Introdução à Lógica Matemática

Ricardo Bianconi

Capítulo 3

Breve Histórico

Neste capítulo abordaremos sumariamente a evolução histórica da lógica matemática, sem a pretensão de sermos completos. Na verdade, veremos apenas os ramos que nos interessam para motivar o que vem a seguir, deixando àqueles que se interessarem a leitura das obras referidas na bibliografia.

3.1 Lógica na Antiguidade

3.1.1 Os Primórdios da Lógica Grega Antiga

Aristóteles foi o primeiro filósofo grego a escrever de forma sistemática sobre lógica, como ferramenta (ou conjunto de regras) para disciplinar a argumentação científica. No entanto, antes dele (séculos V e IV A.C.), alguns filósofos e sofistas[1] já se ocupavam do problema da argumentação, linguagem (estrutura das sentenças), verdade, falácias, entendimento e convicção.

Os sofistas dedicavam-se à argumentação política e jurídica: ou seja, convencer os outros. Para eles, *verdade* seria aquilo que pudessem fazer seu interlocutor crer que fosse tal. Por exemplo, o famoso sofista Protágoras (485-415 A.C.) estudava a estrutura das sentenças, classificando-as como expressando

[1]A palavra *sofista* designa genericamente escolas de pensamento que se preocupavam com a argumentação política e jurídica, tendo o homem e não ideias abstratas como ponto de referência. Foram criticados pelos filósofos idealistas, que criaram o uso pejorativo da palavra sofista e sofisma. Para um estudo mais sério sobre estes pensadores, recomendamos a obra *Os Sofistas* de W. C. Guthrie, [8].

desejo (*gostaria que ...*), questão, resposta e comando (modo imperativo); Alcidamas (discípulo de outro sofista famoso, Górgias, e que floresceu em meados do século IV A.C.) classificava-as como afirmação, negação, questão e discurso; Antístenes (meados dos séculos V e IV A.C.) definia sentença como sendo aquilo que indique o que uma coisa foi ou é, de modo que aquele que dissesse a coisa que é, falaria a verdade.

O tartado de lógica mais antigo de que se tem notícia é o *Dissoi Logoi* – ou seja, *Duplos Argumentos* – publicado em cerca de 400 A.C., debatendo sobre verdade e falsidade, opondo duas teorias da verdade:

1. a verdade seria uma propriedade temporal de sentenças – uma senteną seria verdadeira se no momento que fosse proferida, ocorresse aquilo a que se refere (por exemplo, a frase *chove agora* seria considerada verdadeira se no momento em que fosase proferida estivesse chovendo, e falsa, caso contrário);

2. a verdade seria uma propriedade atemporal de sentenças – uma sentença seria considerada verdadeira se fosse o caso de que se conformasse com o que existisse.

Esse tratado também se refere ao problema de que um uso auto-referente do predicado verdade traria problemas (antecipando o famoso *paradoxo do mentiroso* descoberto por Eubúlides de Mileto em meados do século IV A.C. – uma pessoa diz *estou mentindo*; esta frase é verdadeira ou falsa?).

Platão separou a sintaxe (a sentença) e a semântica (o fato de ser verdadeira ou falsa) (veja seu diálogo *O Sofista*), mas não fez nenhum estudo sistemático da lógica.

3.1.2 Os Silogismos Aristotélicos

Aristóteles escreveu (pelo menos) seis livros tratando especificamente de lógica, agrupados posteriormente com o nome de *Órganon* (ferramenta). Ao analisar os argumentos matemáticos, ele pôde definir as regras básicas de argumentação lógica – os *silogismos*, ou deduções. As sentenças consideradas por Aristóteles eram da forma *Sujeito-Predicado* ligados pelo verbo *ser* conjugado conforme o caso. Tanto o sujeito quanto o predicado da sentença eram chamados de *termos*. Estes podem ser *termos universais* se forem da forma *todo X*, ou *termos particulares*, ou *indefinidos* se apenas contiver palavras ou expressões sem uma ideia de quantidade (todo ou algum). Podem haver também os *termos singulares*, aqueles que nomeiam alguma coisa ou ser específico (por exemplo, o nome de uma pessoa) – estes são tratados por Aristóteles como se fossem universais (por exemplo *Sócrates* – o nome do filósofo – era tratado também como se fosse *todo Sócrates*). Confrome seja o termo que é o sujeito da sentença, esta pode ser chamada de *universal*,, ou *particular* ou *indefinida*.

