Capítulo 6

Cálculo de Predicados

6.1 Introdução

Relembrando que Bertrand Russell desenvolveu sua Teoria de Tipos para evitar os paradoxos que uma linguagem formal muito expressiva [1] apresentava, e que essa teoria dividia os objetos do discurso matemático em níveis, destacaram-se nos estudos posteriores os dois primeiros níveis: o nível zero (ou *ordem zero*), que consiste no que hoje chamamos de Cálculo Proposicional, e no nível 1 (ou *primeira ordem*) que seria o que hoje chamamos de Lógica (ou Cálculo de Predicados) de Primeira Ordem. Na verdade, são os únicos níveis em que o fenômeno da completude acontece, ou seja, todas as fórmulas que puderem ser deduzidas no sistema todo, já poderiam sê-lo usando-se apenas axiomas e deduções restritos à primeira ordem. Já vimos a completude do nível zero no capítulo anterior e veremos a do nível 1 neste capítulo. No próximo capítulo veremos que perderemos o aspecto algorítmico do Teorema da Completude - ou seja, não existe nem um algoritmo que decida (uniformemente) se uma fórmula seria *válida* (o análogo de tautologia).

[1] Veja sobre Frege e o Paradoxo de Russell no Capítulo Histórico.

6.2 A Teoria da Verdade de Tarski

Alfred Tarski [2] preocupou-se desde cedo com o problema filosófico de definir o conceito de *verdade* para sentenças de uma dada linguagem. Em seu famoso artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas* [3] atacou pela primeira vez o problemas. Concluiu que era impossível definir verdade para as linguagens naturais [4], ficando com o caso das linguagens formalizadas da matemática.

Essencialmente, dividiu seu contexto em duas linguagens, uma formalizada (ou *linguagem objeto*), para a qual se deseja definitr verdade e, portanto, não pode conter nenhuma noção interna de verdade, e uma linguagem mais expressiva, chamada de metalinguagem, com os seguintes requisitos:

1. ela deve conter a linguagem objeto;

2. deve interpretar os símbolos lógicos da linguagem objeto;

3. deve conter um mínimo necessário de Teoria dos Conjuntos.

Reduziu o problema de definição de verdade para a linguagem objeto à noção de *satisfação*, que veremos na seção seguinte.

Apesar de ser uma teoria matematicamente útil, não é completamente aceita filosoficamente [5].

---

[2]Seu nome verdadeiro era Alfred Tajtelbaum. Nasceu em Varsóvia, na Polônia, em 14 de janeiro de 1901, de família judia. Em 1923, converteu-se ao catolicismo e mudou o sobrenome para Tarski - o anti-semitismo era muito forte na época. Foi considerado um dos maiores lógicos do século XX. Faleceu nos EUA, para onde emigrou com o início da Segunda Guerra Mundial, em 27 de outubro de 1983.

[3]Publicada em russo em 1933 e traduzida para o inglês em 1983. A tradução em português saiu em [**?**].

[4]Devido à sua riqueza de expressão, que permitiria auto-referência e internalizar o conceito de verdade, ingredientes que produzem facilmente o paradoxo do mentiroso.

[5]Consulte a obra de Richard L. Kirkham, **Theories of Truth. A Critical Introduction**, The MIT Press, Cambridge, MA, EUA, 1992, especialmente os capítulos 5 e 6.

6.3 Estruturas e Linguagens Formais de Primeira Ordem

Estruturas matemáticas carregam consigo, em geral, elementos distinguidos (por exemplo, o zero, como elemento neutro da soma em $\mathbb{Z}$), operações (a soma e o produto em $\mathbb{Z}$) e relações (por exemplo, a ordem em um conjunto ordenado). É prática comum usarmos os mesmos símbolos (por exemplo, 0, 1, $+$, $<$, etc.) para indicar elementos distinguidos, operações e relações das várias estruturas dentro de uma classe (por exemplo, espaços vetoriais, aneis, corpos ordenados, etc.) Esse conjunto de símbolos será chamado de **assinatura** daquela classe de estruturas. Mais especificamente, uma assinatura é um conjunto $L = C \cup F \cup R$, sendo que C, F e R são conjuntos dois a dois disjuntos, $F = \bigcup_{n\geq 1} F^n$, $R = \bigcup_{n\geq 1} R^n$ e supomos que possamos distinguir se um dado elemento está em C, ou em algum F^n ou em um R^n (por exemplo, os elementos de C podem ser pares ordenados $(0, i)$, $i \in I$, os de F^n triplas ordenadas $(1, n, j)$ $j \in J$ e os de R^n triplas ordenadas $(2, n, k)$, $k \in K$).

Dada uma assinatura L, uma **estrutura** para L (ou L-estrutura) é uma quadrupla $\mathcal{M} = (M, C^M, F^M, R^M)$ em que M é um conjunto não vazio (o **domínio** da estrutura), C^M é uma aplicação de C em M (isto é, a cada símbolo de constante $c \in C$ associamos um elemento $c^M \in M$), F^M é uma associação dos símbolos de função $f \in F$ a funções $f^M : M^n \to M$ (sendo f n-ária) e R^M uma associação dos símbolos de relação $P \in R$ a relações (subconjuntos de M^n, sendo P n-ário) P^M em M.

Devido a um saudável [6] abuso de linguagem, denotaremos a estrutura $\mathcal{M}$ por M, seu conjunto subjacente, quando a estrutura estiver subentendida.

Um **morfismo** de L-estruturas é uma aplicação $\Phi : M \to N$ tal que se $c \in C$, $\Phi(c^M) = c^N$ [7], se $f \in F$ é n-ária, $\Phi(f^M(x_1, \ldots, x_n)) = f^N(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$, e se $P \in R$ é n-ária, então $(x_1, \ldots, x_n) \in P^M$ se, e só se, $(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \in P^N$. Se Φ é bijetora, dizemos que é um **isomorfismo** (de L-estruturas).

Uma **linguagem de primeira ordem** consiste num alfabeto que contém os símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ e $\forall$, e também o da igualdade $=$ será considerado como símbolo lógico; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis

[6] Antigamente usava-se o alfabeto gótico para denotar a estrutura: $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$.

