MAT-359: Lógica - 3ª Lista de Exercícios. Funções Recursivas em Seqüências Binárias

Ricardo Bianconi

2º Semestre de 2009

Entregar até o dia 2 de dezembro de 2009.

1 Introdução

O objetivo desta lista é o estudo das funções recursivas calculadas em seqüências binárias, algo mais próximo da realidade dos computadores.

Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as seqüências finitas de zeros e uns. Denotamos a seqüência vazia por $\varnothing$, as seqüências unárias por 0 e 1, as seqüências binárias por 00, 01, 10 e 11, etc. Definimos a relação $x \sqsubseteq y$ se x for uma subseqüência inicial de y, por exemplo, $01100 \sqsubseteq 01100101011$.

Referência: Fernando Ferreira, *Polynomial Time Computable Arithmetic*, Contemporary Mathematics, vol. 106 (1990), 137-156.

2 Funções Recursivas

Definimos as **funções básicas** como sendo as funções:

- $Z : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $Z(x) = \varnothing$ constante;
- $C_0, C_1 : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $C_0(x) = x0$ (colocar 0 à direita da seqüência), $C_1(x) = x1$ (colocar 1 à direita da seqüência);
- $Q : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}$, $Q(x, y) = 1$ se $x \sqsubseteq y$, e $Q(x, y) = 0$, caso contrário;

- as projeções $\Pi_{n,i} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$, $\Pi_{n,i}(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$ e $n \geq 1$;
- o elemento $\varnothing \in \mathbb{S}$ será considerado também uma função de zero variáveis, $\varnothing : \mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}$, para facilitar as aplicações que temos em mente.

A **Regra da Composição** diz: dadas as funções $h : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}$ e $g_i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$, $1 \leq i \leq m$, definimos $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$, pela composição

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

A **Regra da Recursão Primitiva** diz: dadas as funções $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$ e $h_0, h_1 : \mathbb{S}^{n+2} \to \mathbb{S}$, definimos a função $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}$, por

$$\left\| \begin{array}{rcl} f(x_1, \ldots, x_n, \varnothing) & = & g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, C_0(x_{n+1})) & = & h_0(x_0, \ldots, x_{n+1}, f(x_0, \ldots, x_{n+1})) \\ f(x_1, \ldots, x_n, C_1(x_{n+1})) & = & h_1(x_0, \ldots, x_{n+1}, f(x_0, \ldots, x_{n+1})) \end{array} \right\|$$

Dizemos que uma função $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$ é uma **função primitiva recursiva** se for obtida das funções básicas por uma quantidade finita de aplicações das regras de composição e de recursão primitiva.

Exemplo 1 A função identidade $I(x) = x$ é uma função básica: $I(x) = \Pi_{1,1}(x)$.

Exemplo 2 A função de **concatenação** $x \sqcap y$ (que coloca a seqüência y à direita de x) é primitiva recursiva, pois $x \sqcap \varnothing = x = I(x)$, $x \sqcap C_0(y) = C_0(x \sqcap y)$ e $x \sqcap C_1(y) = C_1(x \sqcap y)$.

Exemplo 3 A função de repetição, $x \otimes y$: $x \otimes \varnothing = \varnothing$, $x \otimes C_0(y) = x \otimes C_1(y) = (x \otimes y) \sqcap x$ (cria uma seqüência repetindo x tantas vezes quanto o tamanho de y).

Exercício 1 (1,0 ponto) Seja $\mathbb{U}$ o conjunto das seqüências de uns apenas, além da seqüência vazia. Mostre que $(\mathbb{U}, \varnothing, C_1, \sqcap, \otimes, \sqsubseteq)$ é um modelo da aritmética (interpretando o zero como $\varnothing$, o sucessor como C_1, a soma como $\sqcap$, o produto como $\otimes$ e a ordem como $\sqsubseteq$), isomorfo aos naturais, $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times, \leq)$. Seja $\mathbf{\Phi} : \mathbb{S} \to \mathbb{N}$ a função que calcula o tamanho de seqüências: $\mathbf{\Phi}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{\Phi}(C_0(x)) = \mathbf{\Phi}(C_1(x)) = \mathbf{\Phi}(x) + 1$. Mostre que $\mathbf{\Phi}$ restrita a $\mathbb{U}$ é o isomorfismo procurado.