Ele definiu uma *dedução* como sendo *um discurso em que, sendo supostas certas coisas, algo diferente do que foi suposto resulta necessariamente por assim ser*[2].

Bom, essa definição não ajuda muito entender o que ele pretendia, mas uma descrição explícita de seu sistema vem a calhar.

Um silogismo é uma regra de extrair uma conclusão *necessária* a partir de duas premissas (ou seja, se for negada a conclusão, as premissas não poderão ambas serem aceitas). Os silogismos são construídos com sentenças de um dos tipos:

1. todo X é Y;
2. algum X é Y;
3. todo X é não Y (ou nenhum X é Y);
4. algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

Os dois primeiros tipos de sentenças são afirmativas e as duas últimas negativas. A sentença "*algum X é não Y*"é a negação de "*todo X é Y*"e a sentença "*nenhum X é Y*"é a negação de "*algum X é Y*".

Durante a Idade Média (não se sabe quando) surgiram palavras mnemônicas para a memorização das várias figuras dos modods de silogismos. Usaram as duas primeiras vogais da palavra latina *affirmo*, A e I, e as duas vogais da palavra *nego*, E e O, para indicar cada um dos tipos de sentenças que podem compor um silogismo:

1. (A): todo X é Y;
2. (I) algum X é Y;

[2]Ser necessário! Ou seja,se as coisas supostas forem verdadeiras, a conclusão tem que ser verdadeira.

3. (E) todo X é não Y (ou nenhum X é Y);
4. (O) algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

O silogismo envolverá sempre três termos nas três sentenças que o compœ, sendo que um termo será comum nas duas premissas (o chamado termo médio) e a conclusão envolverá os termos restantes: como exemplo, o primeiro silogismo:

Premissa: Todos os homens são animais.
Premissa: Todos os animais são mortais.
Conclusão: todos os homens são mortais.

Pensando nas classes (ou coleções) de homens, animais e mortais, temos que necessariamente os homens formam uma subclasse dos animais, que, por sua vez, formam uma subclasse dos mortais. A *premissa maior* é a sentença que contém como predicado (isto é, o que vem depois do verbo *ser*) o que virá a ser o predicado da conclusão. A outra premissa é chamada de *premissa menor*. O predicado da premissa menor é osujeito da premissa maior e não faz parte da conclusão. Este predicado é o chamado *termo médio* do silogismo.

O silogismo apresentado acima é da forma AAA, ou seja, as três sentenças que o compõem são da forma *todo X é Y*. O nome medieval deste tipo de silogismo é *BARBARA*.

Aristóteles obteve três figuras (ou tipos de estruturas) de silogismos, e para não ocupar muito espaço em sua exposição (e para melhor visualização) vamos introduzir um pouco de notação, usando as letras A, E I e O, como explicadas acima, definindo:

1. $A(X, Y)$: todo X é Y;
2. $I(X, Y)$ algum X é Y;
3. $E(X, Y)$ todo X é não Y (ou nenhum X é Y);
4. $O(X, Y)$ algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

Assim, o silogismo BARBARA pode ser escrito como $A(X, Y), A(Y, Z) \vdash A(X, Z)$ (aqui já usaremos o símbolo $\vdash$ para indicar a relação que diz ser o lado direito dele conclusão do que vem de seu lado esquerdo).

