RESUMO SOBRE LIMITES

I. Limites finitos no ponto

1.0 "Noção intuitiva": Sejam f uma função e $x_o \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$.

Dizemos que f tem limite (finito) ℓ no ponto x_o (em símbolo: $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$), se

$$\bullet \text{ quando } \begin{array}{c} x \overset{conven}{\approx} x_o \\ \text{com } x \neq x_o \end{array}, \text{ valer que } f(x) \overset{arbitr}{\approx} \ell.$$

1.1 Definição:

$\lim_{x \to x_o} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um conveniente $\delta > 0$, tal que:

para todo $x \in \mathcal{D}(f)$, com $0 < |x - x_o| < \delta$, vale que $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

"Reinterpretando"

• Para valores de $x \in \mathcal{D}(f)$, $x \neq x_o$, a uma distância convenientemente próxima de x_o, os valores de $y = f(x)$ estão a uma distância arbitrariamente pequena de ℓ (isto é, $f(x)$ e ℓ sempre estão tão próximos quanto quisermos um do outro.)

2. Continuidade

2.1. Definição- Sejam f uma função e $x_o \in Dom\, f$.

a. Dizemos que f é contínua em x_o se e somente se $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

b. Dizemos que f é contínua, se ela é contínua em cada ponto x_o do seu domínio.

2.2. Proposição 1. - Propriedades Algébricas dos Limites

Sejam f e g definidas em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\exists \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1$ e $\exists \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_2$. Então:

i. $\exists \lim\limits_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) + \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_1 + \ell_2$.

ii. $\exists \lim\limits_{x \to x_o} (\alpha f(x)) = \alpha \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \alpha \ell_1$.

iii. $\exists \lim\limits_{x \to x_o} (f(x)\, g(x)) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_1 \ell_2$.

iv. $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, desde que $\ell_2 \neq 0$.

2.3. Observações 1:

- **Obs.a. Cuidado** com a distribuição do símbolo de $\lim\limits_{x \to x_o}$ na soma, produto e quociente, sem antes testar se existem os limites de cada função envolvida!!!!

- **Obs b.** $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to x_o} (f(x) - \ell) = 0$.

2.4. bf Proposição 1* - Propriedades algébricas das funções contínuas: Sejam f e g funções contínuas em x_o e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

i. As funções $f + g$, αf e fg são contínuas em x_o.
ii. A função $\dfrac{f}{g}$ é contínua em x_o, desde que $g(x_o) \neq 0$.

2.5. Proposição 2. Sejam f e g funcões e $x_o \in \mathcal{D}(g)$. Supondo que

(i.) $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}(g)$, exceto em $x = x_o$ e
(ii.) g é contínua em x_o.

Então existe $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = g(x_o)$

3. Limites Laterais

3.1 • Definição: O $\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ (limite lateral à direita de f em x_o) se:

• Dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe um conveniente $\delta > 0$, tal que:

$\forall x \in \mathcal{D}(f)$, com $x_o < x < x_o + \delta$, vale que $|f(x) - \ell_1| < \epsilon$.

• **3.2. Definição** O $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ (limite lateral à esquerda de f em x_o) se:

• Dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$\forall x \in \mathcal{D}(f)$, com $x_o - \delta < x < x_o$, então vale que $|f(x) - \ell_2| < \epsilon$.

3.3. Proposição 3.

$$\text{Existe } \lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

4. Continuidade x Limites em composta de funções

4.1. Proposição 4. Seja $f : A \to B$ uma função contínua em $x_o \in A$ e suponhamos que exista a inversa $g : B \to A$. Então g é contínua em $f(x_o)$.

4.2 Proposição 5. Sejam f e g funções tais $\mathrm{Im}\, f \subset \mathcal{D}(g)$ e $x_o \in \mathbb{R}$. Consideremos a função composta $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

a. Se existir $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$ e g for contínua em ℓ, então existe

$$\lim_{x \to x_o} (g(f(x)) = g(\ell) = g(\lim_{x \to x_o} f(x)).$$

b. Se f for contínua em $x_o \in \mathcal{D}(f)$ e g for contínua em $f(x_o)$, então $g \circ f$ é contínua em x_o.

5. Mais Propriedades dos Limites

5.1. Teorema 6. (Teorema do Confronto)

Sejam f, g e h funções e $x_o \in \mathbb{R}$. Suponhamos que estejam satisfeitas as condições:

a. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in]\, x_o - r,\ x_o + r\, [$, com $x \neq x_o$ $(r > 0)$ e

b. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to x_o} h(x)$.

Então o $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell$.