Exercício 2 (1,0 ponto) Usando a função $\mathbf{\Phi} : \mathbb{S} \to \mathbb{N}$ restrita a $\mathbb{U}$, mostre que se $f : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$ é função primitiva recursiva restrita a $\mathbb{U}$, e que a imagem de $\mathbb{U}^n$ sob f está contida em $\mathbb{U}$, então $\mathbf{\Phi} \circ f \circ (\mathbf{\Phi}^{-1}, \ldots, \mathbf{\Phi}^{-1}) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ é primitiva recursiva no sentido dos naturais. Mostre também a recíproca: se $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ é primitiva recursiva no sentido dos naturais, então existe uma função primitiva recursiva no sentido das seqüências $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$, tal que $\mathbf{\Phi}^{-1} \circ g \circ (\mathbf{\Phi}, \ldots, \mathbf{\Phi})$, restrita a $\mathbb{U}$, coincide com f restrita a $\mathbb{U}$. (Observe que "$\circ$"significa composição de funções.) Tal f é única?

Exercício 3 (1,0 ponto) Seja $\mathbf{\Psi} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, a função dada por: $\mathbf{\Psi}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathbf{\Psi}(C_0(x)) = \Psi(C_1(x)) = C_1(\Psi(x))$. Mostre que a imagem de $\mathbf{\Psi}$ é $\mathbb{U}$ e que $\mathbf{\Psi}$ restrita a $\mathbb{U}$ é a função identidade. Mostre que $\mathbf{\Psi}(x) = 1 \otimes x$.

Exercício 4 (2,0 pontos) Seja $\mathbf{\Theta} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, a função dada por: $\mathbf{\Theta}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathbf{\Theta}(C_0(x)) = ((11) \otimes \mathbf{\Theta}(x)) \sqcap 1$ e $\mathbf{\Theta}(C_1(x)) = ((11) \otimes \mathbf{\Theta}(x)) \sqcap (11)$. Mostre que $\mathbf{\Theta}$ é uma função primitiva recursiva que dá uma bijeção de $\mathbb{S}$ sobre $\mathbb{U}$. Obtenha uma expressão para $\mathbf{\Phi} \circ \mathbf{\Theta}(x)$, em função de $\mathbf{\Phi}(x)$.

Atenção: a partir deste ponto do texto, usaremos as funções $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$ e $\mathbf{\Theta}$, sem fazer refrênciaàs suas definições. Refira-se a estes exercícios para estas.

Exercício 5 (1,0 ponto) Defina a ordem lexicográfica em $\mathbb{S}$ por: se $x \neq \varnothing$, então $\varnothing \prec x$; se $x \neq y$ e $\mathbf{\Phi}(x) < \mathbf{\Phi}(y)$, então $x \prec y$; se $x \neq y$ e existe z, tal que $x = C_0(z)$ e $y = C_1(z)$, então $x \prec y$. Denotamos $x \preceq y$ se $x = y$ ou $x \prec y$. Mostre que $x \preceq y$ se, e somente se, $\mathbf{\Theta}(x) \sqsubseteq \mathbf{\Theta}(y)$.

Exercício 6 (2,0 pontos) Seja $R(x, y) = 1$ se $x \preceq y$ e $R(x, y) = 0$, caso contrário. Mostre que a função $R : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}$ é primitiva recursiva.

Definimos agora a **Regra da Minimalização**: dadas as funções $g, h : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}$, definimos $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{x_{n+1} : g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = h(x_1, \ldots, x_{n+1})\},$$

sendo que o mínimo se refere à ordem lexicográfica definida acima.

Exercício 7 (2,0 pontos) Mostre que as funções obtidas das Funções Básicas, aplicando as regras da Composição, da Recursão Primitiva e da Minimalização, coincidem com as funções recursivas em $\mathbb{N}$, usando as aplicações $\mathbf{\Theta}$ e $\mathbf{\Phi}$.