Sobre o número neperiano "e", exponenciais e logaritmos

Definição: $e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

A definição acima do número neperiano "e" decorre dos fatos (que assumimos conhecido) de que a sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$, onde $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, é estritamente crescente e limitada superiormente ($a_n < 3$, para todo $n \geq 1$).

Portanto a sequência dada converge, ou seja $\lim_{n\to+\infty} a_n$ é um número real e esse número real, por definição é denominado de "e".

• A função exponencial

• Lembrete: Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, a potência $a^r \in \mathbb{R}$ é definida da seguinte forma:

$$\bullet \text{ Se } \begin{cases} r = \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}, \text{ então } a^r = a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Com tal definição, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, podemos definir a função $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_a(r) = a^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Observação: Note que a função f_1, para $a = 1$, é a função constante $g(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Teorema: Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Então existe uma função $\widehat{f_a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que

$$\widehat{f_a}(r) = f_a(r) = a^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

A função $\widehat{f_a}$ é denominada *função exponencial de base a* e é também denotada por $\exp_a$.

Portanto, escrevemos $\widehat{f_a}(x) = a^x = \exp_a(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

• Propriedades da função exponencial $\exp_a$

1. $\mathcal{D}(exp_a) = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im}\exp_a =]0, +\infty[$.

2. $a^0 = 1$ e $a^1 = a$

3. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

4. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

5. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

6. $\begin{cases} \text{Para } a > 1, \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } a^{x_1} < a^{x_2}. \quad (\text{i.é, } \exp_a \text{ é estritamente crescente (E.C.)}) \\ \\ \text{Para } 0 < a < 1, \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } a^{x_1} > a^{x_2}. \ (\text{i.é. , } \exp_a \text{ é estritamente decrescente (E.D.)}) \end{cases}$

7. $\lim\limits_{x \to x_o} a^x = a^{x_o}$, com $x_o \in \mathbb{R}$.

8. $$\begin{cases} \text{Se } a > 1 \text{ então } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \end{cases} & (\text{ caso E.C.}) \\ \\ \text{Se } 0 < a < 1 \text{ então } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{cases} & (\text{ caso E.D.}) \end{cases}$$

• A função logarítma $\log_a$

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Usando a propriedade 1 acima, consideremos a função exponencial
$(*) \quad \exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, definida por $y = \exp_a(x) = a^x$.

Como a função $\exp_a$ é E.C. ou E.D temos que ela é injetora; além disso, com a restrição do seu contra-domínio ao intervalo $]0, +\infty[$, resulta que é invertível, ou seja, ela admite uma inversa.

A função inversa da função $\exp_a$, que será denotada por $\log_a$, é por definição a função

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} \text{para cada } x > 0, \\ \\ \log_a(x) = y \end{cases} :\iff a^y = x.$$

• Propriedades da função logarítmica $\log_a$

Lembrando que: $\log_a x = y \iff a^y = x$

1. $\mathcal{D}(log_a) =]0, +\infty[$ e $\operatorname{Im}(log_a) = \mathbb{R}$

2. $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$.

3 . $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \ \forall x_1, x_2 > 0$.

4. $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2, \ \forall x_1, x_2 > 0$.

5. $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x, \ \forall x > 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

6. $\begin{cases} \text{Para } a > 1, \quad \text{se} \quad 0 < x_1 < x_2 \quad \text{então} \quad \log_a x_1 < \log_a x_2. \ (\text{i.é., } \log_a \text{ é E.C.}) \\ \text{Para } 0 < a < 1, \quad \text{se} \quad 0 < x_1 < x_2 \quad \text{então} \quad \log_a x_1 > \log_a x_2. \ (\text{i.é., } \log_a \text{ é E. D.}) \end{cases}$

7. Seja $b > 0,\ b \neq 1$. Então, para todo $x > 0$, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (mudança de base)

8. Importantes: $\begin{cases} a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0 \\ \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

• Gráficos das funções $\exp_a$ e $\log_a$ de base a, $a > 1$

$y = a^x \qquad y = \log_a x \qquad y = x$

$\lim\limits_{x \to p} a^x = a^p, \quad \forall p \in \mathbb{R}$

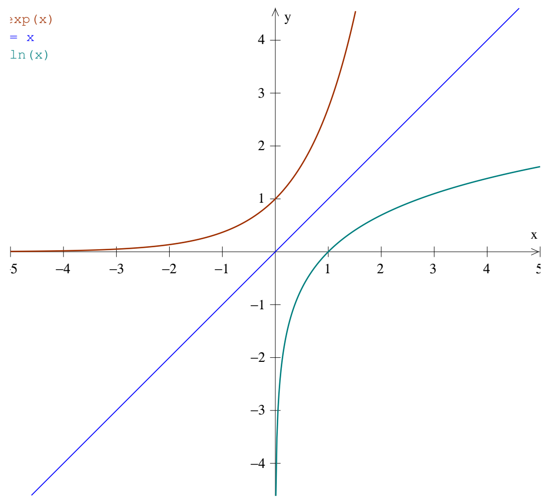
$\lim\limits_{x \to p} \log_a x = \log_a p, \quad \text{para todo } p > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$



• Gráficos das funções $\exp_a$ e $\log_a$ de base a, $0 < a < 1$

$y = a^x \qquad y = \log_a x \qquad y = x$

$\lim\limits_{x \to p} a^x = a^p, \quad \forall p \in \mathbb{R}$

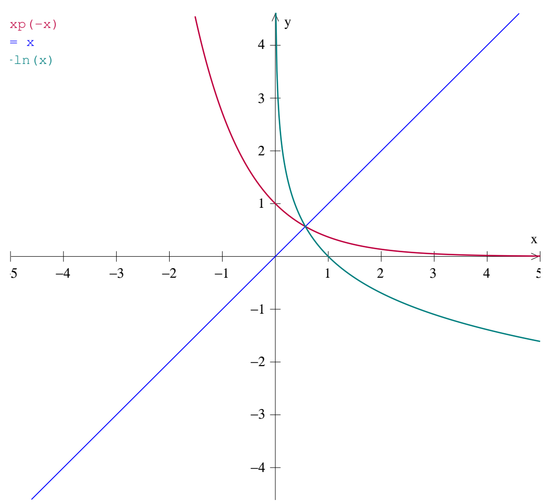
$\lim\limits_{x \to p} \log_a x = \log_a p, \quad \text{para todo } p > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$



- 2^o **Limite fundamental e outros limites relacionados**

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n := e \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim\limits_{u\to 0}\,(1+u)^{1/u} = e$

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$

- **Exercício:** Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Mostre que existe o $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{a^t-1}{t}$ e que

$$\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t} = \ln a.$$