Capítulo 5

Cálculo Proposicional

5.1 Conceitos Iniciais

Vamos introduzir a primeira linguagem formal (artificial) em nosso estudo, que é a *Linguagem Proposicional*. Os símbolos com os quais será definida a linguagem proposicional serão os seguintes: $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Serão também usados símbolos de variáveis (proposicionais), dados pelo conjunto $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, a letra maiúscula X com sub-índices números naturais. Também serão usados parênteses como separadores.

Nossa primeira definição recursiva, a de fórmula proposicional e de sua *complexidade*:

- uma variável proposicinal P[1] é uma fórmula (proposicional), chamada de *fórmula atômica*, e sua complexidade é $c(P) = 0$;
- se P for uma fórmula, então $(\neg P)$ também será uma fórmula e sua complexidade é $c(\neg P) = c(P) + 1$;
- se P e Q forem fórmulas, então $(P \rightarrow Q)$, $(P \wedge Q)$ e $(P \vee Q)$ também serão fórmulas e suas complexidades são iguais a $c(P) + c(Q) + 1$.

Alguns autores gostam de incluir uma cláusula de fechamento, dizendo que somente as sequências de símbolos partindo das fórmulas atômicas e aplicando uma quantidade finita de vezes as cláusulas de inserção de símbolos.

[1] Aqui, a letra P serve de variável para fórmulas na metalinguagem.

5.2 Funções de Veracidade e Tabelas-Verdade

Já decidimos que as proposições terão apenas dois valores de veracidade: *Verdadeira*, representado pelo número 1, e *Falso*, representado pelo número 0. Sobre o conjunto $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ introduziremos a ordem linear $<$, pela qual $0 < 1$.

Consideremos as funções $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ (somente consideraremos $n \geq 1$). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem 2^{2^n} tais funções, que serão chamadas de *funções de veracidade*. Seus valores podem ser tabelados, listando as variáveis de f como na tabela 5.1. Essas tabelas serão chamadas de *tabelas-verdade*.

Linhas	X_1	X_2	$\ldots$	X_{n-1}	X_n	$f(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n)$
0	0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
1	0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^{n-1}	1	1	$\ldots$	1	0	$f(1, \ldots, 1, 0)$
$2^n - 1$	1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, \ldots, 1, 1)$

Tabela 5.1: Uma típica tabela de valores de uma função de veracidade, ou tabela-verdade. A ordem em que são listadas as linhas não é importante, mas usamos o artifício de numerar a linha com valores $(a_1, \ldots, a_n)$ pelo índice $\sum_{i=1}^{n} a_i \, 2^{n-i+1}$.

Definiremos a operação unária $- : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$, dada por $-0 = 1$ e $-1 = 0$ (*complemento*), e as operações binárias $\cap : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ e $\cup : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$, dadas pelas seguintes tabelas-verdade:

Linha	X	Y	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$X + Y$	$X \vert Y$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
2	1	0	0	1	1	1
3	1	1	1	1	0	0

Tabela 5.2: Tabelas-verdade das funções $\cap$ (mínimo), $\cup$ (máximo), $+$ (soma) e $|$ (incompatibilidade).

Exercício 5.2.1 Mostre, por meio de tabelas-verdade, que

1. $X \cap Y = Y \cap X$
2. $X \cup Y = Y \cup X$
3. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
4. $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
5. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
6. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
7. $X|X = -X$
8. $X|Y = -(X \cap Y)$
9. $X + Y = Y + X$
10. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
11. $X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$, sendo que $\cdot$ é a função $\cap$.

Geração de funções de veracidade: Observemos que com estas três funções, a saber, $\cap$, $\cup$ e $-$, podemos gerar todas as outras, por meio de composições. Considermos primeiramente a função constante e igual a 0, $f_0(X_1, \ldots, X_n) = 0$. Ela pode ser calculada pela expressão

$$f_0(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 \cap (-X_1)) \cap X_2 \ldots \cap X_n,$$

se quisermos que todas as n variáveis apareçam na expressão.

Agora, para cada $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, seja $L_j = (a_1, \ldots, a_n)$ uma lista de atribuições de valores 0 ou 1 às variáveis X_1, $\ldots$, X_n, (por exemplo, os números $a_1, \ldots, a_n$ formam o código binário do número $j = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}$) e seja $g_j(X_1, \ldots, X_n)$ a função que atribui o valor 1 à n-upla L_j e zero às outras n-uplas. Sejam $X_i^{L_j} = X_i$, se $a_i = 1$, e $X_i^{L_j} = -X_i$, se $a_i = 0$. Então $g_j(X_1, \ldots, X_n) = X_1^{L_j} \cap \ldots \cap X_n^{L_j}$ (verifique, como exercício).

