RESUMO DE DERIVABILIDADE

I. DERIVADA- Definição

Definição: Sejam $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo I e $x_o \in I$.

Dizemos que f é derivável (ou tem derivada ou é diferenciável) em x_o se, e somente se,

$$(**) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, o limite em $(**)$ é chamado **derivada de** f em x_o e denotado por uma das formas:

$$f'(x_o) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(x_o) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}(x_o).$$

Definição: Uma função f é dita **derivável** se f é derivável em cada $x_o \in I$.

Observações: Podemos escrever , para $x_o \in I$ fixo,

- Se $\exists \displaystyle\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}$, então também

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

Para pontos ´´genéricos": para cada $x \in I$ fixado,

- $f'(x) = \displaystyle\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se os limites forem finitos

- **Taxa de Variação**

1. Para $x \neq x_o$, o quociente $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ é denominado taxa média de variação de f, no intervalo determinado por x_o e x.

2. Se f é derivável em x_o, a derivada $f'(x_o) = \displaystyle\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x)}{x - x_o}$ é denominada taxa de variação (instantânea) de f em x_o.

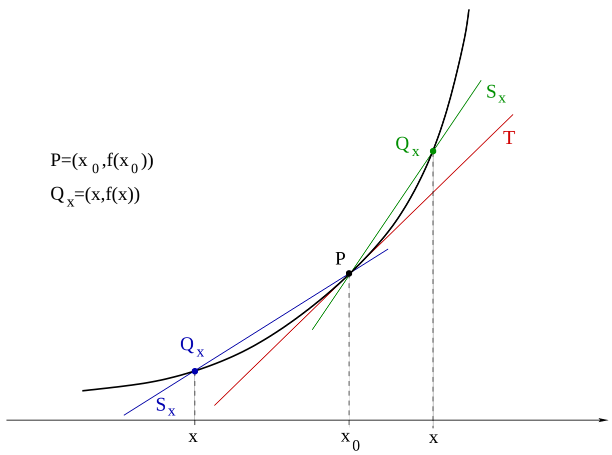
II. Geometria da derivada - Reta Tangente

• **Definicão:** Se f é derivável em x_o, define-se **Reta tangente ao gráfico de f no ponto** $(x_o, f(x_o)$ à reta T que passa por tal ponto e tem coeficiente angular $f'(x_o)$. A equação dessa reta T será dada pela equação

$$\boxed{y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)}\,.$$

Essa reta é, portanto, o gráfico da função $y = T(x) = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

• Por que reta tangente via derivada?



Para $x \neq x_o$, seja S_x a reta (secante) que liga os pontos $P = (x_o, f(x_o))$ e $Q_x = (x, f(x))$.

O coeficiente angular de cada S_x é dado por $m(x) = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

Supondo que $\lim\limits_{x \to x_o} m(x) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}$ e, sendo portanto igual a $f'(x_o)$, pode-se entender então porque a reta T, de coeficiente angular igual $f'(x_o)$, definida como reta tangente ao gráfico de f em $(x_o, f(x_o))$, pode ser vista como " posição limite " das retas secantes S_x, que passam por $(x_o, f(x_o))$, quando $x \to x_o$.

III. Derivação x Continuidade

Teorema 1. Sejam f uma função definida em um intervalo I e $x_o \in I$.

Se f é derivável em $x_o \in I$, então f é contínua em x_o.

Observações: • Se f não for contínua em x_o, então f não é derivável em x_o. (Consequência do Teor. 1)

• Cuidado!! f ser contínua em x_o nem sempre implica que f é derivável em x_o. (**Não se esqueça de ter um contra-exemplo a mão.**)

IV. Derivabilidade e Regras de Derivação

Teorema 2. (Propriedades Algébricas da Derivação)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, e f e g funções definidas em um intervalo I. Supondo que f e g sejam deriváveis em $p \in I$, então:

a. As funções $f+g$, αf e $f \cdot g$ são deriváveis em p.

b. As funções $\dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$ têm derivada em p, desde que $g(p) \neq 0$.

E são válidas: **D1.** $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

D2. $(\alpha f)'(p) = \alpha f'(p)$.

D3. $(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)$.

D4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(p) = \dfrac{-g'(p)}{(g(p))^2}$.

D5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)}{(g(p))^2}$

• Regra da Cadeia - Derivada de composta de funções

Teorema 3. (Regra da Cadeia)

Sejam as funções $y = g(u)$ definida num intervalo J e $u{=}f(x)$, definida num intervalo I, de forma que $\mathrm{Im}\, f \subset J$. Se

- f tem derivada em x_o (i.é, existe $f'(x_o)$) e
- g tem derivada em $u_o = f(x_o)$ (i. é, existe $g'(u_o)$).

Então a função composta $H(x) = (g \circ f)(x) := g(f(x))$ tem derivada em x_o e vale que:

$$H'(x_o) = (g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)) \cdot f'(x_o).$$

Podemos também escrever, para $\forall x \in I$ em que f é derivável e para $\forall u = f(x)$ em que g é derivável:

$$\frac{dH}{dx}(x) = \frac{dg}{du}(u) \cdot \frac{df}{dx}(x), \text{ onde } u = f(x).$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{onde } u = f(x).$$

• ESQUEMA HORIZONTAL DA REGRA DA CADEIA

TAXA VAR.PARC **TAXA VAR.PARC**

$$\mathbf{x} \xrightarrow[f'(x)]{\frac{du}{dx}} u = f(x) \xrightarrow[g'(u)]{\frac{dy}{du}} y = g(u)$$

TAXA VAR.TOTAL: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ **ou**

TAXA VAR.TOTAL: $H'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$, onde $u = f(x)$

V. Regras de Derivação

0. $\frac{d}{dx}(constante) = 0$ **1.** $\frac{d}{dx}(ax+b) = a$ **2.0.** $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2.1. $\frac{d}{dx}(x^m) = m\,x^{m-1}$, com $m \in Z$ e $x \neq 0$. **2.2.** $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ e $x > 0$.

2.3. $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha\,x^{\alpha-1}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. **3.** $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

4. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ **5.** $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x.$ **6.** $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

7. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ **8.** $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

9. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$ **10.** $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec} x$ $(x \neq k\pi)$

• Regras de Derivação com Regra da Cadeia

Seja f uma função derivável. Então, pela Regra da Cadeia, vale que:

2. $\dfrac{d}{dx}\left((f(x))^{\alpha} \right) = \alpha \cdot (f(x))^{\alpha-1} \cdot f'(x) \quad (\text{com } f(x) > 0)$

3. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{f(x)} \right) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln(f(x)) \right) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{com } f(x) > 0)$

5. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(f(x)) \right) = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(f(x)) \right) = -f'(x) \cdot \operatorname{sen}(f(x))$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}(f(x)) \right) = f'(x) \cdot \sec^2(f(x))$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{cotg}(f(x)) \right) = -f'(x) \cdot \operatorname{cossec}^2(f(x))$

9. $\dfrac{d}{dx}\left(\sec(f(x)) \right) = f'(x) \cdot \sec(f(x)) \cdot \operatorname{tg}(f(x))$

10. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{cossec}(f(x)) \right) = -f'(x) \cdot \operatorname{cossec}(f(x)) \cdot \operatorname{cotg}(f(x))$