APLICAÇÕES DE CONTINUIDADE e DERIVABILIDADE EM INTERVALOS

I. CONTINUIDADE EM INTERVALOS

1. TEOREMA DO ANULAMENTO: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que $\boldsymbol{f(a) \cdot f(b) < 0}$ (isto é, $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários).

Então existe **pelo menos** um $\boldsymbol{\alpha} \in]\boldsymbol{a, b}[$ tal que que $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$.

2. Observações: **a.** Observar que a hipótese de continuidade no teorema é essencial. Pensar em um contra-exemplo.

b. O Teorema do Anulamento é muito útil para a localização de raízes de equações/funcões em geral, e em particular dos polinômios. Além disso, ele é essencial para a demonstração de que todo polinômio, com coeficientes reais, de grau **ímpar** admite pelo menos uma raiz real.

3. TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO: Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\boldsymbol{\beta}$ um número real qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$.

Então existe **pelo menos** um número $\boldsymbol{\alpha} \in]\boldsymbol{a, b}[$ tal que $\boldsymbol{f(\alpha) = \beta}$.

4. Oservações: **a.** Observar que a hipótese de continuidade no teorema é essencial. Pensar em um contra-exemplo.

b. O Teorema do valor intermediário permite provar que: Seja f uma função contínua em um intervalo I e injetora. Então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente. (As hipóteses de **continuidade em um intervalo** são essenciais para validade de tal resultado).

5. TEOREMA DE WEIERSTRASS: Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$.

Então existem x_1 e x_2 no intervalo $[a, b]$ tais que $\boldsymbol{f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)}$, para todo $x \in [a, b]$.

O Teorema de Weierstrass, em resumo, afirma que toda função contínua em um intervalo limitado e fechado assume seu valor máximo e o mínimo nesse intervalo. E isso motiva as definições que seguem.

• **6.1. Definição - Máximo:** O valor $\boldsymbol{f(x_2)}$ por cumprir $\boldsymbol{f(x) \leq f(x_2)}$, **para todo** $\boldsymbol{x \in [a, b]}$, é dito **o valor máximo de** f em $[a, b]$.

• **6.2. Definição - Mínimo:** O valor $f(x_1)$ por satisfazer $f(x_1) \leq f(x)$, **para todo** $x \in [a, b]$, é dito **o valor mínimo de** f em $[a, b]$.

• O número real $x_2 \in [a, b]$ é dito **um ponto de máximo** (global ou absoluto) de f em $[a, b]$ e o número real $x_1 \in [a, b]$ é dito **um ponto de mínimo** (global ou absoluto) de f em $[a, b]$.

7. Observações: Notar que as hipóteses de continuidade e de intervalo fechado e limitado no Teorema de Weierstrass são essencias. Pensar em um contra-exemplo de forma que a função seja contínua, mas o intervalo não é fechado ou não limitado; um outro contra-exemplo em que o intervalo é limitado e fechado, mas a continuidade é retirada.

II. DERIVABILIDADE EM INTERVALOS

8. TEOREMA DO VALOR MÉDIO (TVM): Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existirá **pelo menos um** $\boldsymbol{c \in]a,b[}$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \text{ou} \qquad f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a).$$

9. Observações: a. As hipóteses de continuidade em $[a,b]$ e derivabilidade em $]a,b[$ são essenciais.

b. O TVM tem uma interpretação geométrica muito interessante que é a seguinte: A afirmação do teorema de que existe pelo um $c \in]a,b[$ de forma que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ garante que existe pelo menos um ponto $P=(c,f(c))$, sobre o gráfico de f, em que a reta tangente T em P é paralela à reta S que liga os pontos $P_1=(a,f(a)$ e $P_2=(b,f(b))$ (pois, o coeficiente angular de S é $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e o da reta T é $f'(c)$). (ver Figuras A e B abaixo.)

