

MAT 2456 - CÁLCULO IV - POLI - 2008
Lista 6 - Equações Diferenciais de Ordem Superior

- (1) REDUÇÃO DE ORDEM: Alguns tipos de equações de 2ª ordem podem, após uma mudança de variável, passar a ser de 1ª ordem e assim resolvidas pelos métodos conhecidos.

CASO 1: Variável Dependente Ausente: Se na equação y não estiver presente, fazemos $z = y'$ e assim como $y'' = z'$, a equação passa ser de 1ª ordem.

Ex.: $xy'' - y' = 3x^2$; se $z = y'$, então temos a equação $xz' - z = 3x^2$.

(a) Resolva por esse método as equações:

(1) $xy'' - y' = 3x^2$

(2) $xy'' = y' + (y')^3$

(3) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$

(4) $x^2y'' + xy' = 1$

CASO 2: Variável Independente Ausente: Se a variável x não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente u , fazendo $u = y' = \frac{dy}{dx}$,

e temos então que $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$ e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de 1ª ordem.

Ex: $y'' + y = 0$

$u \frac{du}{dy} + y = 0$ e $u = \frac{dy}{dx}$

(b) Resolva por esse método as seguintes equações:

(1) $y'' + 4y = 0$

(2) $y'' - 9y = 0$

(3) $yy'' + (y')^2 = 0$

(4) $yy'' = y^2y' + (y')^2$

(c) Encontre a solução particular

(1) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$; $y'(1) = 0$; $y(1) = 1$. O que acontece com as condições iniciais $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$?

(2) $yy'' = y^2y' + (y')^2$; $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y'(0) = 1$.

- (2) Determine outra solução y_2 das equações abaixo, a partir de y_1 dada, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente. Mostre que o conjunto é linearmente independente:

(1) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1 = x^2$

(2) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$

(3) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$, $y_1 = x$

(4) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$

(5) $xy'' + 3y' = 0$, $y_1 = 1$

$$(6) \quad x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad y_1 = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(7) \quad xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0, \quad y_1 = e^x$$

(3) Determine a solução geral das equações:

$$(1) \quad y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$$

$$(2) \quad y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$$

(5) Determine todas as soluções das equações:

$$(1) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

$$(2) \quad y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$(3) \quad y''' - y'' + y' - y = 0$$

$$(4) \quad 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$(5) \quad y'' - 9y' + 20y = 0$$

$$(6) \quad 2y'' + 2y' + 3y = 0$$

$$(7) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$(8) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + y = 0$$

$$(9) \quad \frac{d^5 y}{dx^5} + 2\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0$$

(6) Uma equação linear da forma $x^2 y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes, é chamada EQUAÇÃO DE EULER de segunda ordem. A mudança de variável $x = e^z$ se $x > 0$ (e $x = e^{-x}$ se $x < 0$) transforma a equação de Euler em uma equação linear de coeficientes constantes.

Aplique esta técnica para determinar a solução das equações:

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' + y = 0$$

$$(2) \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

$$(3) \quad x^2 y'' + 3xy' + 10y = 0$$

$$(4) \quad 2x^2 y'' + 10xy' + 3y = 0$$

$$(5) \quad x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$$

(7) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) \quad \text{e}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$$

respectivamente, mostre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$. (Princípio de Superposição) Use isto para resolver:

$$(1) \quad y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$$

$$(2) \quad y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} x + xe^{2x}$$

$$(3) \quad y'' + 2y' = 1 + x^2 + e^{-2x}$$

$$(4) \quad y'' + y' - 2y = 6e^{-x} + 4$$

$$(5) \quad y'' + y = \cos x + 8x^2$$

(8) Resolva.

a) $xy'' - y' = 3x^2$

b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$

c) $y''' + y' = \sec x$

(9) Determine a solução geral das seguintes equações:

(1) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

(2) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

(3) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$

(4) $y'' - 2y' = 12x - 10$

(5) $y'' + y = 2 \cos x$

(6) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

(7) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y - (2 + x)y = x(x + 1)^2$

(8) $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$

(9) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

(10) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$

(11) $y'' + y' - 2y = 8 \operatorname{sen} x$

(12) $y'' - 3y' = x + \cos x$

(13) $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = x^3$

(14) $y''' - y = x^3 - 1$

(15) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

(10) Ache a solução geral da equação diferencial dada, em série de potências centradas em 0.

(1) $y'' - xy' - y = 0$

(2) $y'' - x^2y = 0$

(3) $y'' + 2xy' + 4y = 0$

(11) (i) Uma equação diferencial da forma $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, $p \in \mathbb{R}$, é chamada EQUAÇÃO DE BESSEL de ordem p .

(a) Se $p = 0$, mostre que $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ e $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}$

$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$ são soluções LI da equação de Bessel.

(b) Se $p = 1$ mostre que $y = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2! 3!} - \frac{x^6}{2^6 2! 3! 4!} + \dots\right)$ é solução.

