MAT-359: Lógica - 3ª Lista de Exercícios

Ricardo Bianconi

Entregar até dia 28/10/2009 na aula.

O objetivo desta lista é demonstrar o Teorema da Completude no caso em que a assinatura L não seja enumerável.

Lembramos que um conjunto X, munido de uma ordem linear $<$, diz-se um **conjunto bem ordenado** se para todo $Y \subseteq X$, $Y \neq \varnothing$ implica que existe $y_0 \in Y$, tal que, para todo $z \in Y$, $y_0 \leq z$ (ou seja $z = y_0$ ou $y_0 < z$) - isto é, todo subconjunto não vazio de X tem um mínimo. Um conjunto X é chamado de **conjunto transitivo** se, para todo $x \in X$, vale que todo $y \in x$ também pertence a X (ou seja, se $x \in X$, então $x \subset X$). Um **ordinal** é um conjunto transitivo bem ordenado pela relação de pertinência (aqui é necessário fazer uso do axioma da regularidade para que esta afirmação seja correta). Exemplos: $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $n+1 = n \cup \{n\}$, $\omega = \mathbb{N}$. Ordinais que se prezem são representados por letras gregas minúsculas[1]. Um ordinal da forma $\alpha \cup \{\alpha\}$, denotado por $\alpha + 1$, é chamado de **ordinal sucessor**; um ordinal $\alpha \neq 0$ que não for sucessor será chamado de **ordinal limite** - por exemplo, ω é o primeiro ordinal limite. O axioma da escolha diz que todo conjunto pode ser bem ordenado. Um **cardinal** é um ordinal α, tal que não existe função injetora $f : \alpha \to \beta$, para nenhum $\beta < \alpha$ (usamos o símbolo $<$ no lugar de $\in$ para enfatizar que o que nos interessa é a relação de ordem). Observe que um cardinal infinito é sempre um ordinal limite.

Exercício 1 (2,0 pontos): Demonstre o seguinte **Princípio de Indução Transfinita**: seja $(X, <)$ um conjunto bem ordenado. Suponha que $Y \subseteq X$ é tal que $x_0 = \min X \in Y$, e para cada $y \in X$, se todo $x \in X$, tal que $x < y$, estiver em Y ($x \in Y$), então $y \in Y$. Mostre que, neste caso, $Y = X$. Mostre também que se $P(x)$ for uma propriedade de ordinais $\beta < \kappa$, tal que valha:

1. (Base da indução) $P(0)$

[1] Eis uma boa motivação para aprender o alfabeto grego.

2. (Caso de sucessores) para todo $\beta < \kappa$, $P(\beta)$ implica $P(\beta + 1)$

3. (Caso dos limites) se $\lambda < \kappa$ for ordinal limite e para todo $\beta < \lambda$ valer $P(\beta)$, então também valerá $P(\lambda)$

então valerá $P(\beta)$ para todo $\beta < \kappa$.

Exercício 2 (3,0 pontos): Demonstre o Teorema da Completude para o caso de assinaturas não enumeráveis. [Neste caso, seja κ o cardinal da assinatura L; seja Γ_0 um conjunto consistente de L-**sentenças**; seja $C = \{c_\beta : \beta < \kappa\}$ um conjunto de novos símbolos de constantes; seja $\{\varphi_\beta : \beta < \kappa\}$ uma enumeração de todas as $(L \cup C)$-sentenças; construa uma sequência Γ_β, $\beta < \kappa$, de conjuntos consistentes de modo análogo ao caso enumerável, etc. Aqui o princípio da indução transfinita toma o lugar da indução finita.]

Os próximos exercícios destinam-se à apresentação de um outro tipo de construção de modelos, a partir de modelos já conhecidos.

Dado um conjunto não vazio I, um **filtro** F sobre I é um conjunto não vazio de subconjuntos de I tal que $\varnothing \notin F$; se $A, B \in F$, então $A \cap B \in F$; se $A \in F$ e $A \subseteq B \subseteq I$ então $B \in F$. Um **ultrafiltro** é um filtro maximal com respeito à inclusão, isto é, se U é ultrafiltro e F é filtro tais que $U \subseteq F$ então $U = F$.

Um conjunto não vazio A de subconjuntos de I tem a **pif (propriedade da intersecção finita)** se, para cada parte finita $A_0 \subset A$, $\bigcap A_0 \neq \varnothing$. São dadas as seguintes afirmações: o conjunto $F = \{B \subseteq I\colon$ existe parte finita $A_0 \subset A$, tal que $\bigcap A_0 \subseteq B\}$ é um filtro; existe um ultrafiltro contendo A; se U for um ultrafiltro sobre I, então, para todo $A \subseteq I$, ou $A \in U$, ou, senão, $I \setminus A \in U$; existem dois tipos de ultrafiltros: os principais (contendo algum conjunto unitário) e os não principais (só contêm conjuntos infinitos).

Dada uma família de L-estruturas $\{M_i : i \in I\}$, indexada num conjunto não vazio I, e dado um filtro F em I, definimos o **produto reduzido** (que também chamamos de **ultraproduto**, no caso em que F for ultrafiltro) desta família como a estrutura $M = \prod_{i \in I} M_i / F$ cujo domínio é o conjunto das classes de equvalência de $\prod_{i \in I} M_i$ pela relação $f \sim_F g$ se $\{i \in I : f(i) = g(i)\}$ está em F. Denotaremos a classe de $f \in \prod_{i \in I} M_i$ por $[f]_F$ ou simplesmente $[f]$ quando F for subentendido. Sobre este conjunto interpretamos L assim:

- se c é constante, c^M é a classe de $\{c^{M_i} : i \in I\} \in \prod_{i \in I} M_i$;
- se f é função n-ária, $f^M([x_1], \ldots, [x_n]) = [f^{M_i}(x_1(i), \ldots, x_n(i))]$;

- se P é relação n-ária, $([x_1], \ldots, [x_n]) \in P^M$ se, e só se, $\{i \in I : (x_1(i), \ldots, x_n(i)) \in P^{M_i}\}$ estiver em F.

Exercício 3 (3,0 pontos) - O Teorema de Łoś: Dada uma família de $\mathcal{L}$-estruturas $\{M_i : i \in I\}$, atribuições de valores $s_i : \mathrm{Var} \to M_i$, fórmula φ, e ultrafiltro U em I, mostre que (por indução na complexidade das fórmulas)

$$\prod_{i \in I} M_i/U \models \varphi[s] \Leftrightarrow \{i : M_i \models \varphi[s_i]\} \in U,$$

sendo que s é a atribuição de valores $s(x) = [s_i(x) : i \in I]$ (classe dos $s_i(x)$).

Exercício 4 (2,0 pontos) - O Teorema da Compacidade Revisitado: Seja Γ um conjunto de L-sentenças, tal que, para cada parte finita e não vazia $\Delta \subset \Gamma$, existe modelo $M_\Delta \models \Delta$. Seja $I = \{\Delta : \Delta \subset \Gamma$ é finito e não vazio$\}$. Para cada tal Δ, seja $J_\Delta = \{\Delta' \in I : \Delta \subseteq \Delta'\}$. Pede-se:

1. (0,5 pontos) Mostre que o conjunto $A = \{J_\Delta : \Delta \in I\}$ tem a pif.

2. (1,5 pontos) Seja U um ultrafiltro contendo A. Use o exercício anterior para mostrar que $\prod_{\Delta \in I} M_\Delta/U \models \Gamma$.