[7] Esta condição restringe a existência de morfismos - por exemplo, a inclusão do anel nulo $\{0\}$, em que $0 = 1$ em outro anel não nulo não será considerado como morfismo.

Var = $\{x_n : n \in \omega\}$; símbolos não lógicos são os de uma assinatura L; além disso a linguagem tem regras (gramaticais) de formação de expressões bem fundadas, ou fórmulas e sentenças.

Como o que muda de uma linguagem a outra é apenas a assinatura L, usaremos o símbolo L também para denotar a linguagem de primeira ordem assim obtida.

Exemplo 6.3.1 A linguagem da teoria dos grupos contém os símbolos e de constante (para o elemento neutro) e o símbolo de função binária, para a operação do grupo.

Exemplo 6.3.2 A linguagem da teoria dos anéis contém os símbolos de constantes 0 e 1, e as operações binárias $+$ e $\cdot$, com as interpretações usuais.

Exemplo 6.3.3 A linguagem da teoria dos anéis ordenados contém os símbolos de constantes 0 e 1, e as operações binárias $+$ e $\cdot$, uma relação binária $\leq$, com as interpretações usuais. Pode também ser usado o símbolo de função unária $-$ para o oposto de um elemento.

Para descrever as regras gramaticais, comecemos pelos **termos de** L (ou L-termos):

Somente serão considerados termos as sequências de símbolos s de L para as quais existe uma sequência finita $s_1, \ldots, s_m$ tal que s é o último elemento da sequência, s_m, e cada s_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- s_i é uma variável, ou
- um símbolo de constante, ou
- s_i é $f(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$ sendo que f é um símbolo de função n-ária e $i_1, \ldots, i_n < i$ (isto é, já foram obtidos anteriormente).

Com isto também podemos definir a **complexidade do termo** s, $c(s)$, como o menor m tal que existe uma sequência como acima.

Agora podemos definir **fórmula de** L (ou L-fórmula).

Somente serão consideradas fórmulas as sequências de símbolos φ de L para as quais existe uma sequência finita $\phi_1, \ldots, \phi_m$ tal que φ é ϕ_m e cada ϕ_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- ϕ_i é $t_1 = t_2$ (ou mais pedantemente, "$= (t_1, t_2)$"), sendo que t_1 e t_2 são termos, ou
- $R(t_1, \ldots, t_n)$, sendo que R é símbolo relacional n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, ou
- $\phi_j \wedge \phi_k$, ou $\phi_j \vee \phi_k$, ou $\neg\phi_j$, em que $j, k < i$, ou
- $\exists x \phi_k$ or $\forall x \phi_k$, sendo que x é uma variável e $k < i$; neste caso, a fórmula ϕ_k será chamada de *escopo* do quantificador $\forall x$ ou $\exists x$.

As fórmulas do tipo $t_1 = t_2$ e do tipo $R(t_1, \ldots, t_n)$ são chamadas de **fórmulas atômicas**.

Com isto também podemos definir a **complexidade da fórmula** φ como o menor m tal que existe uma sequência como acima.

Dada uma fórmula φ, definimos como **variáveis livres** as variáveis x que ocorram em φ e que não estejam no escopo de um quantificador $\exists x$ ou $\forall x$.

Mais especificamente, definimos por indução na complexidade de φ o conjunto das variáveis livres de φ, $VL(\varphi)$ como:

- se φ for atômica, $VL(\varphi)$ contém exatamente as variáveis que ocorrem nor termos de φ;
- se φ for $\neg\psi$, então $VL(\varphi) = VL(\psi)$;
- se φ for $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \vee \phi_2$ então $VL(\varphi) = VL(\phi_1) \cup VL(\phi_2)$;
- por fim, se φ for $\exists x\, \psi$ ou $\forall x\, \psi$ então $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$. Neste caso, x é dita **variável ligada**.

Costuma-se escrever $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ quando $VL(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Uma fórmula φ é uma **sentença** se $VL(\varphi)$ for vazio.

Vamos definir agora a relação de **satisfação**, $\models$, que relaciona estruturas e fórmulas. Vamos definir esta relação por indução na complexidade das fórmulas. Dadas uma estrutura M, uma **atribuição de valores** $s : \mathrm{Var} \to M$ e uma fórmula φ, definimos $M \models \varphi[s]$ por etapas.

Primeiramente, definiremos **interpretação de termos** em M dada s, $t^M[s]$ ou apenas $s(t)$, como:

- se t é a constante c, $t^M[s] = c^M$;
- se t é uma variável x, $t^M[s] = s(x)$;
- se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, $t^M[s] = f^M(t_1^M[s], \ldots, t_n[s])$.

Usaremos apenas a notação $s(t)$ no lugar de $t^M[s]$, reservando esta última quando for necessária.

Agora definiremos **interpretação das fórmulas** em M, isto é, a relação $M \models \varphi[s]$ (leia-se M satisfaz φ em s, ou que M é **modelo** de φ):

- se φ é atômica, $P(t_1, \ldots, t_n)$ (incluindo o caso $t_1 = t_2$), $M \models \varphi[s]$ se $(s(t_1), \ldots, s(t_n)) \in P^M$;
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ e $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ ou $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\neg\phi$, $M \models \varphi[s]$ se não ocorrer que $M \models \phi[s]$ (ou $M \not\models \phi[s]$);
- se φ é $\exists x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $a \in M$ tal que se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\forall x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $a \in M$, se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$

Pelo exercício 6.6.4, a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ. Neste caso, usando a notação $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ descrita acima, e sendo $a_i = s(x_i)$, podemos escrever a relação $M \models \varphi[s]$ na forma $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. No caso das sentenças, denotaremos $M \models \varphi$, omitindo a atribuição de valores s.

6.4 Completude e Compacidade

Uma vez que tenhamos dado uma semântica (significado, ou interpretação na metalinguagem), vamos estender a noção de dedução formal do cálculo proposicional para incorporar o tratamento dos novos símbolos introduzidos.

6.4.1 Dedução formal

Agora trabalharemos (quase) totalmente em L, descrevendo o que é uma demonstração formal em L sem fazer apelo a estruturas. Escolheremos um conjunto de fórmulas para que constituam os axiomas e descreveremos as regras de inferência usadas em demonstrações formais.

Para isto, precisamos olhar mais de perto as fórmulas de L e separar o que é puramente proposicional de quantificação.