A **Primeira Figura** caracteriza-se pela forma genérica dos predicados: $*(Y,Z), *(X,Y) \rightarrow *(X,Z)$ (ou seja, o termo médio Y é o sujeito da premissa maior $*(Y,Z)$ e predicado da menor $*(X,Y)$), sendo que o asterisco representa uma das vogais A, E, I ou O. Essa figura é composta pelas quatro regras (ou *modos*) seguintes:

1. BARBARA $A(Y,Z), A(X,Y) \vdash A(X,Z)$
2. CELARENT $E(Y,Z), A(X,Y) \vdash E(X,Z)$
3. DARII $A(Y,Z), I(X,Y) \vdash I(X,Z)$
4. FERIO $E(Y,Z), I(X,Y) \vdash O(X,Z)$

Exercício 3.1.1 Mostre que somente essas possibilidades são válidas (tente outras permutações das vogais e verifique, dando um exemplo, que não podem ser válidas).

A **Segunda Figura** caracteriza-se pelo esquema $*(Y,Z), *(X,Z) \rightarrow *(X,Y)$ (isto é, o termo médio Z é o predicado das duas premissas) e tem quatro modos:

1. CESARE $E(Y,Z), A(X,Z) \vdash E(X,Y)$
2. CAMESTRES $A(Y,Z), E(X,Z) \vdash E(X,Y)$
3. FESTINO $E(Y,Z), I(X,Z) \vdash O(X,Y)$
4. BAROCO $A(Y,Z), O(X,Z) \vdash O(X,Y)$

A **Terceira Figura** caracteriza-se pelo esquema $*(X,Y), *(X,Z) \rightarrow *(Z,Y)$ (o termo médio X é o sujeito das duas premissas) e possui seis modos:

1. DARAPTI $A(X,Y), A(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
2. FELAPTON $E(X,Y), A(X,Z) \vdash O(Z,Y)$
3. DISAMIS $I(X,Y), A(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
4. DATISI $A(X,Y), I(X,Z) \vdash I(Z,Y)$

5. BOCARDO $O(X,Y), A(X,Z) \vdash O(Z,Y)$
6. FERISON $E(X,Y), I(X,Z) \vdash O(Z,Y)$

Um discípulo de Aristóteles, Teofrasto, isolou uma **Quarta Figura**, caracterizada por $*(X,Y), *(Y,Z) \to *(Z,X)$ (o termo médio Y é o sujeito da premissa menor e predicado da maior), com cinco modos:

1. BRAMANTIP (OU BAMALIP) $A(X,Y), A(Y,Z) \vdash I(Z,X)$
2. CAMENES $A(X,Y), E(Y,Z) \vdash E(Z,X)$
3. DIMARIS $I(X,Y), A(Y,Z) \vdash I(Z,X)$
4. FESAPO $E(X,Y), A(Y,Z) \vdash O(Z,X)$
5. FRESISON $E(X,Y), I(Y,Z) \vdash O(Z,X)$

Exercício 3.1.2 Descreva como são e verifique a validade dos seguintes *modos subalternos*: BARBARI, CELARONT, CESARO, CAMESTROP e CAMENOP, que se caracterizam por conclusoes particulares tiradas a partir de premissas universais. De quais modos foram obtidos?

Exercício 3.1.3 Do ponto de vista moderno, os modos BRAMANTIP e BARBARI são problemáticos. Explique porque. Aqui Aristóteles assume implicitamente alguma coisa que faz com que estes silogismos sejam válidos.

Agora exporemos os **Métodos de Prova** Aristotélicos. Como ele definiu uma demonstração (ou prova) como sendo um discurso *etc*, será então uma sequência de sentenças ordenadas segundo certos princípios e regras.

Uma demonstração pode ser *direta*, em que o discurso é composto por uma sequência de sentenças obtidas por silogismos ou regras de conversão (veja mais adiante) ou por redução ao absurdo.

O primeiro importante princípio é o **Princípio da Não Contradição**, estatuindo que não se pode afirmar e negar uma sentença ao mesmo tempo (ou seja, não pode uma sentença e sua negação serem ambas verdadeiras).