Dada $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ não identicamente zero, seja $U(f) = \{j : f(L_j) = 1\}$ (o conjunto dos índices das linhas em que a tabela-verdade de f atribua-lhe o valor 1). Então $f(X_1, \ldots, X_n) = \bigcup_{j \in U(f)} g_j(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercício 5.2.2 Este exercício lista todas as possibilidades de um conjunto de geradores independentes para todas as funções binárias (ou de veracidade). São 36 possibilidades e foram determinadas por Emil Leon Post, em sua obra *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*[2]. Alguns dos itens abaixo dependem de informação contida na tabela 5.3, na página 31. Mostre que, em cada um dos casos abaixo, as funções listadas geram todas as funções de veracidade:

1. $f(X,Y) = X|Y$
2. $f(X,Y) = -(X \cup Y)$
3. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = X \cap Y$
4. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = X \cup Y$
5. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = X \Rightarrow Y = (-X) \cup Y$
6. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = -(X \Rightarrow Y) = X \cap (-Y)$
7. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)
8. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3''(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)
9. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)
10. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3''(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)
11. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X) = -X,\ f_2(X,Y,Z) = \alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)
12. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X) = -X,\ f_2(X,Y,Z) = \alpha_3''(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)
13. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X) = -X,\ f_2(X,Y,Z) = \alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

[2]Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, EUA, 1941.

14. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X) = -X$, $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

15. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$

16. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cap (-Y)$

17. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3'(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

18. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3^n(X, Y, Z)$, uma f_2 para cada n, $4 \leq n \leq 13$ (são, portanto, 10 listas de geradores - veja a tabela 5.3, na página 31)

19. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cap (-Y)$, $f_2(X, Y) = X \cup Y$

20. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cap (-Y)$, $f_2(X, Y) = X \cap Y$

21. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$, $f_2(X, Y) = X \cup Y$

22. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$, $f_2(X, Y) = X \cap Y$

23. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$, $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

24. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cup (-Y)$, $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

25. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y) = X \cup Y$, $f_3(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

26. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y) = X \cap Y$, $f_3(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

27. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''$, $f_3(X, Y, Z) = \alpha_3'''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 31)

XYZ	α'_3	α''_3	α'''_3	α^4_3	α^5_3	α^6_3	α^7_3	α^8_3	α^9_3	α^{10}_3	α^{11}_3	α^{12}_3	α^{13}_3
000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
010	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
011	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
100	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
101	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
110	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
111	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 5.3: As funções ternárias α'_3, α''_3, α'''_3, e α^n_3, $4 \leq n \leq 13$, usadas como parte dos geradores das funções binárias.

5.3 Dedução Formal

Uma *dedução formal* no Cálculo Proposicional da proposição P a partir de premissas $Q_1, \ldots, Q_m$, é uma sequência (finita) de fórmulas proposicionais, $P_1, \ldots, P_n$, $n \geq 1$, satisfazendo as seguintes regras (recursivas), para cada i, $1 \leq i \leq n$:

1. ou P_i é alguma das premissas Q_j, para algum j, $1 \leq j \leq m$;
2. ou P_i é um *axioma*, ou seja uma dentre certas fórmulas proposicionais que serão selecionadas neste capítulo e que receberão tal nome;
3. ou P_i foi obtida por *Modus Ponens* (também chamada de *regra do destacamento*) de duas fórmulas proposicionais anteriores, ou seja, existem $j, k < i$, tais que a fórmula P_k é $P_j \to P_i$ e P_i foi *destacada* desta fórmula pela presença da fórmula P_j na sequência;
4. a fórmula P_n é a fórmula P, conclusão final deste *discurso*.

A notação $Q_1, \ldots, Q_m \vdash P$ (ou mais geralmente, $\Gamma \vdash P$, sendo que Γ é um conjunto finito ou infinito de fórmulas proposicionais, podendo ser vazio, caso em que denotamos apenas $\vdash P$) significa que existe uma dedução formal de P a partir das premissas $Q_1, \ldots, Q_m$ (ou de Γ, ou sem premissas, respectivamente).

Observemos que a definição de dedução formal não impõe que sejam usadas todas as hipóteses e nem que não haja redundâncias (por exemplo, citar hipóteses desnecessárias). A lógica que impõe tais restrições é diferente da que estamos estudando (chama-se *lógica relevante*) e tem bastante interesse para o estudo dos fundamentos da matemática, principalmente sob seu aspecto computacional. No entanto, as técnicas e ferramentas introduzidas no nosso estudo são úteis para o estudo de outras lógicas.

5.3.1 Os Conectivos Proposicionais

Introduziremos os conectivos proposicionais $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ a seguir, com os axiomas que cada um deve respeitar.

Vamos associar uma função de veracidade (ou binária, ou também, booleana) a cada fórmula proposicional A, recursivamente por:

1. a cada variável proposicional P_n, associamos a função $v_{P_n}(X_n) = X_n$;
2. seja A uma fórmula propósicional e v_A sua função associada; então associamos à fórmula $(\neg A)$ a função $v_{\neg A} = -v_A$;
3. sejam A e B duas fórmulas proposicionais, v_A e v_B suas respectivas funções associadas; então serão associadas às fórmulas $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \rightarrow B$ as funções $v_{A\wedge B} = v_A \cap v_B$, $v_{A\vee B} = v_A \cup v_B$ e $v_{A\rightarrow B} = (-v_A) \vee v_B$, respectivamente.