Dada uma fórmula φ, o conjunto das **subfórmulas proposicionais** de φ é o conjunto $SFP(\varphi)$ definido por indução:

- se φ é atômica ou da forma $\exists x\phi$ ou $\forall x\phi$, $SFP(\varphi) = \{\varphi\}$ (neste caso chamaremos φ de **fórmula proposicional atômica**);
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, ou $\phi_1 \vee \phi_2$, então $SFP(\varphi) = SFP(\phi_1) \cup SFP(\phi_2)$;
- se φ é $\neg\phi$, $SFP(\varphi) = SFP(\phi) \cup \{\neg\phi\}$.

Podemos reconstruir uma fórmula φ a partir de suas subfórmulas proposicionais atômicas usando os conectivos proposicionais $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Definimos, para simplificar a notação, $A \to B$ como $\neg A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$ como $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Observe que "$\wedge$" e "$\vee$" podem ser definidos a partir de "$\to$" e "$\neg$" (como exercício, verifique isto).

Atribuindo-se valores V ou F (verdadeiro ou falso) às sufórmulas atômicas de φ, fazemos a tabela verdade de φ da maneira usual (como exercício, faça isto), determinamos se φ é ou não **taultologia proposicional**. No raciocínio matemático, as tautologias proposicionais são usadas em qualquer demonstração.

Por uma questão técnica que ficará clara adiante tomaremos não as tautologias mas as várias generalizações delas. Uma **generalização** de uma fórmula φ é a fórmula $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n}\varphi$, sendo que $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ é um conjunto (possivelmente vazio) de variáveis, podendo haver até repetições, ou variáveis que nem ocorram em φ.

Por isto, definimos o primeiro esquema de axiomas:

Axiomas I: Todas as generalizações de cada tautologia proposicional.

Passemos agora ao tratamento da quantificação.

O primeiro problema que encontramos ocorre quando queremos tomar um caso particular de uma fórmula da forma $\forall x\phi$, tirando o quantificador $\forall x$ e trocando x em ϕ por um termo t. Para evitar besteiras do tipo φ é $\forall x\exists y(x \neq y)$, t é a variável y, e a substituição descuidada ficaria $\exists y(y \neq y)$, precisamos definir corretamente este processo.

A **substituição livre** da variável x pelo termo t em ϕ, $S^t_x\phi$ ou $\phi|_{x=t}$, é definida por indução na complexidade de ϕ:

- se ϕ é atômica, $\phi|_{x=t}$ é obtida de ϕ pela substituição de toda ocorrência de x por t;
- se ϕ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \wedge \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \vee \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\exists y\psi$ (ou $\forall y\psi$) e nenhuma variável em t é y, então $\phi|_{x=t}$ é $\exists y(\psi|_{x=t})$ (ou, respectivamente, $\forall y(\psi|_{x=t})$);
- se ϕ é $\exists y\psi$ (ou $\forall y\psi$), mas y ocorre em t, então $\phi|_{x=t}$ é a prórpia ϕ.

Com isto introduzimos o segundo esquema de axiomas:

Axiomas II: Para cada fórmula ϕ e cada termo t, as generalizações das fórmulas $\forall x\phi \to (\phi|_{x=t})$ e $(\phi|_{x=t}) \to \exists x\phi$.

Os próximos tratam de como distribuir quantificação em implicações.

Axiomas III: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ, todas as generalizações de $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$, $(\exists x\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

Axiomas IV: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ, e variável x que não seja livre em ϕ, todas as generalizações de $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$, $(\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

Axiomas V: Para cada fórmula ϕ e variável x, todas as generalizações de $\forall x\phi \to \neg(\exists x\neg\phi)$ e de $\neg(\exists x\neg\phi) \to \forall x\phi$.

E, por fim, os axiomas da igualdade.

Axiomas VI: As generalizações de $x = y \to y = x$, $x = x$ e, para cada símbolo de relação n-ária P e termos $t_1, \ldots, t_n$, as generalizações de

$$P(t_1, \ldots, t_n) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i = y_i\right) \to P(t'_1, \ldots, t'_n),$$

sendo que t'_i é obtido de t_i por zero ou mais substituições de ocorrências das variáveis x_j por y_j.

Agora podemos definir **dedução formal** de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ (as "hipóteses") tal que $VL(\Gamma) = \bigcup\{VL(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ seja finito, é uma sequência finita de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ tal que ϕ_n é φ e cada ϕ_i satisfaz um dos quesitos abaixo:

- ϕ_i é axioma, ou
- $\phi_i \in \Gamma$ (cita uma hipótese), ou
- (*Modus Ponens* ou *Destacamento*) existem $j, k < i$ tais que ϕ_k é $\phi_j \to \phi_i$, ou
- (*Generalização*) existe $j < i$ e variável $x \notin VL(\Gamma)$ e ϕ_i é a fórmula $\forall x \phi_j$.

Neste caso dizemos que φ é **dedutível a partir de** Γ e escrevemos $\Gamma \vdash \varphi$. Se Γ é vazio, dizemos apenas que φ é **dedutível**, e escrevemos $\vdash \varphi$.

A regra da generalização nada mais é do que o conhecido argumento de que "*como x é arbitrário, (uma dada propriedade) vale para todo x*", e, na verdade, pode ser derivada, ou seja:

Lema 6.4.1 Se $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi$, então existe dedução de $\forall x\, \psi$ a partir das hipóteses de Γ em que não se usa a regra de generalização, mas apenas a regra do *Modus Ponens*.

Demonstração: Sem perda de generalidade (ou por indução na demonstração), podemos supor que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ é dedução de ψ a partir de Γ em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter desta uma dedução de $\forall x\, \psi$ sem usar a regra de generalização, por indução no tamanho da demonstração. Na verdade, a hipótese de indução é que $\Gamma \vdash \forall x\, \psi_j$, para todo $j < i$, $1 \leq i \leq n$ (sendo que o passo inicial a hipótese é vazia).