O segundo é o **Princípio do Terceiro Excluído**[3], ou seja, entre uma sentença e sua negação, exatamente uma delas será verdadeira.

Este princípio materializa-se nas **Demonstrações por Redução ao Absurdo**, em que, assumindo a negação do que se quer demonstrar e concluindo uma contradição (ou seja, existe uma sentença e também sua negação no discurso demonstrativo), pode-se concluir que o que se queria estará demonstrado.

A *Demonstração Direta* é o discurso partindo de premissas, *usando os silogismos da primeira figura* ou[4]

Regras de Conversão:

1. $E(X,Y) \vdash E(Y,X)$ (*nenhum* X *é* Y converte-se em *nenhum* Y *é* X);
2. $I(X,Y) \vdash I(Y,X)$ (*algum* X *é* Y converte-se em *algum* Y *é* X);
3. $A(X,Y) \vdash I(X,Y)$ (*todo* X *é* Y converte-se em *algum* X *é* Y – hoje em dia essa regra não é considerada válida – mas para os gragos antigos não fazia sentido falar em *conjunto vazio* e, portanto, uma frase do tipo *todo venusiano é verde* seria considerada falsa por não existirem venusianos[5]

Observemos que numa demonstração por redução ao absurdo também podem ser usadas estas regras e os silogismos da primeira figura.

Por fim, para **refutar** uma sentença, pode ser adimtido um (contra)exemplo.

Façamos dois exemplos de deduções neste sistema:

Exemplo 3.1.1 Vamos demonstrar o modo CESARE da segunda figura, ou seja, $E(X,Z), A(Y,Z) \vdash E(X,Y)$[6]

[3]Hoje em dia, principalmente com o advento da *Lógica Intuicionista*, há uma diferença importante entre o princípio da não contradição e o do terceiro excluído. Veja o Capítulo 4 sobre o Cálculo Proposicional em que daremos algumas noções da lógica intuicionista e a diferença entre esses dois institutos.

[4]Para nós, a menos de menção contrária, a palavra OU é inclusiva – falar A OU B significa pelo menos uma das sentenças entre as referidas – é o famoso E/OU usado em alguns textos. Veja mais sobre isto na próxima seção sobre a Lógica Estóica.

[5]Se porventura você acredita na existência de venusianos, substitua o termo por qualquer outro que você acredite não existir.

[6]Para os terráqueos, premissas: *nenhum* X *é* Z*, todo* Y *é* Z; conclusão: *nenhum* X *é* Y.

1. $E(X, Y)$ - premissa;
2. $A(Y, Z)$ – premissa;
3. $E(Z, X)$ – conversão de 1;
4. $E(X, Y)$ – conclusão de CELARENT, tendo como premissas 3 e 2 (nesta ordem).

Exemplo 3.1.2 Vamos agora usar o método da redução ao absurdo para provar BAROCO, ou seja, $A(X, Z), O(Y, Z) \vdash O(X, Y)$[7] Para isto, assumiremos que não valha a regra (ou seja, assumiremos as premissas e negaremos a conclusão[8]), obtendo uma contradição:

1. $A(X, Z)$ – premissa;
2. $O(Y, Z)$ – premissa;
3. $A(X, Y)$ – premissa (hipótese para a redução ao absurdo);
4. $A(Y, X)$ – conversão de 3;
5. $A(Y, Z)$ – BARBARA com premissas 4 e 3;
6. $O(X, Y)$ – conclusão devido à contradição entre 2 e 5.

Exercício 3.1.4 Mostre que cada um dos modos das figuras 2, 3 e 4 podem ser deduzidos neste sistema. [Sugestão: a consoante que inicia o nome de cada um desses modos coincide com aquele da primeira figura que será usado nma demonstração. O único modo que requer demonstração por redução ao absurdo é BOCARDO.]