Daqui em diante, as tabelas-verdade referir-se-ão diretamente às fórmulas proposicionais correspondentes, segundo essa associação.

Uma *tautologia* é uma fórmula proposicional A, cuja função booleana correspondente v_A seja constante e igual a 1.

5.3.2 A Implicação e o Teorema da Dedução

A implicação "*se A então B*"tem a tabela verdade dada por

O primeiro axioma a seguir expressa que se a tese da implicação for verdadeira, então a implicação também o é:

Axioma 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabela 5.4: Tabela-verdade da implicação.

O segundo expressa uma espécie de *propriedade distributiva* da implicação:

Axioma 2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Vamos mostrar que a presença destes dois axiomas em qualquer sistema de axiomas caracterizam a seguinte afirmação:

> A implicação $(A \to B)$ é dedutível (talvez usando hipótese contidas num conjunto de fórmulas proposicionais Γ se, e somente se, B puder ser dedutível da hipótese A - e as hipóteses de Γ utilizadas).

Esta afirmação é o chamado Teorema da Dedução, que foi demonstrado primeiramente na tese de doutoramento de Jacques Herbrand[3]. Este teorema é válido para qualquer sistema de axiomas que contenham esses dois primeiros.

Para futura referência, destacamos inicialmente o seguinte resultado, que será usado também no Teorema da Dedução.

Lema 5.3.1 A fórmula $(A \to A)$ (reflexividade da implicação) é dedutível sem hipótses, ou seja, $\vdash (A \to A)$.

Demonstração: A seguinte dedução prova este lema:

1. $A \to ((A \to A) \to A)$ (*Axioma 1*)

[3]Viveu de 12/02/1908 a 27/07/1931 – morreu com 23 anos em um acidente de alpinismo nos Alpes Franceses. Apesar de ter rido uma vida tão curta, produziu resultados importantes em Lógica, particularmente na área da Teoria da Demonstração.

2. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (*Axioma 2*)

3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (*MP de 1 e 2*)

4. $A \to (A \to A)$ (*Axioma 1*)

5. $(A \to A)$ (*MP de 3 e 4*) $\square$

Teorema 5.3.1 (Teorema da Dedução.) Sejam Γ um conjunto (possivelmente vazio) de fórmulas proposicionais e A uma fórmula proposicional. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\Gamma, A \vdash B$,

2. $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $\Gamma \vdash (A \to B)$, e seja $A_1, \ldots, A_n$ uma dedução de $(A \to B)$ (que é a fórmula A_n) a partir de hipóteses de Γ. Então:

- A_1
- $\vdots$
- A_n (que é $(A \to B)$)
- A (listamos a hipótese A)
- B (MP das duas últimas fórmulas)

é uma dedução de B a partir de hipóteses de Γ e da hipótese A, testemunhando o fato que $\Gamma, A \vdash B$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma, A \vdash B$, e seja $A_1, \ldots, A_n$ uma dedução de B (que é a fórmula A_n) a partir de hipóteses de Γ e, possivelmente, usando a hipótese A. Vamos obter indutivamente uma dedução $B_1, \ldots, B_m$, de tamanho no máximo $m = 3n + 2$, e tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, exitirá $j \in \{1, \ldots, m\}$, tal que B_j será a fórmula $(A \to A_i)$. Como o A_1 somente pode ser axioma ou hipótese de Γ ou a fórmula A, e como estas situações podem ocorrer com alguns dos A_i's, trataremo genericamente de uma fórmula A_i da dedução original.

Se a fórmula A_i for um axioma, temos:

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
A_i & \text{(axioma)} \quad \left\{ \begin{array}{rll} B_{j-2}: & A_i \to (A \to A_i) & \text{(axioma)} \\ B_{j-1}: & A_i & \text{(axioma)} \\ B_j: & (A \to A_i) & \text{(MP de } j-2 \text{ e } j-1) \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Se a fórmula A_i for hipótese de Γ:

$$
\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_i \in \Gamma & \text{(hipótese)} & \left\{ \begin{array}{rll} B_{j-2}: & A_i \to (A \to A_i) & \text{(axioma)} \\ B_{j-1}: & A_i \in \Gamma & \text{(hipótese)} \\ B_j: & (A \to A_i) & \text{(MP: } j-2,\ j-1) \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Se a fórmula A_i for a hipótese A, usamos o lema acima:

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
A & \left\{ \begin{array}{rl} B_{j-4}: & A \to ((A \to A) \to A) \\ B_{j-3}: & (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\ B_{j-3}: & (A \to (A \to A)) \to (A \to A) \\ B_{j-3}: & A \to (A \to A) \\ B_j: & (A \to A) \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Por fim, suponhamos que A_i fora obtida pela regra do *Modus Ponens* (ou MP) de A_k e de A_l $(A_k \to A_i)$. Por hipótese de indução, já obtivemos B_m $(A \to A_k)$ e B_p $(A \to A_l)$, para $m, p < j$. Assim, teremos:

$$
\begin{array}{cc}
\vdots & \\
A_k & \left\{\begin{array}{rl} \vdots & \vdots \\ B_m: & A \to A_k \end{array}\right. \\
\vdots & \vdots \\
A_k \to A_i & \left\{\begin{array}{rl} \vdots & \vdots \\ B_p: & A \to A_l \end{array}\right. \\
\vdots & \vdots \\
A_i & \left\{\begin{array}{rl} B_{j-2}: & (A \to A_l) \to ((A \to A_k) \to (A \to A_i)) \text{ (axioma 2)} \\ B_{j-1}: & (A \to A_k) \to (A \to A_i) \text{ (MP: } p,\ j-2) \\ B_j: & (A \to A_i) \text{ (MP: } m,\ j-1) \end{array}\right. \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Observemos que se A_i for axioma, ou $A_i \in \Gamma$, ou A_i foi obtida por MP, então foram produzidas três fórmulas proposicionais na composição da dedução $B_1, \ldots, B_m$, impondo que $m \geq 3n$. Suponhamos que a fórmula A tenha sido usada como hipótese (e listada apenas uma vez entre os A_i's, para evitar redundâncias desnecessárias). Neste caso, o comprimento da dedução obtida será $m = 3(n-1) + 5 = 3n + 2$. $\square$

Exercício 5.3.1 Mostre que se A não foi usada como hipótese, ou seja, que $\Gamma \vdash B$, com uma dedução de comprimento n, então existe uma dedução de comprimento $n + 2$ de $(A \to B)$ a partir de Γ.

Exercício 5.3.2 Suponha que somente as hipóteses $A_1, \ldots, A_N$ foram relamente usadas numa dedução da fórmula B. Suponha ainda que tal dedução tenha comprimento (ou número de fórmulas listadas) m. Calcule o comprimento da dedução produzida pelo uso do Teorema da Dedução, da fórmula

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots \to (A_n \to B) \ldots)).$$

O Teorema da Dedução é muito útil para mostrar a existência de deduções de determinadas fórmulas proposicionais.

Lema 5.3.2 A propriedade da transitividade da implicação é dedutível, ou seja,
$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Demonstração: Se mostrarmos que
$$(A \to B), (B \to C), A \vdash C,$$
o Teorema da Dedução produzirá a dedução desejada. Vejamos:

1. $(A \to B)$ (*hipótese*)
2. A (*hipótese*)
3. B (*MP: 1 e 2*)
4. $(B \to C)$ (*hipótese*)
5. C (*MP: 3 e 4.*)

Esta dedução formal é testemunha da veracidade da afirmação que $(A \to B), (B \to C), A \vdash C$. □

5.3.3 A Negação

A tabela 5.5 contém a tabela-verdade do símbolo $\neg$ (*negação*).

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tabela 5.5: Tabela-verdade da negação $\neg A$.

Os princípios da não contradição e do terceiro excluído impõem o seguinte axioma:

Axioma 3 $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

Este axioma, junto com os dois primeiros, é suficiente para demonstrar as seguintes fórmulas proposicionais (que são tautologias - verifique esta afirmação).

Lema 5.3.3 São dedutíveis a partir dos três primeiros axiomas:

1. $\vdash (\neg\neg A) \to A$
2. $\vdash (\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$
3. $\vdash A \to (\neg\neg A)$
4. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

Demonstração:

(1) Pelo Teorema da Dedução, basta exibir uma dedução para $\neg\neg A \vdash A$, e como precisamos eliminar negações, usaremos o Axioma 3 com última conclusão a fórmula A; tendo como hipótese a fórmula $(\neg\neg A)$ e tendo já provado que $\vdash (\neg A) \to (\neg A)$, basta deduzir $((\neg A) \to (\neg\neg A))$ para obtermos as hipóteses do Axioma 3:

1. $\neg\neg A$ (*hipótese*)
2. $(\neg\neg A) \to ((\neg A) \to (\neg\neg A))$ (*axioma 1*)
3. $(\neg A) \to (\neg\neg A)$ (*MP: 1, 2*)
4. $((\neg A) \to (\neg A))$ (*incorporar*[4] *a dedução - já feita no Lema 5.3.1 - desta fórmula*)
5. $((\neg A) \to (\neg A)) \to (((\neg A) \to (\neg\neg A)) \to A)$ (*axioma 3*)
6. $((\neg A) \to (\neg\neg A)) \to A$ (*MP: 4, 5*)
7. A (*MP: 3, 6*)

[4]Na verdade, isto somente seria necessário se quiséssemos uma dedução formal explicitamente. Como a intenção aqui é mostrar a existência de uma tal dedução, basta citar o que já foi obtido *anteriormente* - cuidado com circularidade de raciocínio!