Dividimos em três casos:

- se ψ_i é axioma, então $\forall x\, \psi_i$ também é axioma e, portanto, $\Gamma \vdash \forall x\, \psi_i$;
- se $\psi_i \in \Gamma$, então $x \notin VL(\psi_i)$ e temos a seguinte dedução:

1. ψ_i (listamos uma hipótese de Γ)
2. $\forall x(\psi_i \to \psi_i)$ (é axioma proposicional)
3. $\forall x(\psi_i \to \psi_i) \to (\psi_i \to \forall x\, \psi_i)$ (uma forma do axioma IV)
4. $(\psi_i \to \forall x\, \psi_i)$ (destacamento de 2 e 3)
5. $\forall x\, \psi_i$ (destacamento de 1 e 4)

- se ψ_i foi obtida por destacamento, existem $j, k < i$, tais que ψ_k é a fórmula $(\psi_j \to \psi_i)$ e, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \forall x \psi_j$ e $\Gamma \vdash \forall x(\psi_j \to \psi_i)$; assim, temos a seguinte dedução, agregada ás deduções da hipótese:

  1. $\forall x(\psi_j \to \psi_i) \to (\forall x \psi_j \to \forall x \psi_i)$ uma forma do axioma III)
  2. $(\forall x \psi_j \to \forall x \psi_i)$ (destacamento de 1 com $\forall x(\psi_j \to \psi_i)$, obtida anteriormente)
  3. $\forall x \psi_i$ (destacamento de 2 com $\forall x \psi_j$, obtida anteriormente).

Com isto terminamos a demonstração. □

Uma consequência importante e útil disso é o seguinte resultado.

Teorema 6.4.1 Se o símbolo de constante c não ocorre em nenhuma fórmula de Γ, $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi|_{x=c}$, então $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$.

Demonstração: Denotemos $\theta|_{c=x}$ a operação de trocar todas as ocorrências de c pela variável x na fórmula θ. Observemos que se θ é um axioma, então $\theta|_{c=x}$ também é axioma (verifique caso a caso); se $\theta \in \Gamma$, então $\theta|_{c=x}$ é a própria θ. Observemos também que $(\theta \to \eta)|_{c=x}$ é a fórmula $(\theta|_{c=x} \to \eta|_{c=x}$.

Assim, se $\psi_1, \dots, \psi_n$ é dedução de $\psi|_{x=c}$, então $\psi_1|_{c=x}, \dots, \psi_n|_{c=x}$ é uma dedução de $\psi|_{c=x}$ e, como $x \notin VL(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \forall x \psi$. □

O próximo teorema é muito importante, pois diz que a implicação codifica de certa maneira a relação de dedução, $\vdash$. Além disso será muito útil em aplicações.

Teorema 6.4.2 (Teorema da Dedução) $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ se, e só se, $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Demonstração: Podemos supor que a regra de generalização não foi usada para mostrar que $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. Assim, basta acrescentar as fórmulas ϕ (hipótese de $\Gamma \cup \{\psi\}$) e ψ (destacamento) a tal dedução, oara mostrarmos que $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Para a recíproca, suponha agora que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ seja dedução de ψ a partir de Γ e ϕ, em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter por indução na demonstração que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_j$, $1 \leq j \leq n$:

- se ψ_i é axioma ou elemento de Γ, a seguinte dedução prova que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$:
    1. ψ_i (axioma ou hipótese de Γ)
    2. $\psi_i \to (\phi \to \psi_i)$ (axioma I)
    3. $(\phi \to \psi_i)$ (destacamento);
- se ψ_i foi obtida por destacamento de ψ_j e ψ_k, $j, k < i$, digamos que ψ_k seja a fórmula $(\psi_j \to \psi_i)$, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_j$ e $\Gamma \vdash \phi \to \psi_k$; agregamos e essas deduções as seguintes fórmulas:
    1. $(\phi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i))$ (axioma I)
    2. $(\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i)$ (destacamento de 1 com $(\phi \to (\psi_j \to \psi_i))$, obtida anteriormente)
    3. $(\phi \to \psi_i)$ (destacamento de 2 com $(\phi \to \psi_j)$, também obtida anteriormente).

Com isso fica provado o teorema. □

Dizemos que o conjunto Γ é **consistente** se não existir fórmula ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Teorema 6.4.3 $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente se, e só se, $\Gamma \nvdash \phi$.

Demonstração: Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Se $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não é consistente, seja ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Então $\Gamma \vdash \neg\phi \to \psi \wedge \neg\psi$. Como $(\neg\phi \to \psi \wedge \neg\psi) \to \phi$ é tautologia, $\Gamma \vdash \phi$. □

6.4.2 Correção, Completude e Compacidade

Dizemos que φ é **consequência semântica** do conjunto de fórmulas Γ (com $VL(\Gamma)$ finito), e denotamos $\Gamma \models \varphi$, se para toda estrutura M e toda atribuição de valores $s : \text{Var} \to M$, se $M \models \Gamma[s]$ (isto é, se $M \models \gamma[s]$, para cada $\gamma \in \Gamma$), então $M \models \varphi[s]$.

Teorema 6.4.4 (Teorema da Correção) Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \models \phi$.

Demonstração: Seja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uma dedução de ϕ a partir de Γ, em que não foi usada a regra de generalização. Vamos mostrar por indução no comprimento da dedução que $\Gamma \models \phi_i$. Seja M uma estrutura e s atribuição de valores, e suponha que $M \models \Gamma[s]$. Se ϕ_i é axioma ou pertence a Γ então trivialmente $\Gamma \models \phi_i$. Se foi obtida por modus ponens, de ϕ_j e ϕ_k com $j, k < i$ então pela hipótese de indução vemos que $M \models \phi_i[s]$, e portanto $\Gamma \models \phi_i$. $\square$

A recíproca deste resultado é bem mais trabalhosa e é o chamado Teorema da Completude.

Teorema 6.4.5 (Teorema da Completude I) Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.

Para provarmos este teorema, provaremos um resultado equivalente.

Teorema 6.4.6 São equivalentes:

1. Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.
2. Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$. Neste caso diremos que Γ **tem modelo** ou que M, s **é modelo** de Γ.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Suponha (1) e que Γ não tenha modelo. Então para qualquer fórmula ϕ, a condição $\Gamma \models \phi$ é vaziamente satisfeita. Por (1), $\Gamma \models \phi$. Em particular se ϕ é $\neg\psi \wedge \psi$. Portanto Γ não é consistente.