5.2. Corolário 7. (Super IMPORTANTE) Sejam F e G funções tais que:

a. $\lim\limits_{x \to x_o} F(x) = 0$ e

b. $|\,G(x)\,| \leq M$, para algum $M > 0$, para todo $0 < |x - x_o| < r$ $(r > 0)$, (i.é, G é limitada numa vizinhança de x_o)

$$\text{Então, } \lim_{x \to x_o} \left(F(x)\, G(x)\right) = 0.$$

5.3. Proposição 8. (1^o Limite Fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

II. Limite Finito no Infinito

• **6. Definições:**

Sejam $\ell \in \mathbb{R}$ e uma função f cujo domínio contém um intervalo $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$

• **6.1** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff$ Dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que:

$$\forall x > \delta > a \quad \text{vale que} \quad |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

• **6.2** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff$ Dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que :

$$\forall\, x < -\delta < b \quad \text{vale que} \quad |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Observação 2. Valem as propriedades algébricas dos limites (finitos) da Proposição 1 se o símbolo $\lim\limits_{x \to x_o}$ for substituído por $\lim\limits_{x \to +\infty}$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

III. Limite Infinito no ponto

• **7. Definições:** Sejam f uma função e $x_o \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \iff$ Dado um $K > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$ (conveniente) tal que : $\forall x$, com $0 < |x - x_o| < \delta$, implica que $f(x) > K$.

   "Interpretando": $f(x)$ "aumenta positiva e ilimitadamente", quando x se aproximar convenientemente de x_o, para $x \neq x_o$.

2. $\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty \iff$ Dado um $N > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$ tal que : $\forall x$, com $0 < |x - x_o| < \delta$, é válido que $f(x) < -N$.

   "Interpretando": $f(x)$ "diminui negativa e ilimitadamente", quando x se aproximar convenientemente de x_o, com $x \neq x_o$.

• **Observação 3:** De forma análoga define-se os símbolos: (TENTE ESCREVER tais definições.)

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_o^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_o^-} f(x) = -\infty.$$

IV. Limite Infinito <u>no</u> Infinito

8. Definição: Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo $[a, +\infty[$ (ou $]-\infty, b]$).

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty :\iff$ Dado um $K > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que: Para todo $x > \delta > a$, está satisfeita a desigualdade $f(x) > K$.

2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff$ Dado um $N > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:

   para todo $x > \delta > a$ implica que $f(x) < -N$.

• **Observação 4:** Analogamente, define-se os limites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

9. Limites Infinito - Propriedades

9.1. Proposição 9. (Limite zero SOMENTE no denominador! (TIPO $"\frac{1}{0}"$)

Sejam $x_o \in \mathbb{R}$ e g uma função tal que $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$.

i. Se $g(x) > 0$, numa vizinhança de x_o $(x \neq x_o)$, então $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$.

ou

ii. Se $g(x) < 0$, numa vizinhança de x_o, $x \neq x_o$, então $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{g(x)} = -\infty$.

9.2. Observação 5: A Proposição 9 é valida para limites laterais à direita ou à esquerda de x_o, bem como para limites no infinito, com as devidas adaptações dos sinais da função $g(x)$ nos intervalos envolvidos.

10. Limites Infinitos X Limites Finitos- Propriedades

10.1. Proposição 10. Sejam f uma função e $x_o \notin \mathcal{D}(f)$.

$$\text{Se } \lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty), \quad \text{então } \lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

• **OBSERVAÇÃO 6**: A Proposição 5 (sobre compostas), o Teorema 6 (Teor. do Confronto), o seu Corolário 7, a Proposição 9 e o Teorema 10 seguem válidos se o símbolo "$x \to x_o$" for substituído por um dos símbolos:

$$"x \to x_o^{+}", \qquad "x \to x_o^{-}", \qquad "x \to +\infty" \qquad \text{ou} \qquad "x \to -\infty".$$

11. Limites Infinitos x Finitos - Propriedades

11.1. Proposição 11. (Operando com limites infinitos)

Sejam f e g funções e $x_o \in \mathbb{R}$. São válidas as propriedades:

a. Se $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \\ e \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} \textbf{i. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = +\infty \\ e \\ \textbf{ii. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty \end{cases}$

b. Se $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} \textbf{i. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = -\infty \\ e \\ \textbf{ii. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty \end{cases}$

c. Se $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} \textbf{i. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)-g(x)) = +\infty \\ e \\ \textbf{ii. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = -\infty \end{cases}$

d. Se $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} \textbf{i. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = +\infty \\ \\ \textbf{ii. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \end{cases}$

e. Se $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty \end{cases}$ então $\begin{cases} \textbf{i. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = -\infty \\ \textbf{ii. } \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell > 0 \\ +\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \end{cases}$

• 11.2. Observações 7:

7.a As afirmações da Proposição 11 continuam válidas se o símbolo "$x \to x_o$" por substituído por um dos símbolos:

"$x \to x_o^-$" , "$x \to x_o^+$", "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$" .

7.b. As Proposições 1 (para limites finitos) e 11 (para limites infinitos) mostram que os seguintes "símbolos" são indeterminações:

"$\dfrac{0}{0}$" , "$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$", "$0\cdot(\pm\infty)$", "$+\infty+(-\infty)$" e "$-\infty+(+\infty)$".

7.c. Mais tarde, veremos que, nos limites , também são indeterminações os símbolos:

"0^0", "∞^0", "1^∞".