(2) É a repetição de (1) com a fórmula $\neg A$ no lugar de A.

(3) Pelo Teorema da Dedução, basta exibir dedução que testemunhe que $A \vdash \neg\neg A$, sendo que agora precisamos introduzir negações. O truque será o uso do Axioma 3 com última conclusão a fórmula $(\neg\neg A)$ e, portanto, precisamos ter como hipóteses $((\neg\neg\neg A) \to B)$ e $((\neg\neg\neg A) \to (\neg B))$. Como já temos a fórmula A disponível como hipótese e como já tínhamos provado em (2) que $\vdash (\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$, tomemos B como sendo a fórmula A:

1. A (*hipótese*)
2. $A \to ((\neg\neg\neg A) \to A)$ (*axioma 1*)
3. $(\neg\neg\neg A) \to A$ (*MP: 1, 2*)
4. $(\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$ (*incorporar a dedução já feita em (2)*)
5. $((\neg\neg\neg A) \to A) \to (((\neg\neg\neg A) \to (\neg A)) \to (\neg\neg A))$ (*axioma 3*)
6. $((\neg\neg\neg A) \to (\neg A)) \to (\neg\neg A)$ (*MP: 3, 5*)
7. $\neg\neg A$ (*MP: 4, 6*)

(4) Agora usaremos o Teorema da Dedução e também a propriedade transitiva da implicação (veja o Lema 5.3.2), para provar que $(A \to B), (A \to (\neg B)) \vdash \neg A$, novamente usando o Axioma 3 (como a conclusão pretendida é $(\neg A)$, precisamos produzir deduções das hipóteses $((\neg\neg A) \to B)$ e $((\neg\neg A) \to (\neg B)))$:

1. $(A \to B)$ (*hipótese*)
2. $(\neg\neg A) \to A$ (*incorporar a dedução já feita em (1)*)
3. $((\neg\neg A) \to A) \to ((A \to B) \to ((\neg\neg A) \to B))$ (*incorporar a dedução contida no Lema 5.3.2*)
4. $(A \to B) \to ((\neg\neg A) \to B)$ (*MP: 2, 3*)
5. $(\neg\neg A) \to B$ (*MP: 1, 4*)
6. $(A \to (\neg B))$ (*hipótese*)

7. $((\neg\neg A) \to A) \to ((A \to (\neg B)) \to ((\neg\neg A) \to (\neg B)))$ (*incorporar a dedução contida no Lema 5.3.2*)
8. $(A \to (\neg B)) \to ((\neg\neg A) \to (\neg B))$ (*MP: 2, 7*)
9. $(\neg\neg A) \to (\neg B)$ (*MP: 6, 8*)
10. $((\neg\neg A) \to B) \to (((\neg\neg A) \to (\neg B)) \to (\neg A))$ (*axioma 3*)
11. $((\neg\neg A) \to (\neg B)) \to (\neg A)$ (*MP: 5, 10*)
12. $\neg A$ (*MP: 9, 11*) $\square$

Exercício 5.3.3 Obtenha uma dedução da propriedade da *contrapositiva* da implicação, ou seja:

1. $\vdash (A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A))$
2. $\vdash ((\neg B) \to (\neg A)) \to (A \to B)$

Exercício 5.3.4 Mostre que a seguinte forma mais fraca do Axioma 3 não é suficiente para demonstrá-lo:

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$

ou seja, se usarmos os dois primeiros axiomas e esta fórmula como terceiro axioma, então a fórmula

$$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$$

não é dedutível. Para isto, usaremos o seguinte método: tabelas-verdade trivaloradas, que consiste em atribuir as tabelas de valores aos conectivos contidas nas Tabelas 5.6 e 5.7 e verificar, por indução nas deduções neste sistema, que as fórmulas dedutíveis assumem apenas o valor 2, enquanto que a versão original do Axioma 3 assume outros valores. Observe que, com a presença dos dois primeiros axiomas, o Teorema da Dedução ainda continua disponível.

A	$\neg A$
0	2
1	0
2	0

Tabela 5.6: Tabela trivalorada para a negação.

A	B	$A \to B$
0	0	2
0	1	2
0	2	2
1	0	0
1	1	2
1	2	2
2	0	0
2	1	1
2	2	2

Tabela 5.7: Tabela trivalorada para a implicação.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabela 5.8: Tabelas-verdade da conjunção ($A \wedge B$) e da disjunção ($A \vee B$).

5.3.4 Outros Conectivos Proposicionais

As tabelas-verdade para os conectivos $\wedge$ (*conjunção*, ou o conectivo "*e*") e $\vee$ (*disjunção*, também conhecido como "*ou - náo exclusivo*") estão na tabela 5.8.

Os axiomas para a conjunção são três, sendo que os dois primeiros introduzem o conectivo $\wedge$ do lado esquerdo (ou o da premissa) de uma implicação, e o terceiro o introduz do lado direito (ou da conclusão).