(2) $\Rightarrow$ (1): Suponha agora (2) e que $\Gamma \nvdash \phi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente e portanto tem modelo M, s. Mas $M \not\models \phi[s]$ e isto implica que $\Gamma \not\models \phi$. $\square$

Provemos, então este enunciado. O método, introduzido por Leon Henkin em 1949, difere daquele usado originalmente por Kurt Gödel e chama-se o Método das Constantes e mostrou-se bastante útil para a construção de modelos.

Teorema 6.4.7 (Teorema da Completude II) Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$.

Demonstração: Provaremos o caso em que a assinatura L é finita ou enumerável e indicaremos nos exercícios como tratar o caso geral (veja o exercício 6.6.7).

Introduzindo novas constantes, se necessário, podemos supor que Γ é um conjunto de L-sentenças.

Seja $D = \{d_n : n < \omega\}$ um conjunto (de novas constantes) disjunto de L e $L(D) = L \cup D$. Enumere o conjunto de todas as $L(D)$-sentenças, $\{\phi_n : n < \omega\}$. Construiremos uma sequência Γ_n de conjuntos consistentes de $L(D)$-sentenças (juntando uma quantidade finita de $L(D)$-sentenças a Γ_0) da seguinte forma:

- seja $\Gamma_0 = \Gamma$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for inconsistente, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for existencial (isto é, ϕ_n não é da forma $\exists x\theta$), então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x\theta$, seja $j_n = \min\{j < \omega : d_j$ não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n\}$ e definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{j_n}}\}$.

Neste último caso (ϕ_n é $\exists x\theta$), como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ é consistente, se $\Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{j_n}}\}$ fosse inconsistente, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\theta|_{x=d_{j_n}}$; como d_{j_n} não ocorre em $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$, temos que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \forall x\theta$ (pelo Teorema 6.4.1) e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\phi_n$, contradizendo a conssistência de $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$.

Seja $\Gamma_\infty = \bigcup_{n<\omega} \Gamma_n$. Então Γ_∞ é consistente e, para toda $L(D)$-sentença ψ, se $\psi \notin \Gamma_\infty$, então $\neg\psi \in \Gamma_\infty$, pois, se ambas estivessem fora de Γ_∞, não teriam entrado na sua construção. Suponhamos que ψ seja ϕ_m e $\neg\psi$ seja ϕ_n. Podemos supor que $m < n$. Isto significa que $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ e $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seriam ambos inconsistentes. Daí, decorre que $\Gamma_m \vdash \neg\phi_m$ e, portanto $\Gamma_n \vdash \neg\phi_m$, ou seja, $\Gamma_n \vdash \phi_n$. Como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ também seria inconsistente, $\Gamma_n \vdash \neg\phi_n$, contradição à consistência de Γ_n.

Definimos a relação $d \sim d'$ em D se a fórmula $(d = d')$ está em Γ_∞. Esta é uma relação de equivalência, pois os axiomas da igualdade estão em Γ_∞. Seja $[d]$ a classe de $d \in D$ e M o conjunto dessas classes.

Vamos interpretar $L(D)$ no conjunto M:

- se $d \in D$, $d^M = [d]$;
- se $c \in C$ é símbolo de constante de L, $c^M = [d]$, se a fórmula $(c = d)$ está em Γ_∞; como $\exists x(c = x)$ está em Γ_∞, pelo menos uma das fórmulas do tipo $(c = d)$ está em Γ_∞;
- se $f \in L$ é símbolo de função n-ária, definimos $f^M([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) = [d]$, se a fórmula $f(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n}) = d$ estiver em Γ_∞;
- se $P \in L$ for símbolo de relação n-ária, definimos P^M por $([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) \in P^M$ se, e só se, a fórmula $P(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n})$ estiver em Γ_∞.

Afirmamos que $M \models \Gamma_\infty$. Pelo fato dos axiomas da igualdade estarem em Γ_∞ (em alguma forma), as sentenças atômicas de Γ_∞ são satisfeitas em M. Por indução na complexidade das fórmulas de Γ_∞, obtemos que $M \models \Gamma_\infty$ (veja o exercício 6.6.6). □

Como corolário deste teorema, temos talvez o resultado mais importante da Teoria dos Modelos.

Teorema 6.4.8 (Compacidade) Se Γ é um conjunto de sentenças e cada $\Gamma' \subset \Gamma$ finito tem modelo, então Γ tem modelo. □

Este resultado tem este nome, pois admite uma interpretação topológica (veja o exercício 6.6.8).

6.4.3 Comentários sobre o Aspecto Computacional

Na Teoria dos Conjuntos, podemos desenvolver a Teoria das Funções Recursivas [8], considerada como o contexto natural dos problemas computacionais

[8]Veja o próximo capítulo.

(ou construtivos), usando todos os axiomas, com a exceção do Axioma da Escolha. O conjunto de tais axiomas (sem o da escolha) é conhecido pela sigla [9] ZF.

Seja TC o enunciado do Teorema da Compacidade (que pode ser formalizado na linguagem de ZF). Leon Henkin demonstrou [10] que, supondo ZF, TC é equivalente ao chamado TIP (Teorema do Ideal Primo) [11], um resultado que afirma a existência de um determinado conjunto em certas situações. Posteriormente, A. R. D. Mathias demonstrou [12] que o TIP não é demonstrável e nem refutável, assumindo ZF e que esta teoria é consistente. Assim sendo, não é possível demonstrar o Teorema da Compacidade, em toda sua generalidade, de modo algorítmico. Na verdade, Alonzo Church [13] demonstrou que o problema geral de decidir algoritmicamente se uma dada fórmula A é dedutível de um conjunto de hipóteses Γ é insolúvel, ou seja, não temos como decidir se uma fórmula A é válida, por exemplo. No entanto, para alguns conjuntos Γ, esse problema é solúvel, como, por exemplo, se Γ for a Teoria dos Corpos Algebricamente Fechado [14]

6.5 Omissão de Tipos

O método das constantes permite provar um teorema útil na classificação de alguns modelos, que é o Teorema da Omissão de Tipos.