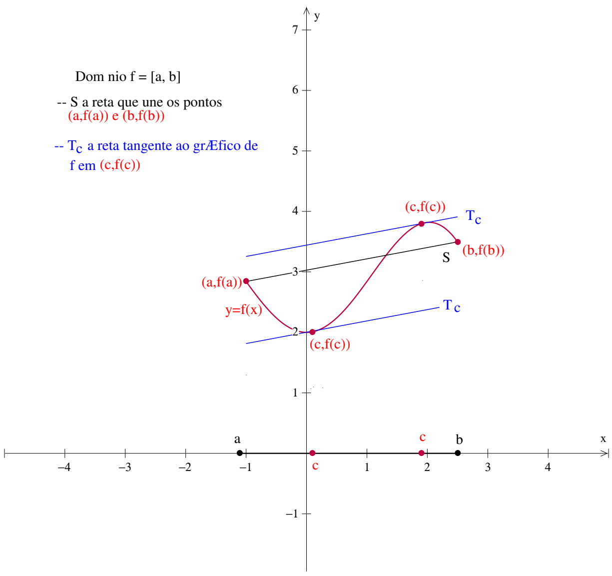


Figura A

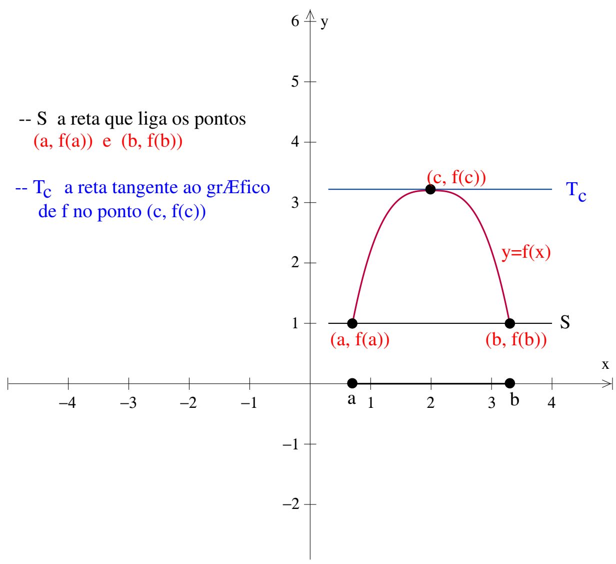


Figura B

10. FATO: Vamos chamar a atenção para o seguinte fato: Seja f uma função derivável em um intervalo I. Se f for estritamente crescente em I, então $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in I$; se f for estritamente decrescente em I, então $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in I$.

Surge então a pergunta natural: o sinal da derivada de uma função em um intervalo pode contar sobre o o crescimento/decrescimento estrito dela?

O TVM é a ferramenta útil para obter uma resposta positiva a tal pergunta, através da Proposição que segue.

11. Proposição 1: Sobre Crescimento e Decrescimento estritos: Seja f contínua em um intervalo I qualquer e derivável nos pontos interiores de I.

a. Se $f'(x) > 0$, para todo x no **interior** de I, então f é estritamente crescente (**EC**) em I.

a*. Se $f'(x) < 0$, para todo x no **interior** de I, então f é estritamente decrescente (**ED**) em I.

• **Observação:** Para esboçar gráfico de funções $y = f(x)$, além de saber de antemão o comportamento da função com relação ao crescimento e/ou decrescimento, é bastante importante também conhecer os intervados em que a curva que a representa tem concavidade para baixo ou para cima. Para tanto vejamos, as definições dessas concavidades.

12. Definição de Concavidades:

Seja f um função derivável no **intervalo aberto** I e $p \in I$. Seja a funçao $T_p(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$, $x \in I$, cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

• **Definição 12.1:** Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para cima (CVC)** no intervalo I, se, para cada p fixado, estiver satisfeita a desigualdade $\boldsymbol{f(x) > T_p(x)}$, $\forall \boldsymbol{x \neq p}$, com $x \in I$.

Ou seja, para cada p, os pontos $(x, f(x))$ do gráfico de f estão mais alto que os pontos $(x, T_p(x))$ do gráfico da reta tangente, para todo $x \neq p$ (**Ver Figura 1**).