Axioma 4 $(A \wedge B) \rightarrow A$

Axioma 5 $(A \wedge B) \rightarrow B$

Observemos que são necessários ambos axiomas para que seja demonstrada a equivalência entre $A \wedge B$ e $B \wedge A$.

Axioma 6 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$

Lema 5.3.4 São dedutíveis:

1. $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ e $\vdash (B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$
2. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

Demonstração: **(1)** Por simetria de argumentação, basta exibir dedução testemunhando que $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$.

1. $(A \wedge B) \rightarrow A$ (*axioma 4*)
2. $(A \wedge B) \rightarrow B$ (*axioma 5*)
3. $((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)))$ (*axioma 6*)
4. $((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A))$ (*MP: 2, 3*)
5. $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ (*MP: 1,4*)

(2) Pelo Teorema da Dedução, basta exibirmos uma dedução testemunhando que $A, B \vdash (A \wedge B)$.

1. $A \rightarrow A$ (*incorporar a demonstração, feita no Lema 5.3.1, desta tautologia aqui*)
2. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (*axioma 1*)
3. B (*hipótese*)

4. $(A \to B)$ (*MP: 2, 3*)
5. $(A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to (A \wedge B)))$ (*axioma 6*)
6. $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$ (*MP: 1, 5*)
7. $A \to (A \wedge B)$ (*MP: 4, 6*)
8. A (*hipótese*)
9. $(A \wedge B)$ (*MP: 7, 8*) □

Os axiomas para a disjunção são três, sendo que os dois primeiros introduzem o conectivo $\vee$ do lado direito (ou o da conclusão) de uma implicação, e o terceiro o introduz do lado esquerdo (ou da premissa).

Axioma 7 $A \to (A \vee B)$

Axioma 8 $B \to (A \vee B)$

Axioma 9 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Por fim, o axioma que junta a disjunção, a conjunção e a negação:

Axioma 10 $(\neg(A \wedge B)) \to ((\neg A) \vee (\neg B))$

Exercício 5.3.5 Verifique que todos os axiomas listados são tautologias.

Exercício 5.3.6 Ache dedução das seguintes fórmulas, usando o Teorema da Dedução, se achar necessário. Podem ser usadas deduções anteriores, mas nunca as posteriores, para evitar argumentos circulares (do tipo, usa A para provar B e B para provar A).

1. $\vdash (A \vee B) \to (B \vee A)$ (não é preciso usar o Teorema da Dedução aqui)
2. $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
3. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
4. $(A \to B) \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

5. $(A \rightarrow B) \vdash (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
6. $((\neg A) \vee B) \vdash (A \rightarrow B)$ (dica: use uma forma conveniente do axioma 9)
7. $\neg(A \vee B) \vdash ((\neg A) \wedge (\neg B))$ (use o axioma 10 e a propriedade da contrapositiva da implicação)
8. $((\neg A) \vee (\neg B)) \vdash \neg(A \wedge B)$ (use formas convenientes dos axiomas 4, 5 e 9, além da propriedade contrapositiva da implicação)
9. $(B \wedge (\neg C)) \vdash \neg(B \rightarrow C)$
10. $\neg(B \rightarrow C) \vdash (B \wedge (\neg C))$
11. $\neg(A \wedge (\neg A))$
12. $A \vee (\neg A)$

Exercício 5.3.7 Seja Γ, um conjunto de hipóteses. Demonstre as seguintes afirmações:

1. Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$, então $\Gamma \vdash (A \wedge B)$.
2. Se $\Gamma, A \vdash C$ e $\Gamma, B \vdash C$, então $\Gamma, (A \vee B) \vdash C$.
3. Se $\Gamma, A \vdash B$ e $\Gamma, (\neg A) \vdash B$, então $\Gamma \vdash B$.
4. Se $\Gamma \vdash B$, então $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$
5. Se $\Gamma \vdash (\neg A)$, então $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

5.4 Correção e Completude

As tabelas-verdade introduzidas para os conectivos proposicionais dão significado a eles, dizendo em que casos as fórmulas proposicionais obtidas são verdadeiras (valor 1) ou falsas (valor 0). Escolhemos dez padrões de fórmulas proposicionais, que são tautologias, e as chamamos de *axiomas*. Definimos também o que vem a ser uma dedução formal, como uma sequência de fórmulas proposicionais satisfazendo o requisito de que cada uma delas pode ser a citação de uma hipótese, ou a citação de um axioma, ou ela pode ser obtida de duas fórmulas anteriormente listadas, pela regra de *Modus Ponens* (abreviadamente, MP).

Mostremos que essa noção de dedução formal é *correta* em relação às tabelas-verdade, no sentido que, se partirmos de hipóteses verdadeiras, obteremos conclusões verdadeiras, ou, mais geralmente, o valor da conclusão não póde ser menor do que o menor valor das hipóteses.