Um n-tipo (ou simplesmente tipo) é um conjunto maximal consistente $\Gamma = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$ de L-fórmulas, cujas variáveis livres (se houver) estão con-

[9] Tirada das iniciais dos sobrenomes de Ernst Zermelo e de Abraham A. Fraenkel, que desenvolveram tal teoria - muito embora a forma usada hoje em dia é a de Thoralf Skolem. Consultem a obra *From Frege to Gödel*, de Jan van Heijenoort, [**?**], páginas 290 a 301.

[10] Em *Mathematical Theorems Equivalent to the Prime Ideal Theorem for Boolean Algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society, 60 (1954), p. 388.

[11] Veja este e outros resultados conexos no livro de Thomas J. Jech, *The Axioma of Choice*, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 75), North-Holland Publishing Company, Amsterdã, 1973, principalmenteseções 2.3 e 7.2.

[12] Em *The order extension principle.* **Axiomatic Set Theory** (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part II, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), pp. 179-183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[13] Em *A Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 1, No. 1, pp. 40-41.

[14] Demonstrado por Alfred Tarski, em **A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry**. RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.

tidas no conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, para $n \geq 0$ (no caso $n = 0$, não há fórmulas com variáveis livres, mas apenas sentenças). Sejam $S_n(L)$ os conjuntos do todos os n-tipos de L-fórmulas, $n \geq 0$. Se a assinatura for conhecida no contexto em que usamos $S_n(L)$, poderemos omiti-la da notação, escrevendo apenas S_n . Se $T \in S_0(L)$ é dada, denotaremos $S_n(T) = \{\Gamma \in S_n(L) : T \subseteq \Gamma\}$.

Sejam $T \in S_0(L)$ e $M \models T$. Dizemos que M realiza o tipo $\Gamma \in S_n(T)$ se existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$, para toda $\varphi \in \Gamma$. Caso contrário, dizemos que M omite Γ.

Lema 6.5.1 Dados $M \models T$ e $\Gamma \in S_n(T)$, entãocada $\Gamma \in S_n(T)$ é finitamente satisfatível em M, ou seja, para cada parte finita $\Gamma_0 \subset \Gamma$, existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \Gamma_0(\bar{a})$.

Demonstração: Como Γ é consistente e contém T, dado $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito, definindo $\varphi = \bigwedge \Gamma_0$ (a conjunção das fórmulas de Γ_0), $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e, portanto, $T \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi\}$ também é consistente. Como $M \models T$ e T é maximal consistente, $M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi$. Seja, então, $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$. □

Lema 6.5.2 Dados T e $\Gamma \in S_n(T)$, existe $M \models T$ que realiza Γ. E mais ainda, existe $M \models T$ que realiza todos os n-tipos de $S_n(T)$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Para cada $n \geq 1$ e cada $\Gamma \in S_n(T)$ seja $C_\Gamma = \{c_1^\Gamma, \ldots, c_n^\Gamma\}$ um novo conjunto de símbolos de constantes e sejam Γ^* os conjuntos de fórmulas obtidos de Γ pela substituição de cada variável livre x_j pelo símbolo c_j^Γ, $1 \leq j \leq n$. Então $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\Gamma \in S_n(T)} \Gamma^*$ é um conjunto consistente de sentenças na linguagem extendida pelas novas constantes (por compacidade) e, portanto tem modelo. As interpretações das novas constantes realizarão os diversos tipos. □

Dados $T \in S_0$ e $\Gamma \in S_n(T)$, dizemos que a fórmula φ isola Γ, ou que Γ é isolado por φ, se $T \vdash \varphi \to \psi$. Dizemos que Γ é tipo não isolado.

Lema 6.5.3 Se $\Gamma \in S_n(T)$ é isolado (por φ), então todo $M \models T$ realiza Γ.

Demonstração: Exercício. □

Para tipos não isolados, temos o seguinte teorema (que pode ser generalizado: veja o exercício 6.6.9 adiante).

Teorema 6.5.1 (Omissão de Tipos) Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dada T e dado $\Gamma \in S_n(T)$, um tipo não isolado, existe $M \models T$ que omite Γ.

Demonstração: Seja $D = \{d_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de novas constantes e $L(D) = L \cup D$ a assinatura L estendida com D. Enumere as $L(D)$-sentenças $\{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ e enumere as n-uplas de D, $D^n = \{\bar{d}_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Construiremos um conjunto maximal consistente Γ_∞, como no caso do Teorema da Completude, mas imporemos mais uma cláusula para garantir que o modelo construído não realize o tipo Γ.

Inicialmente façamos $\Gamma_0 = T$. Por indução em n construiremos um conjunto de $L(D)$-fórmulas Γ_{n+1} contendo Γ_n, que seja consistente e satisfazendo os quesitos:

- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for inconsistente, $\Gamma'_n = \Gamma_n$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for da forma $\exists x \psi$, então $\Gamma'_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x \theta$, seja $d \in D$ a primeira constante na enumeração dada que não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$, e façamos $\Gamma'_n = \Gamma_n \cup \{\psi_n, \theta|_{x=d}\}$. Este conjunto é consistente, pois senão $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \neg\psi|_{x=c}$ e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \forall x(\neg\theta)$ o que implica que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seria inconsistente, uma contradição.
- Uma vez obtido Γ'_n, temos que impor a não realização do tipo Γ, ou seja, imporemos que a n-upla $\bar{d}_n$ não realize o tipo. Como o tipo é não isolado, existe $\sigma \in \Gamma$, tal que $\Gamma'_n \cup \{\neg\sigma(\bar{d}_n)\}$ é consistente, pois senão $\Gamma'_n \vdash \theta(\bar{d}_n)$, para toda $\theta \in \Gamma$, e, neste caso, se φ for a conjunção de todas as fórmulas de $\Gamma' \setminus T$, retirando as constantes novas e colocando as variáveis livres correspondentes, (ou se for uma fórmula de T se $\Gamma' \setminus T = \varnothing$), então, pelo teorema da dedução, $T \vdash \varphi \to \theta$, para toda $\theta \in \Gamma$, ou seja, φ isolaria Γ, uma contradição. Assim, definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma'_n \cup \{\sigma(\bar{d}_n)\}$.

Fazendo $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$, e construindo o modelo M pelo método das constantes, ele omitirá Γ, devido às condições que impõem que nenhuma n-upla de D realizaria Γ. $\square$

Vamos fazer algumas aplicações desse resultado importante. Na verdade, usaremos sua versão generalizada, que permite omitir uma sequência Γ_j, $j \in \mathbb{N}$, de n_j-tipos (veja o exercício 6.6.9).

