## MAT 2456 - CÁLCULO IV - POLI - 2008

### Lista 1 - Complementar

**Justifique todas as afirmações**

1. Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}(x-4)^{2n}$

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}\ x^n$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$

2. É conhecido que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ é uma série de potências, $a_n > 0\ \forall n \geq n_0$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = L$ então $R = 1/L$. Ache o raio de convergência para as séries seguintes e comente.

a) $\sum_{n=1} x^n \frac{2n!}{(n!)^2}$

b) $\sum x^{2n} \frac{(2n!)}{(n!)^2}$

c) $\sum x^{n^2} \frac{(2n!)}{(n!)^2}$

d) $\sum x^n \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum x^{3n} \frac{n!}{n^n}$

f) $\sum x^{n!} \frac{n!}{n^n}$

3. Calcular o intervalo de convergência de:

a) $\sum \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$

b) $\sum \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$

c) $\sum \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$

d) $\sum \frac{x^n}{\ln n}$

e) $\sum \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}\quad b > a > 0$

4. Examine a convergência de:

a) $\sum \frac{1}{\ln n}$ b) $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$

c) $\sum \frac{1}{n^{ln\, n}}$ d) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{ln\, n}}$

Solução : se $\ln n > 9 > e^2 \Longrightarrow \ln n^{\ln n} > e^{2\, ln\, n} = n^2 \Longrightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(\ln n)^{ln\, n}}$

e) $\sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$ f) $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

g) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

5. Ex. teste da integral:

a) $\sum \frac{1}{1+n^2}$ b) $\sum \frac{1}{n\ln n}$

c) $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ d) $\sum \frac{\ln^2 n}{n^2}$

e) $\sum \frac{\ln^2 n}{n^3}$

6. Para quais valores de $\alpha > 0$ a série é convergente?

a) $\sum \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ b) $\sum \ln^3\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$

c) $\sum \left(\sqrt{4+\frac{1}{n^{2\alpha}}}-2\right)$ d) $\sum (e^{1/n^\alpha}-1)$

7. Seja $a_n$ definida por $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{2^j} \\ a_{2j+1} = \frac{(-1)}{j} \end{cases}$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é alternada? A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?

8. Seja $a_n$ dada por $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{j^3} \\ a_{2j+1} = -\frac{1}{j^2} \end{cases}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é alternada? A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica o C. de Leibniz?

9. Seja $b_k$ definida por $\begin{cases} b_{2j} = \frac{1}{j} \\ b_{2j+1} = \frac{-1}{j^3} \end{cases}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge?

10. Para quais valores de $k \in I\!N$ a série $\sum \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ é convergente?

11. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

12. Considere a série de potências $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Mostre que

(a) Se existe $\beta > 0$ tal que $|a_n| \leq \beta, \forall n \geq 0$ então $R \geq 1$

(b) Se existe $\alpha > 0$ tal que $|a_n| \geq \alpha,\ \forall n \geq 0$ então $R \leq 1$.

(c) Se existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \leq |a_n| \leq \beta,\ \forall n \geq 0$ então $R = 1$.

(d) Se $|a_n| \leq \frac{1}{3^n},\ \forall n \geq 0$ então $R \geq 3$

13. Calcule o raio e o intervalo de convergência das séries:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (sen\ n) x^n$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} x^n$