Teorema 5.4.1 (Teorema da Correção) Se $\vdash A$, então A é uma tautologia. Mais geralmente, dados o conjunto de hipóteses Γ e $v : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ (uma linha de tabela-verdade), se $\Gamma \vdash A$, então $v(A) \geq \inf\{v(C) : C \in \Gamma\}$.

Demonstração: Seja $v : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ (uma linha de tabela-verdade) e suponha que afirmação $\Gamma \vdash A$ seja testemunhada pela dedução formal $A_1, \ldots, A_n$. Se, para algum $C \in \Gamma$ acontecer que $v(C) = 0$, então, certamente, $v(A) \geq 0$ e nada mais precisamos demonstrar. portanto, podemos supor que $v(C) = 1$, para cada $C \in \Gamma$. Por indução em $i \in \{1, \ldots, n\}$, provaremos que $v(A_i) = 1$. Se A_i for axioma, sendo uma tautologia, certamente $v(A_i) = 1$. Se A_i for hipótese de Γ, $v(A_i) = 1$ devido à suposição feita acima. Se foi obtida pela regra do *Modus Ponens* de A_j e A_k, com $1 \leq j, k < i \leq n$, digamos que A_k seja a fórmula $(A_j \to A_i)$. Por hipótese de indução, $v(A_j) = v(A_k) = v(A_j \to A_i) = 1$. Mas isto somente poderá ocorrer se $v(A_i) = 1$, como queríamos. □

Exercício 5.4.1 Verifique, usando o Teorema da Correção, que:

1. $(A \to B) \nvdash (B \to A)$
2. $((A \wedge C) \to (B \wedge C)) \nvdash (A \to B)$
3. $((A \vee C) \to (B \vee C)) \nvdash (A \to B)$

O Teorema da Completude[5] diz a recíproca da Correção, ou seja, se for tautologia, então será dedutível. O sistema dedutivo introduzida é completo, no sentido de deduzir tudo o que pode ser corretamente deduzido.

[5]No dicionário podemos encontrar a substantivação *completitude* do adjetivo *completo*. Mas tem sido praxe dos lógicos usar a palavra *completude* para significar o que vamos estudar aqui.

O ingrediente principal é o resultado seguinte, que produz uma dedução a partir de informação acerca de tabelas-verdade das fórmulas envolvidas. Observemos que, no caso proposicional, tudo o qua provamos é algorítmico.

Teorema 5.4.2 Seja $v : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ (uma linha de tabela-verdade) e, para cada fórmula proposicional A, seja A' a própria fórmula A se $v(A) = 1$ e $(\neg A)$, caso $v(A) = 0$. Suponha que as variáveis proposicionais que ocorram em A estejam entre as seguintes: $P_0, \ldots, P_n$. Então

$$P'_0, \ldots P'_n \vdash A'.$$

Demonstração: Esta será uma demonstração por indução na complexidade da fórmula A.

O passo inicial é trivial: $P'_0, \ldots, P'_j, \ldots, P'_n \vdash P'_j$.

Suponha que este teorema já tenha sido provado para todas as fórmulas de complexidade menor ou igual a n e seja A uma fórmula de complexidade $n+1$. Temos que considerar quatro casos. Para economizar na notação, seja $\Gamma' = \{P'_0, \ldots, P'_n\}$.

CASO 1 (NEGAÇÃO): A é a fórmula $\neg B$ e a hipótese de indução se aplica à fórmula B, ou seja, $\Gamma' \vdash B'$. Caso $v(B) = 0$, então $v(A) = 1$ e B' é a fórmula $(\neg B)$, ou seja A, que coincide com A'. Portanto $\Gamma' \vdash A'$ decorre diretamente da hipótese de indução. No caso em que $v(B) = 1$, temos que $v(A) = 0$ e, portanto B' é B e A' é $(\neg\neg B)$. Como, por hipótese de indução, $\Gamma' \vdash B$ e como $\vdash (B \to (\neg\neg B))$, segue que $\Gamma' \vdash (\neg\neg B)$, ou seja, $\Gamma' \vdash A'$.

CASO 2 (IMPLICAÇÃO): A é a fórmula $(B \to C)$ e a hipótese de indução aplica-se a B e a C, ou seja, $\Gamma' \vdash B'$ e $\gamma' \vdash C'$. Se $v(C) = 1$, então $v(A) = 1$ e A' coincide com A e, por hipótese de indução, $\Gamma' \vdash C$, o que implica que $\Gamma' \vdash (B \to C)$, ou seja $\gamma' \vdash A'$. O mesmo ocorre com o caso em que $v(B) = 0$. Se $v(C) = 0$ e $v(B) = 1$, então $v(A) = 0$ e A' é a fórmula $\neg(B \to C)$. Como B' é B e C' é $(\neg C)$, a hipótese de indução consiste em $\Gamma' \vdash B$ e $\Gamma' \vdash (\neg C)$, o que implica que $\Gamma' \vdash (B \wedge (\neg C))$. Como $(B \wedge (\neg C)) \vdash \neg(B \to C)$, obtemos a conclusão desejada: $\Gamma' \vdash A'$.