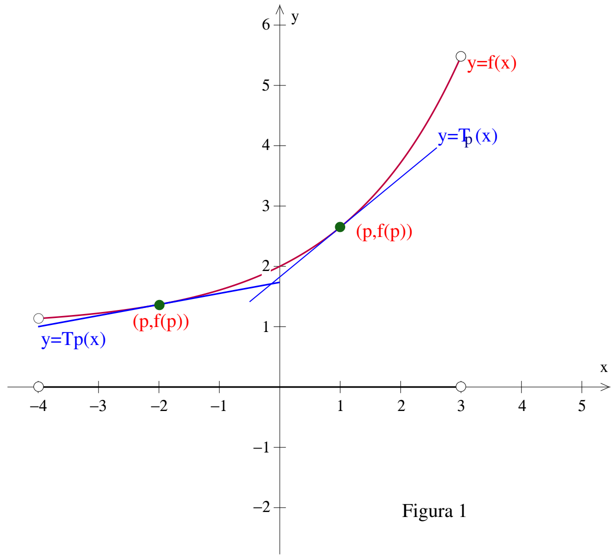


Figura 1

• **Definição 12.2:** Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para baixo (CVB)** no intervalo I, se, para cada p fixado estiver satisfeita a desigualdade $\boldsymbol{f(x) < T_p(x)}$, $\boldsymbol{\forall x \neq p}$, com $x \in I$ (**Ver Figura 2**).

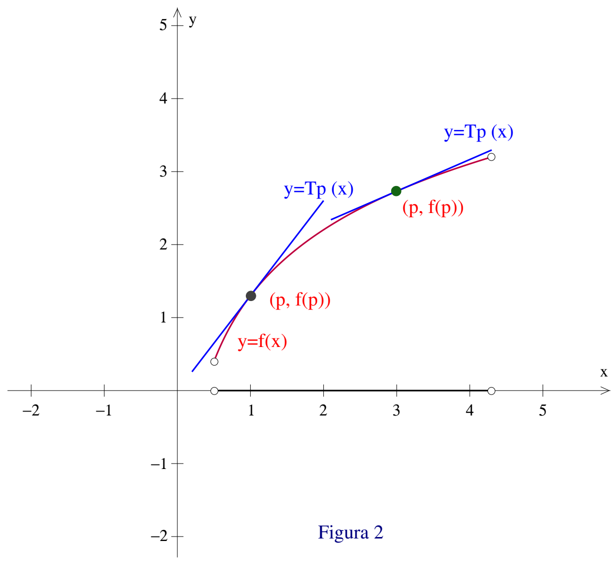


Figura 2

• **Definição 12.3:** Sejam f uma função e $p \in \mathcal{D}(f)$ com f contínua em p. Dizemos que $(p, f(p))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se existirem números reais a e b, com $p \in]a, b[$, de forma que as concavidades em $]a, p[$ e em $]p, b[$ sejam de nomes contrários (**Ver Figuras 3 e 4**).