Exercício 3.1.5 Mostre que os modos DARII e FERIO podem ser deduzidos no sistema em que só se usam os dois primeiros modos da primeira figura. [Sugestões: por redução ao absurdo usando CAMESTRES para DARII e CESARE para FERIO, e depois elimine essas figuras usando o exercício anterior.]

Muita coisa sobre a lógica de Aristóteles foi omitida deste texto. Recomendamos a leitura de [14].

[7] Para nós, pobres mortais, premissas: *todo X é Z, nenhum Y é Z*; conclusão: *nenhum X é Y.*

[8] Por que isto significa negar a regra?

3.1.3 A Lógica dos Estóicos

Dos estóicos falaremos pouco (veja [2] para mais detalhes). O que mais nos interessa de sua lógica é que trataram com profundidade o que hoje chamamos de Cálculo Proposicional, assunto de nosso próximo Capítulo[9]. Essencialmente estudaram a implicação (*se A então B*, que resumiremos com a notação $A \to B$) chegando às seguintes regras de dedução contendo duas premissas e uma conclusão:

1. $A \to B$; $A \vdash B$ (*Modus Ponens*)
2. $A \to B$; não $B \vdash$ não A (*Modus Tollens*)
3. se não for o caso de valer ambas A e B, mas valer $A \vdash$ não B
4. ou A ou B; $A \vdash$ não B (aqui eles entendem a palavra *ou* como sendo exclusivo – apenas uma das sentenças entre A e B pode ser verdadeira para que a disjunção[10] que compœ a primeira premissa seja verdadeira)
5. ou A ou B; não $A \vdash B$ (novamente disjunção exclusiva).

3.2 O Enfoque Moderno da Lógica

Vamos deixar a Antiguidade e pular para os séculos XIX e XX.

3.2.1 Boole e a Algebrização da Lógica

George Boole foi o primeiro que apresentou a Lógica como uma teoria matemática, dando um enfoque algébrico a ela – uma álgebra de conjuntos. Definiu abstratamente um sistema algébrico para formalizar os silogismos, como por exemplo, a sentença *todo X é Y* é representada pela relação $X \cdot Y = Y$, sendo que $\cdot$ seria uma operação binária (que para conjuntos corresponderia à intersecção) – hoje ela representa o conectivo E – assim, a representação algébrica do silogismo Barbara ficaria $Y \cdot Z = Y$; $X \cdot Y = X \vdash X \cdot Z = X$. Falaremos mais sobre essas álgebras (chamadas de álgebras de Boole, ou booleanas) no capítulo sobre o Cálculo Proposicional.

[9] Não perca!

[10] Sentenças do tipo *A ou B*, *ou A ou B*, são ditas disjunções.

O importante aqui é ressaltar a construção de objetos matemáticos que intepretam[11] fielmente (parte do) raciocínio lógico usado em matemática.

3.2.2 Leibniz e a —Lingua Characteristica – Frege e a Necessidade da Formalização

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou em 1666 a obra *Dissertatio de arte combinatoria* na qual esboçou um plano para o que chamava de *Característica Universal*, uma linguagem artificial prórpia para expressar os conceitos da lógica e filosofia. Esboçou também um cálculo lógico, cuja intenção era mecanizar as deduções (inferências) válidas e também verificar as deduções feitas por outros. Essas ideias influenciaram Charles Babbage, William Stanley Jevons, Charles Sanders Peirce e outros, os quais produziram trabalhos voltados para essa mecanização, culminando com o desenvolvimento dos computadores.

Uma influência assumida foi declarada por Gottlob Frege (1848-1925), que desenvolveu uma linguagem artificial para o estudo das deduções lógicas e expressões de conceitos, como tentativa de fundamentar a Matemática.

Desenvolveu seu sistema notacional primeiramente na obra *Begriffsschrift* (1879) (*Conceitografia*). A notação[12] que introduziu are gráfica, diagramática. Estava preocupado com a estrutura das inferências, e não tanto com o *conteúdo* do que era demonstrado. Assim, nessa obra, não especificou toda a linguagem, mas apenas aquela parte que poderíamos chamar de lógica.