(ii) A equação diferencial $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ é chamada EQUAÇÃO DE LEGENDRE. Mostre que

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\dots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

e

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

são soluções independentes da equação de Legendre, no intervalo $|x| < 1$.

(12) Discutir o comportamento das soluções das equações seguintes, e sua interpretação física:

a) Equação homogênea de mola:

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = 0, \quad (\mu \geq 0)$$

b) Equação da mola com segundo membro periódico, sem atrito

$$x'' + \alpha^2 x = \beta \operatorname{sen} \omega t$$

c) Equação da mola com segundo membro periódico, com atrito

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = \beta \operatorname{sen} \omega t \quad (\mu \geq 0)$$

MAT 211 - CÁLCULO IV - POLI
LISTA 6 - RESPOSTAS

(1) Respostas

(a) (1) $y(x) = x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2$
 (2) $y(x) = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2x^2} + C_2$
 (3) $y(x) = -\frac{x^2}{2} - C_1x - C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2$
 (4) $y(x) = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln|x| + C_2$
 (b) (1) $y(x) = C_1 \text{ sen } 2x + C_2 \cos 2x$
 (2) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$
 (3) $y^2 = C_1x + C_2$
 (4) $y = C_2(C_1 + y)e^x$

(2) Respostas

(1) $y_2 = C_1x^2 + C_2x^{-2}$ (3) $y_2 = C_1x + C_2e^x$
 (5) $y_2 = C_1 + C_2x^{-2}$ (7) $y^2 = C_1e^x + C_2e^xx^2$

(3) Respostas

(1) $y(x) = C_1x + C_2x - \int x^{-2}e^{\int x f(x)dx} dx$
 (2) $y(x) = C_1e^x + C_2e^x \int e^{-2x+\int f(x)dx} dx$

(5) Respostas

(1) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ (2) $y(x) = C_2e^{2x} + C_2xe^{2x}$
 (3) $y(x) = C_1e^x + C_2 \text{ sen } x + C_3 \cos x$ (4) $y(x) = C_1e^x \text{ sen}\sqrt{3}x + C_2e^x \cos\sqrt{3}x$
 (5) $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}$ (6) $y(x) = C_1e^{\frac{-1}{2}x} \text{ sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{\frac{-1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{5}}{2}x$
 (7) $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$ (8) $y(x) = C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \text{ sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$
 (9) $y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \text{ sen } x + C_4x \cos x + C_5c \text{ sen } x$

(6) Respostas

(1) $y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \text{ sen}(\ln x) + 1$
 (2) $y(x) = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$
 (3) $y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \text{ sen}(\ln x^3)]$
 (4) $y(x) = C_1x^{-2+\sqrt{\frac{10}{2}}} + C_2x^{-2-\sqrt{\frac{10}{2}}}$
 (5) $y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-4}$

(7) Respostas

$$(1) y(x) = \frac{e^x}{6} + \frac{e^{2x}}{12} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$$(2) y(x) = -\frac{1}{50} \cos x - \frac{7}{50} \operatorname{sen} x + e^{2x} \left(\frac{1}{10} x^2 - \frac{1}{10} x^2 - \frac{1}{25} x + \frac{1}{125} + C_1 \right) + C_2 e^{-3x}$$

$$(3) y(x) = -\frac{3}{4} x + \frac{x^3}{6} + e^{-2x} \left(C_2 - \frac{1}{2} x \right) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{8} + C_1$$

$$(4) y(x) = -3e^{-x} - 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$(5) y(x) = \operatorname{sen} x \left(\frac{1}{2} x + C_1 \right) + C_2 \cos x + 8x^2 - 16$$

(8) Respostas

a) $A + Bx^2 + x$

b) $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$

c) $y = A + B \operatorname{sen} x + C \cos x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \ln |\cos x| - x \cos x$

(9) Respostas

$$(1) y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \ln x - \frac{3}{4} x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$(2) y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

$$(3) y(x) = \frac{1}{2} x e^{-x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x + C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x$$

$$(4) y(x) = -3x^2 + 2x + 1 + C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$(5) y(x) = x \operatorname{sen} x + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

$$(6) y(x) = C_1 x + C_2(x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$$

$$(7) y(x) = C_1 e^x + C_2 x^{-1} - x - 1 \frac{x^2}{3}$$

$$(8) y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x$$

$$(9) y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1 x + C_2)$$

$$(10) y(x) = e^{2x} \left(\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{32} x - \frac{1}{128} + C_1 \right) + C_2 e^{-2x}$$

$$(11) y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3 \operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$$

$$(12) y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3 \operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$$

$$(13) y(x) = C_1 + C_2 x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{20} x^5 + (C_3 + C_4 x) e^x$$

$$(14) y(x) = C_1 e^x + e^{\frac{-1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - x^3 - 5$$

$$(15) y(x) = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^x \operatorname{sen}$$

(10) Respostas

$$(1) y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2x}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$(2) y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)\dots 4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)\dots 5.4}$$

$$(3) y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$$