Introdução à Lógica Matemática

Ricardo Bianconi

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do que hoje se costuma chamar de *Lógica de Primeira Ordem* ou também de *Cálculo de Predicados*. Este assunto é uma matematização de uma parte pequena, embora substancial, do que se entende por raciocínio lógico científico (especificamente, o raciocínio matemático).

1.2 Objeto de Estudo

A Matemática é uma ciência eminentemente *dedutiva*, o que significa que todo o trabalho matemático consite em discursos que partem de premissas (ou hipóteses – declarações cujo valor verdadeiro é assumido) e seguem várias sentenças obtidas segundo algumas regras (as chamadas *regras de inferência*), até que a afirmação final resolva o problema proposto. Até a resolução de equações tem esse caráter dedutivo. Vejamos um exemplo simples.

Vamos resolver a equação linear $2x + 3 = 3x - 5$, buscando um número real que a satisfaça. Para isto, usamos as propriedades da soma e produto de números reais, que podem ser espressas como a soma e o produto são associativos comutativos (ou seja, $x+(y+z) = (x+y)+z$, $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$, $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$); o produto distribui com a soma (ou seja, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$); a existência de um elemento neutro da adição, o zero, e de opostos (ou seja, para cada número real X, exixte um número

y, tal que $x + y = 0$ e denotamos tal y por $-x$). O objetivo da solução da equação é *isolar* a *variável* x de um dos lados da igualdade, deixando apenas números do outro lado, nos seguintes passos:

1. $4x + 3 = 3x - 5$ (a equação a ser resolvida);
2. $(-3x) + (4x + 3) = (-3x) + (3x - 5)$ (propriedade da igualdade);
3. $(-3x + 4x) + 3 = (-3x + 3x) - 5$ (associatividade da adição);
4. $x + 3 = -5$ (resultado das operações entre parênteses);
5. $(x + 3) + (-3) = -5 - 3$ (novamente uma propriedade da igualdade);
6. $x + (3 - 3) = -8$ (associatividade da soma);
7. $x = -8$ (resultado da operação entre parênteses e o resultado final da solução pretendida).

Essa solução é uma sequência de afirmações (as várias equações intermediárias), cada uma das uqais obtidas de anteriores e de propriedades da soma e da igualdade (que também são afirmações, que podem ser consideradas como presentes na solução).

Esta disciplina tem por objetivo estudar uma parte pequena, mas extremamente relevante desse processo dedutivo. Mais especificamente, desenvolveremos o estudo do que se chama o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem[1], culminando com os trabalhos de Kurt Gödel (1930 e 1931), em que prova que tal cálculo é completo em si mesmo (dentro de um sistema dedutivo mais abrangente – ou seja, basta usarmos as propriedades de primeira ordem para deduzir todas as propriedades de primeira ordem – coisa que o sistema maior não tem), e que, se levarmos em conta o aspecto *computacional* das deduções, então as teorias de primeira ordem que contenham alguma aritmética[2] são incompletas (quando confrontadas com o sistema maior).

O método de estudo da lógica matemática é criar um modelo matemático que reflete com precisão e fidelidade boa parte do raciocínio (ou argumentação) matemático.

[1] O significado dessa expressão será explicado no momento oportuno.

[2] Isto também será explicado em detalhes mais adiante.

1.3 Plano da Obra

Este trabalho serve como referência para a disciplina MAT-359, Lógica, lecionada no IME-USP para o Bacharelado em Matemática.

Além deste capítulo introdutório, segue o segundo capítulo em que comentamos a bilbiografia consultada e indicamos outras obras para complementação do estudo para aqueles que quiserem ir além do conteúdo desta disciplina.

Como os resultados a serem provados têm um aspecto combinatório aparentemente complicado e notacionalmente pesado, no Capítulo 3 apresentamos um esboço histórico bastante parcial do desenvolvimento dessa parte da lógica, dando ênfase ao trabalho de Aristóteles, como um exercício prévio, passando pelos estóicos, os trabalhos iniciados por George Boole, Gottlob Frege, David Hilbert, no século XIX e início do XX, motivando o estudo que se segue. O Capítulo 4 trata do fragmento proposicional do Cálculo de Predicados, o qual será introduzido no Capítulo 5, que conterá até a prova de que o sistema é completo. O Capítulo 5 trata da *incompletude* do sistema, quando se leva em conta o aspecto computacional.

Os exercícios fazem parte do texto. Em geral servem ao duplo propósito de treinar alunas e alunos em dedução formal e deixar os argumentos tediosos mas diretos aos coitados supracitados.

Capítulo 2

Bibliografia Comentada

Listamos aqui todas as obras consultadas e também alguns livros sobre o assunto para quem quiser se aprofundar em algum assunto ou pegar outra referência além dessas notas.

Para quem quiser começar a estudar o lado filosófico da Lógica, sugerimos consultar a *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, referência [1], disponível na Internet. Ainda não está completa, mas tem muitos verbetes com estudos extensos sobre os vários tópicos. Veja também nas referências abaixo relacionadas alguns dos verbetes consultados.

Um livro difícil, mas muito bom, que trata de toda a matéria dessa disciplina é o de J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, referência [12].

Outro que dá bastante ênfase aos fundamentos, com o foco na computabilidade da lógica é a referência [6].

Outros livros mais introdutórios (que não tratam da Incompletude, ou fazem de modo não muito completo, são as referências [7, 10].

Um estudo aprofundado sobre Aristóteles é o de Oswaldo Porchat Pereira, *Ciência e Dialética em Aristóteles*, referência [11].

Um texto de lógica voltado para a Computação é a referência [13].

Referências Bibliográficas

[1] *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Principal Editor: Edward N. Zalta. Disponível em http://plato.stanford.edu. Acessos em julho e agosto de 2009.

[2] Dirk Baltzly. *Stoicism*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[3] Susanne Bobzien. *Ancient Logic*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[4] Stanley Burris. *The Algebra of Logic Tradition*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[5] Silvia Carnero. *El Silogismo: Historia e Desarrollo*. Disponível em http://serbal.pntic.mec.es/∼/cmunoz11

[6] W. Carnielli, R. Epstein. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*. Editora da UNESP, São Paulo, SP, 2005

[7] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, Nova Iorque, 1972.

[8] W. C. Guthrie. *Os Sofistas*.

[9] Henrik Lagerlund. *Medieval Theories of Syllogism.*

[10] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964.

[11] Oswaldo Porchat Pereira. *Ciência e Dialética em Aristóteles.* Editora da Unesp, São Paulo, 2001.

[12] J. R. Shoenfield. *Mathematical Logic* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

[13] Flávio Soares Corrêa da Silva, Marcelo Finger, Ana Cristina Vieira de Melo. *Lógica para a Computação*. Thomson Learning, São Paulo, SP, 2006.

[14] Robin Smith. *Aristotle's Logic*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[15] Richard Zach. *Hilbert's Program*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[16] Edward N. Zalta. *Gottlob Frege*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).