Uma *proposição* (ou *julgamento*) era denotada por

$$\vdash A$$

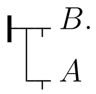
sendo que A denota o conteúdo da asserção. Se apenas quiser referir-se ao conteúdo, sem que se afirma ser uma proposição, usa apenas uma barra horizontal antes do conteúdo: $-A$. No entanto, não é qualquer conteúdo A que se torna uma proposição escrevendo o símbolo $\vdash A$ (por exemplo, o conteúdo A expressando o conceito *casa*). A *implicação* "*se A. então B*"era denotada por

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top B \\ \quad\llcorner A \end{array}$$

[11] Ou *refletem*, como num espelho.

[12] Foi possível escrevermos esta notação graças ao pacote *begriff.sty*, desenvolvido por by Josh Parsons – josh@coombs.anu.edu.au – que detém os direitos autorais do pacote.

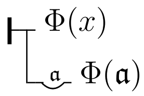
e a negação "*não A*" por $\vdash\!\!\top A$. Combinando com a implicação, teríamos, por exemplo, "*se não A, então não B*", dado por



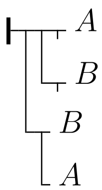
Um conteúdo pode ter alguma elemento indeterminado, que pode ser substituído por outros conteúdos – ou seja, uma variável. Podemos considerar tais conteúdos como *funções*: $\vdash \Phi(A)$ seria a proposição que "*A tem a propriedade* Φ"; $\vdash \Psi(A, B)$ seria a proposição "*A e B são relacionados por* Ψ". Com isto, temos a possibilidade da *quantificação* (universal), sendo que a proposição "*para todo* $\mathfrak{a}$, $\Phi(\mathfrak{a})$" tomaria a forma $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$.

Frege também considerou a possibilidade da letra Φ em $\Phi(A)$ ser considerada uma variável (proposicional), que poderia também ser quantificada: $\vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. Esta liberalidade, junto com a noção de extensão (discutida a seguir) é que permitiu a possibilidade do chamado paradoxo de Russel. Vejamos como isso ocorreu.

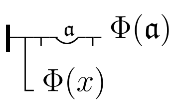
Frege descobriu as propriedades básicas de seu sistema, das quais salientamos as proposições



(ou seja, "*se para todo* $\mathfrak{a}$ *valer* $\Phi(\mathfrak{a})$, *então vale* $\Phi(x)$", sendo x um termo qualquer) e a contrapositiva, ou seja,



("*se A então B*" implica "*se não B então não A*"). Em particular, vale



(que pode ser lido como "*se* $\Phi(x)$ *então existe* $\mathfrak{a}$ *tal que* $\Phi(\mathfrak{a})$-- levando-se em conta que podemos provar que a dupla negação é equivalente a uma afirmação – preencha os detalhes que achar que estão faltando).

Outro ponto foi a definição de *extensão* de uma função $\mathfrak{f}(x)$ (na verdade, ele chamou de *curso de valores – Wertverlauf*), como sendo um registro de todos os possíveis valores que a função possa assumir – hoje pensamos em extensão, uma conjunto dos pares ordenados $(x, \mathfrak{f}(x))$, e denotou-o por $\grave{\varepsilon}\ \mathfrak{f}(\varepsilon)$. Frege, em sua obra *Grundgezetze der Arithmetik* enunciou algumas leis básicas, sendo que a que se mostrou problemática foi a

> **Lei Básica V:** $\vdash$ "$\grave{\varepsilon}\ \mathfrak{f}(\varepsilon) = \grave{\alpha}\ \mathfrak{g}(\alpha)$ *é equivalente a* $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}))$"(é claro que ele usou sua notação para a equivalência).