CASO 3 (DISJUNÇÃO): A é $(B \vee C)$. O tratamento é análogo ao do caso 2 e fica como exercício.

CASO 4 (DISJUNÇÃO): A é $(B \wedge C)$. Se $v(A) = 1$, então $v(B) = v(C) = 1$ e a hipótese de indução toma a forma $\Gamma' \vdash B$ e $\Gamma' \vdash C$, o que implica que $\Gamma' \vdash (B \wedge C)$, ou seja, $\Gamma' \vdash A'$. Se $v(A) = 0$, então $v(B) = 0$ ou $v(C) = 0$. Caso seja $v(B) = 0$, B' é $(\neg B)$ e a hipótese de indução toma a forma $\Gamma' \vdash (\neg B)$. Usando o axioma 4 e a propriedade da comtrapositiva da implicação, obtemos que $\Gamma' \vdash \neg(B \wedge C)$, isto é, $\Gamma' \vdash A'$. O caso em que $v(C) = 0$ tem tratamento similar. $\square$

Teorema 5.4.3 (Teorema da Completude) Sejam Γ, um conjunto de hipóteses, e A, uma fórmula proposicional, tais que, para todas $v : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ atribuindo $v(C) = 1$ a cada $C \in \Gamma$, também atribuem $v(A) = 1$. Então $\Gamma \vdash A$. Em particular, se A for uma tautologia, então $\vdash A$.

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que A não seja uma tautologia (isto implica que Γ não pode ser vazio!). Afirmamos que existem $C_1, \ldots, C_k \in \Gamma$ (um conjunto de hipóteses que pode até ser infinito), tais que $(C_1 \to (C_2 \to (\ldots \to (C_k \to A) \ldots)))$ será uma tautologia.

De fato, se A contiver n variáveis proposicionais, sua tabela-verdade terá 2^n linhas. Sejam $L_1, \ldots, L_k$ $(k \geq 1)$ todas as linhas em que A valha 0. Por hipótese sobre Γ e A, devem existir $C_1, \ldots, C_k \in \Gamma$, tais que C_i valerá 0 na linha L_i, $1 \leq i \leq k$. Assim, a fórmula $(C_1 \to (C_2 \to (\ldots \to (C_k \to A) \ldots)))$ valerá 1 nessas linhas e também nas outras (verifique esta afirmação, como exercício!), ou seja, será uma tautologia.

Na presença do Teorema da Dedução, basta demonstrarmos este Teorema para uma tautologia A.

Seja A uma tautologia e sejam $P_0, \ldots, P_n$ variáveis proposicionais tais que essa lista contenha as variáveis que ocorram em A. Sejam $v_j = (a_{0,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \{0, 1\}^n$, $0 \leq j = \sum_{m=0}^{n} a_{m,j}\, 2^{n-m} \leq 2^{n+1} - 1$, atribuições de valores às variáveis $P_0, \ldots, P_n$. Para cada i e cada j, seja $P_i^{L_j}$ a própria variável P_i se $a_{i,j} = 1$, e a sua negação, $(\neg P_i)$, caso $a_{i,j} = 0$. Sejam $\Gamma'_j = \{P_0^{L_j}, \ldots, P_n^{L_j}\}$, $0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1$. Pelo teorema anterior, $\Gamma'_j \vdash A$. Vamos eliminar as hipóteses, considerando, em primeiro lugar, os pares $\Gamma'_{2k} \vdash A$ e $\Gamma'_{2k+1} \vdash A$. Com a enumeração indicada acima dos conjuntos de hipóteses, vemos que a última fórmula de Γ'_{2k} é $(\neg P_n)$ e a de Γ'_{2k+1} é P_n, sendo que todas as outras coincidem em ambos os conjuntos. Assim, temos uma situação do tipo $\Gamma'', (\neg P_n) \vdash A$ e $\Gamma'', P_n \vdash A$, do que podemos concluir que $\Gamma'' \vdash A$, ou seja, eliminamos a ocorrência da variável P_n e de sua negação. Fazendo o mesmo com todos os pares, obteremos afirmações do tipo $P_0^{L_j}, \ldots, P_{n-1}^{L_j} \vdash A$. Continuando este processo, agora com a variável P_{n-1}, esta também será eliminada das hipóteses. Indutivamente, eliminamos todas as hipóteses, seguindo este procedimento. $\square$

Observe-se que esta demonstração é plenamente realizável como um algoritmo que produz uma dedução (enorme) de uma fórmula a partir de um conjunto de hipóteses, conhecendo-se sua tabela-verdade. No próximo capítulo empreenderemos o estudo do cálculo de predicados, em que perderemos de vista este aspecto computacional. No capítulo sobre os teoremas de incompletude, veremos que essa perda é um problema intrínseco do cálculo de predicados e, portanto, não existe (em geral!) demonstração algorítmica dos análogo teorema da completude.