2. 1. Lista de Exercícios de MAT 3110

ATUÁRIA - FEA- USP - 1o. sem. 2017 - Turma 26 (N)

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

EXISTE ALGUMAS CORREÇÕES NESTA LISTA E ELAS ESTÃO EM VERMELHO:
ver II.2; II.3; II.6; III.8 e IV

I. Sobre derivadas

1. Verifique se f é contínua e derivável no ponto p indicado, sendo:

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \quad p = 1$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad p = 0$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad p = 0$

d. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad p = 0.$

e. $f(x) = |\operatorname{sen}(x^5)|$, $\quad p = 0$

2. Mostre **pela definição** que $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ é derivável em $x = -1$.

3. Considere a função $f(x) = x\,g(x)$, onde g é uma função contínua em $x_o = 0$. Mostre que f é derivável em x_o e calcule $f'(0)$ em termos de g.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente derivável em $x_o = 0$). Mostre que a função de $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável no ponto $x = 0$ e calcule $h'(0)$.

5. Seja a função $f(x) = x\,|\,x\,|$. Decida se f é derivável em $p = 0$ e calcule $f'(0)$ em caso afirmativo.

6. Determine constantes a, b e c de forma que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$ e que $f\,'(0) = 0$.

7. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. A f é contínua em $x = 0$? f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

8. Decida em que pontos f é derivável: **a.** $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$ **b.** $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$.

II. Derivando...

1. Determine f', para as funções f dadas abaixo.

a. $f(x) = 3x^2 + \cos\, x + \pi^2$ **b.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{\text{tg}\ x}$ **c.** $f(x) = \cos\, x + (x^2+1)\,\text{sen}\ x$

d. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + e^2$ **e.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ **f.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\pi}{x^2}$

g. $f(x) = x \cos\, x\, \text{sen}\ x$ **h.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{5}$ **i.** $f(t) = t^4\, \sqrt{x}$

j. $f(y) = \dfrac{ln\, y}{y}$ **k.** $f(x) = 2\,\text{tg}\ x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **l.** $f(t) = e^t\, \text{sen}\ t + e^2\, \text{tg}\ t$

2. Existe uma função $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$, onde:

a. $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $f(x) = \dfrac{b_2}{x^2} + \dfrac{b_3}{x^3} + ... + \dfrac{b_k}{x^k}$, com $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Ache mais uma g para cada um dos ítens acima.

d. Existe alguma função da forma $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + \dfrac{b_1}{x^1} + \dfrac{b_2}{x^2} + ... + \dfrac{b^k}{x^k}$ tal que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Justifique.

3. Calcule a derivada das funções indicadas, simplificando o resultado quando possível.

a. $y = \text{sen}(x^5)$ **b.** $f(x) = \text{sen}^5\ x$ **c.** $f(x) = \text{sen}(\cos\, x)$

d. $y = x\, e^{\frac{1}{x}}$ **e.** $y = ln(t^2 + 3t + 9)$ **f.** $f(x) = e^{\text{tg}\ x}$

g. $f(x) = \cos(x^2 - 3)$ **h.** $f(x) = (2x - \pi^2)^{2012}$ **i.** $y = x\, e^{-x^2}$

j. $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ **k.** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **l.** $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

m. $y = x^e - e^x + \pi^e$ **n.** $f(y) = \sec(\sqrt{y^2 + 1})$ **o.** $f(x) = x\,\text{sen}(x^2 - \sqrt{x})$

4. Determine a função derivada das funções dos exercícios I.1.a. até I.1.d. dessa lista.

5. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\ \text{sen}(\sqrt[3]{x})$. Determine a função $f\,'$, onde existir. (Cuidado com a verificação de derivabilidade em $x = 0$ e em $x = 1$.)

6. Calcule a derivada de 2a. ordem das funções do exercício II.1. que estão nos ítens de a. até o l , exceto o j.

7. Seja $y = e^x \cos x$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

III. Sobre reta tangente

1. Seja a curva $y = x^3 + 2x + 1$.
a. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função dada no ponto $(2, f(2))$.
b. Determine o(s) ponto(s) sobre o gráfico da função dada em que a reta tangente é paralela a reta $y - 5x + 3 = 0$. Qual é (são) a(s) equação(ões) dessa(s) reta(s)?

2. Determine a equação da reta que é tangente à curva $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ e que passa pela origem.

3. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ que passam pelo ponto $(0, 0)$

4. Determine a reta r que é perpendicular à reta $3x + y = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$.

5. Determine todos os pontos (a, b) sobre a curva $y = x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (a, b) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

6. Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, qual é a única que passa pelo ponto $(1, 0)$?

7. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo que f seja derivável, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

8. Seja $f : I \to I\!R$ uma função derivável, onde I é um intervalo aberto contendo o ponto -1. Suponha que seja válida a seguinte equação: $f^3(x) - f^2(x) + x\,f(x) = 2$, para todo $x \in I$. Encontre o valor de $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

IV. Derivada das inversas

1. Derive as funções:

a. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ **b.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$ **c.** $f(x) = \cos(\operatorname{arctg} x)$

d. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$ **e.** $y = \sqrt{1 - x^2}\, \operatorname{arcsen} x$