

3a. Lista de Exercícios de MAT 3110

ATUÁRIA - FEA -USP - 1o. SEM. 2017 - TURMA 26

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Aplicações dos Teoremas: do Anulamento, do Valor Intermediário, do Valor Médio e suas consequências

1. Mostre que a função $g(x) = e^{3x} + 8x - \sin(\pi x)$ tem exatamente uma raiz real (isto é, g se anula uma única vez) e localize-a entre dois inteiros consecutivos.
2. a. Prove que existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\frac{c\pi}{2}) = 2 - 3c$;
b. Prove que tal c é único.
3. Dentre as funções dadas abaixo, qual a que define uma função bijetora de \mathbb{R} ?
a. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15x$ b. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 15x$ c. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
d. $f(x) = 5x^3 - 15x$ e. $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 15x$
4. Seja $p = p(x)$ uma função polinomial de grau 3, com 3 raízes reais distintas. Mostre que p tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.
5. (Transferência Fuvest 2012) Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais. Qual a alternativa verdadeira?
a. Se $c > 0$ então $p(x)$ terá pelo menos uma raiz positiva.
b. $p(x)$ sempre terá pelo menos um ponto crítico (i.é, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $p'(\alpha) = 0$).
c. $p(x)$ sempre terá exatamente um ponto de inflexão.
d. Se $a^2 < 3b$ então $p(x)$ não será injetora.
e. Se $a^2 < 3b$ então $p(x)$ não será sobrejetora.

II. Construindo gráficos de funções

1. Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando para isso as ferramentas das derivadas e dos limites (caso necessário).
a. $f(x) = x^3 - x$ b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ c. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$
d. $f(x) = 2 - e^{-t}$ (*) e. $f(t) = t + \frac{1}{t}$
f. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x}$ g. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (*) h. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$
i. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ j. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ k. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
l. $f(t) = \frac{t-1}{t^2}$ m. $y = \sqrt{x^2 - 4}$ (*) n. $y = \frac{9}{x^2 + 9}$

Observação: Nos itens com (*) pense um pouco se uma construção otimizada seria não usar as ferramentas do Cálculo I !!!!!

NOTA: Um primeiro roteiro para a construção de gráficos de funções $y = f(x)$

I. Determine:

1. o domínio de f ;
2. os intervalos de crescimento e decrescimento de f (via 1a. derivada);
3. os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão de f (caso existam) (via 2a. derivada);
4. Se for o caso, os seguintes limites:
 - laterais ou no ponto $p \in \mathcal{D}(f)$, mas f não é contínua em p ;
 - laterais ou no ponto $p \notin \mathcal{D}(f)$, mas p é extremo de um dos intervalos contidos no domínio;
 - para $x \rightarrow +\infty$ ou para $x \rightarrow -\infty$
5. Determinar ou localizar as raízes de f .