Assim, uma consequência desta lei é a seguinte proposição:

$$\vdash\!\!\top\overset{\mathfrak{W}}{\smile}\!\top (\mathfrak{W} = \grave{\varepsilon}\ \mathfrak{f}(\varepsilon))$$

(existe $\mathfrak{W}$ tal que $(\mathfrak{W} = \grave{\varepsilon}\ \mathfrak{f}(\varepsilon))$).

Vejamos na seção seguinte o que isso acarreta.

3.2.3 Russel: o Paradoxo e a Teoria dos Tipos

Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) foi um filósofo inglês, que escreveu sobre lógica, crítica social, pacifismo, mas sua fama no meio acadêmico foi devida às suas contribuições para a Lógica Matemática e Filosofia Analítica. Ao estudar os trabalhos de Frege, principalmente o *Grundgezetze*, descobriu em 1901 o famoso paradoxo.

Ele observou que alguns conceitos predicavam a si mesmo (por exemplo, *extensão* é uma coleção de objetos satisfazendo um dado predicado e a coleção de extensões forma uma extensão do conceito *extensão* – ou seja, predica a si mesmo), enquanto outros não (por exemplo, *colher*[13]). Assim, considerou a função $\mathfrak{R}(X) =_{\top} X(X)$, ou seja, que X não *predica* a si mesmo. Sua extensão seria $\grave{\varepsilon}\ \mathfrak{R}(\varepsilon)$ e, aplicando a Lei Básica V (na verdade, sua consequência dizendo que existe $\mathfrak{W}$ tal que $\mathfrak{W} = \grave{\varepsilon}\ \mathfrak{R}(\varepsilon)$), obteve um *predicado* $\mathfrak{W}$ dos predicados que não predicam a si mesmo e perguntou se $\mathfrak{W}$ predicava a si mesmo, obtendo o paradoxo:

> $\mathfrak{W}(\mathfrak{W})$ se, e somente se, não $\mathfrak{W}(\mathfrak{W})$.

[13]Não confunda predicação com identidade: *uma colher é uma colher* significa a identidade da colher consigo mesma e não que ela predica a si mesma.

Sua análise do paradoxo (e dos paradoxos anteriores, encontrados na Teoria dos Conjuntos) apontou que a essência desses paradoxos é uma pemrmissão de expressar circularidade de argumentos, ou seja, que objetos possam referir-se a si mesmos (ou *auto-referência*).

Criou, então, uma proposta de hierarquizar os objetos da linguagem matemática – a sua Teoria de Tipos. Objetos de um determinado tipo somente poderia referir-se a objetos de um nível hierárquico inferior. O nível zero era do que chamamos hoje de cálculo proposicional, o nível 1, dos *indivíduos*, era referido como objetos de *primeira ordem*, e assim por diante.

A descrição dessa teoria é muito complicada e distancia-se dos objetivos principais deste texto. Entretanto, quando falarmos do Cálculo de Predicados, voltaremos ao tema.

3.2.4 O Programa de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) foi um matemático muito prolixo, publicando em diversas áreas. Seu trabalho sobre os fundamentos da matemática começou com a geometria na década de 1890, culminando com sua obra *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), em que propôs uma axiomatização da Geometria Euclideana e reduziu o problema de mostrar que esta era consistente[14] ao da consistência do sistema dos números reais, interpretando o plano euclideano em $\mathbb{R}^2$.

Propunha formalizar toda a matemática, coletando um conjunto básico de axiomas e, a partir deles, deduzir todos os teoremas por um modo mecânico e, em particular, demosntrar sua consistência.

Durante as primeiras décadas do século XX, formulou este programa[15], o qual foi derrubado pelos Teoremas de Incompletude de Kurt Gödel (1906-1978), que serão estudados no último capítulo destas notas.

[14]Ser consistente significa não podermos deduzir contradições a partir de seus postulados.

[15]Consulte o livro de W. Carnielli e R. Epstein. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*, [6], para um estudo mais aprofundado deste programa.