Primeiramente, chamamos uma teoria $T \in S_0(L)$ de **ω-categórica** se T tem modelos enumeráveis e todos esses modelos são isomorfos entre si.

Lema 6.5.4 Suponha que a assinatura L é finita ou enumerável e que existam infinitos tipos distintos em $S_n(T)$. Então existe um tipo $\Gamma_\infty in S_n(T)$ não isolado.

Demonstração: Suponha que todos os tipos de $S_n(T)$ sejam isolados. Como L é finita ou enumerável, existem no máximo uma quantidade enumeraável de tipos em $S_n(T)$, Γ_j, $j \in \mathbb{N}$. Suponha que $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ isole o tipo Γ_j, ou seja, $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e $T \vdash \varphi_j \to \psi$, para toda $\psi \in \Gamma_j$. Em particular, como Γ_j é maximal consistente, $\varphi_i \in \Gamma_j$. Podemos ainda afirmar que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k, pois existe $\psi \in \Gamma_j$, tal que $\neg\psi \in \Gamma_k$. Seja $\Delta = \{\neg\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$. Então Δ é consistente com T, pois, senão, $T \cup \{\neg\varphi_0, \ldots, \neg\varphi_N\}$ seria inconsistente, para algum $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, por compacidade, ou seja, $T \cup \{\bigwedge_{j=0}^N \neg\varphi_j\}$ seria inconsistente, o que implicaria que $T \vdash \neg \bigwedge_{j=0}^N \neg\varphi_j$, ou seja, $T \vdash \bigwedge_{j=0} N\varphi_j$. Isso implica, em particular, que $\bigwedge_{j=0} N\varphi_j \in \Gamma_{N+1}$ e, portanto, $\varphi_k \in \Gamma_{N+1}$, para algum K, $0 \leq k \leq N$ pois o conjunto Γ_{N+1} é maximal consistente e contém T. Mas isto contradiz o fato observado acima, que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k. Ou seja, qualquer lista enumerável de tipos isolados não pode esgotar todo $S_n(T)$ e, portanto, existe um tipo não isolado em $S_n(T)$. $\square$

Na verdade, a hipótese de que L seja finita ou enumerável não é essencial nesse lema. Basta que $S_n(T)$ seja infinito para que contenha um tipo não isolado (faça isso como exercício).

Lema 6.5.5 Se $S_n(T)$ for finito, então todos os seus n-tipos são isolados.

Demonstração: Se houver um único tipo $\Gamma \in S_n(T)$, então $T \vdash \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$ e, portanto $T \vdash \bigwedge_{j=1} n(x_j = x_j) \to \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$.

Se houver mais de um n-tipo, digamos $S_n(T) = \{\Gamma_0, \ldots, \Gamma_N\}$, para algum $N > 0$, existiriam fórmulas $\psi_j \in \Gamma_j \setminus \bigcup_{j\neq i,\ 0\leq i\leq N} \Gamma_i$. Tais fórmulas isolam seus tipos. $\square$

Teorema 6.5.2 Seja L finita ou enumerável e $T \in S_0(L)$ uma teoria que tem modelos infinitos. Então T é ω-categórica se, e somente se, $S_n(T)$ é finito, para cada $n > 0$.

Demonstração: Se algum $S_n(T)$ fosse infinito, teríamos pelo menos dois modelos enumeráveis de T, M_1 e M_2 e um tipo não isolado $\Gamma \in S_n(T)$ omitido em M_1 e realizado em M_2. Tais modelos não podem ser isomorfos, pois se fossem, a (pré-)imagem de n-upla que realizasse o tipo em M_2 necessariamente teria que realizá-lo em M_1.

Por outro lado, se todos os $S_n(T)$ fossem finitos, todos os tipos seriam isolados e, se M_1 e M_2 são dois modelos enumeráveis de T, ambos teriam que realizar todos os tipos sobre T. Enumerando-os, $M_1 = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $M_2 = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$, construímos um isomorfismo entre os dois modelos pelos método de vai-e-vem:

- seja $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(a_0)\}$, sendo que $\mathrm{tp}^{M_1}(a)$ é o tipo de a em M_1, ou seja, o conjunto de fórmulas $\psi(x_1)$, tais que $M_1 \models \psi(a)$; definimos $f(a_0) = b_{j_0}$;
- seja, agora, $j_1 = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0\})$ e seja $i_1 = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_2}(b_{j_0}, b_{j_1})\}$, e definimos $f(a_{i_1}) = b_{j_1}$;
- suponha que já tenhamos definido $f : \{a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \mapsto \{b_{j_0} \ldots, b_{j_k}\}$, para k ímpar; seja $i_{k+1} = \min(\mathbb{N} \setminus \{0, i_1, \ldots, i_k\})$ e seja $j_{k+1} = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+1}}) = b_{j_{k+1}}$; seja $j_{k+2} = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0, j_1, \ldots, j_{k+1}\})$ e seja $i_{k+2} = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{k+2}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+2}}) = b_{j_{k+2}}$.

Com isto construímos um isomorfismo $f : M_1 \to M_2$, provando que todos os modelos enumeráveis de T são isomorfos. $\square$

6.6 Exercícios

Exercício 6.6.1 Uma medida de complexidade de um termo t, $c'(t)$, pode ser definida por recursão, assim: se t é uma variável ou constante, $c'(t) = 1$ e se t é $f(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$, então $c'(t) = 1 + \max\,\{c'(t_1), \ldots, c'(t_n)\}$. Mostre que $c(t)$ e $c'(t)$ são compatíveis, isto é, que $c(t_1) \leq c(t_2)$ se, e só se, $c'(t_1) \leq c'(t_2)$. (Portanto será usada no texto a medida mais conveniente conforme o caso, sem menção explícita.)

Exercício 6.6.2 Outra medida de complexidade de um termo é contar o número de símbolos de constates, de variáveis e de funções usados em sua construção. Por recursão em construções de termos, definimos $c_s(t)$ para o termo t da seguinte forma:

1. se t for uma variável ou um símbolo de constante, então $c_s(t) = 1$;

2. se já foram definidos $c_s(t_1)$, ..., $c_s(t_n)$, e se $f \in F_n$ for síbolo de função n-ária, então definimos $c_s(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + \sum_{i=1}^{n} c_s(t_i)$.

