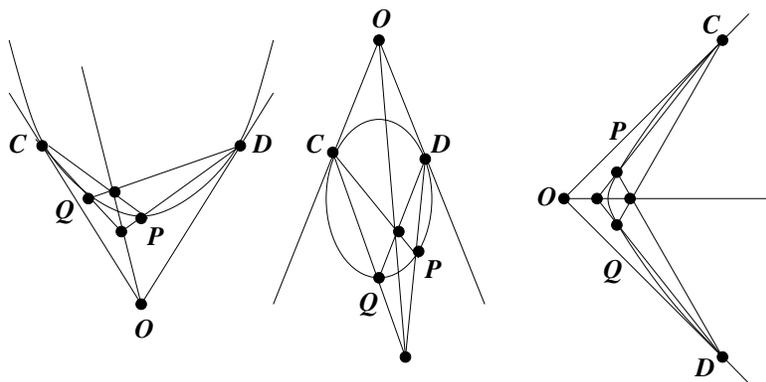


Figura 25: Outra construção de cônicas.