Mostre que $c_s(t)$ conincide com a quantidade de símbolos de constantes, variáveis e funções presentes no termo t. Mostre que c e c_s são compatíveis (veja o exercício anterior).

Exercício 6.6.3 O mesmo que o exercício anterior mas para fórmulas.

Exercício 6.6.4 Mostre que a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ, isto é, se $s'(y) = s(y)$, $y \in VL(\varphi)$, então $M \models \varphi[s']$.

Exercício 6.6.5 Mostre que se $\Phi : M \to N$ é morfismo, então se φ for atômica ou negação de atômica, então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $N \models \varphi[\Phi \circ s]$.

Exercício 6.6.6 Preencha os detalhes da demonstração de que a estrutura M é modelo de Γ_∞ no Teorema da Completude.

Exercício 6.6.7 Mostre que se Γ é consistente, então tem modelo, no caso em que a assinatura L seja não enumerável. [Sugestão: seja $\kappa > \omega$ o cardinal de L; seja $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ um conjunto de κ novas constantes; enumere as $L(D)$-sentenças por $\{\phi_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e construa $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, se λ for ordinal limite, e $\Gamma_{\alpha+1}$ como no caso enumerável.]

Exercício 6.6.8 Para cada $n \geq 0$ e cada ϕ, com $VL(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, sejam $U_\phi = \{\Gamma \in S_n(L) : \phi \in \Gamma$. Estes conjuntos formam uma base de uma topologia de $S_n(L)$ totalmente desconexa e compacta, ou seja, mostre que:

1. o conjunto de tais U_ϕ é fechado por uniões e interseções finitas e também por complementos; como o complemento de um aberto é fechado, tais conjuntos são, ao mesmo tempo, abertos e fechados;
2. os conjuntos abertos de $S_n(L)$ são as uniões arbitrárias desses conjuntos; a topologia de $S_n(L)$ é o conjunto τ de todos os conjuntos abertos;
3. essa topologia é Hausdorff, ou seja, dados $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S_n(L)$ distintos, existem $U, V \in \tau$ disjuntos, tais que $\Gamma_1 \in U$ e $\Gamma_2 \in V$;
4. essa topologia é compacta, ou seja, se F_i, $i \in I$, for uma família de conjuntos fechados (complementos de abertos) em $S_n(L)$, tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$, então existe $I_0 \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{i \in I_0} F_i = \varnothing$.

Exercício 6.6.9 O objetivo deste exercício é provar esta versão mais geral do

> **Teorema da Omissão de Tipos:** Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dado conjunto consistente de sentenças (não necessariamente maximal) T e dados $\Gamma_j \in S_{n_j}(T)$ tipos não isolados $j \in \mathbb{N}$, existe $M \models T$ que omite todos esses tipos.

Para isto, resolva os itens a seguir. No que se segue, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ e $D_n = \{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$, conjunto de novas constantes a serem juntadas à assinatura L, obtendo-se a assinatura $L(D) = L \cup D$ (com $D \cap L = \varnothing$). Uma **enumeração de Henkin** (de $L(D)$-sentenças) é um conjunto maximal consistente de $L(D)$-sentenças X, tal que se $\phi \in X$ é uma $L(D_k)$-fórmula tendo x como única variável livre, então existe $a \in D_{k+1}$ tal que $\phi|_{x=a} \in X$. Seja $H(T)$ o conjunto de todas as enumerações de Henkin (contendo T), como descritas acima.

1. Mostre que $H(T)$ é subconjunto fechado e não vazio de $S_0^{L(D)}(T)$ (o conjunto de todas as $\Gamma \in S_0(L(D))$ maximais consistentes).

2. **(2,0 pontos)** Mostre que se $\Gamma \in S_n^L(T)$ é um tipo não isolado, então $F(\Gamma) = H(T) \cap \bigcap_{\phi \in \Gamma} U_\phi$ é um fechado de $H(T)$ de interior vazio (ou seja, não existe nenhuma $L(D)$-sentença ψ, tal que $U_\psi \subseteq F$).

3. Usando o fato de que todo espaço compacto tem a propriedade de Baire (ou seja, união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio), mostre que dados tipos $\Gamma_j \in S_{n_j}^L(T)$, $j \in \mathbb{N}$, não isolados, então existe $\Delta \in H(T) \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{\phi \in \Gamma_j} U_\phi$

4. Mostre que o modelo obtido pelo método das constantes correspondente a Δ omite cada tipo Γ_j, $j \in \mathbb{N}$.

Exercício 6.6.10 Dado conjunto maximal consistente T de L-sentenças, L finita ou enumerável e seja $S(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n(T)$ (observe que $S_0(T) = \{T\}$).

1. Mostre que $S(T)$ é enumerável se, e só se, os tipos isolados de cada $S_n(T)$ são densos em $S_n(T)$, $n \geq 1$, ou seja, para cada ϕ existe um tipo isolado em U_ϕ. [Observe-se que, por serem espaços compactos, cada $S_n(T)$ só pode ter no máximo uma quantidade enumerável de tipos isolados. Mostre que se os tipos isolados não são densos em algum $S_n(T)$, então existem $2^{\aleph_0}$ tipos não isolados: para isto, construa uma árvore binária de abertos U_ϕ, indexando as ϕ com sequências binárias finitas, começando co uma $\phi_\varnothing$, tal que $U_{\phi_\varnothing}$ não contenha nenhum tipo isolado e mostre que existe $\phi_{\langle 0 \rangle}$ tal que, se $\phi_{\langle 1 \rangle}$ for a fórmula $\neg\phi_{\langle 0 \rangle}$, então $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 0 \rangle}} \subset U_\varnothing$ e $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 1 \rangle}} \subset U_\varnothing$, etc.]

2. Mostre que se $S(T)$ é enumerável e $M \models T$ é modelos enumerável, então dado $A \subseteq M$, $S^{L(A)}(T_{L(A)}(M))$ também é enumerável, sendo que $T_{L(A)}(M)$ é a $L(A)$-teoria de M, ou seja, o conjunto de todas as $L(A)$-sentenças verdadeiras em M.