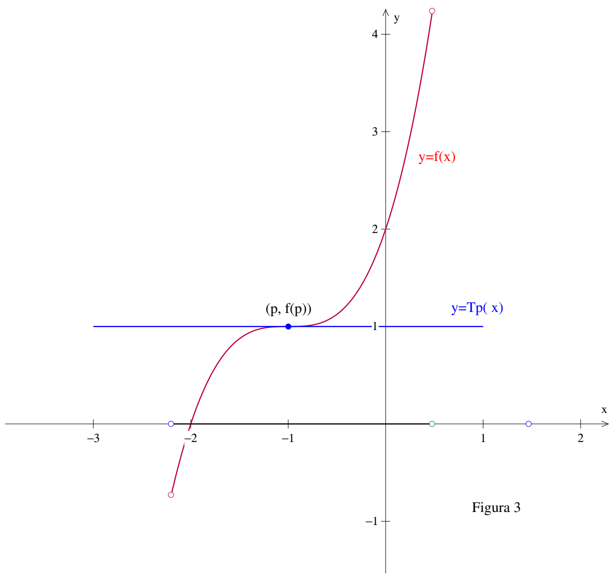


Figura 3

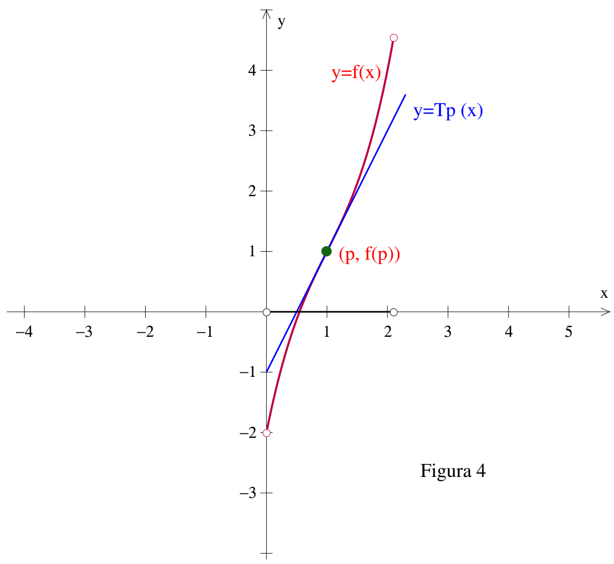


Figura 4

• Qual a relação entre as concavidade do gráfico de uma função e suas derivadas?

Usando as definições 12.1 e 12.2 acima e supondo que a função f admite derivada de 2a. ordem no intervalo aberto I, pode-se provar que: se o gráfico de f tem CVC (respectivamente CVB) em I, então a função f' é estritamente crescente (respectivamente, estritamente decrescente) em I. Portanto, resulta daí que a função $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$ (respectivamente, $\boldsymbol{f''(x) \leq 0}$), para todo $x \in I$.

Surge naturalmente mais uma pergunta , que é a recíproca: os sinais da 2a. derivada da função determinam a natureza da concavidade de seu gráfico? . A resposta é a seguinte proposição.

13. Proposição 2: Seja f uma função que admite derivada de 2a. ordem num intervalo aberto I.

a. Se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade para cima (CVC) em I.

a*. Se $f''(x) < 0, \ \forall x \in I$, então o gráficode f tem concavidade para baixo (CVB) em I.

III. GRÁFICOS X RETAS ASSÍNTOTAS

Um outro instrumento importante para que o esboço do gráfico de função de variável real seja bastante acurado, são as retas assíntotas, cujos conceitos estão estreitamente ligados aos limites no infinito e aos limites infinitos. Vejamos

14. Definição: Reta Assíntota Horizontal

Seja f uma função tal que seu domínio contém um dos (ou ambos) intervalos $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

A reta $y = \ell$ é **uma assíntota horizontal ao gráfico de** f se, ao menos, um dos limites abaixo estiver verificado:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Observe as Figuras 5 e 6:

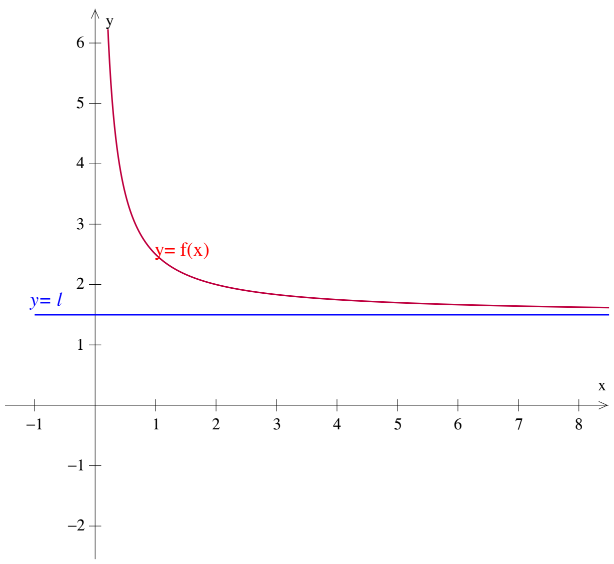


Figura 5

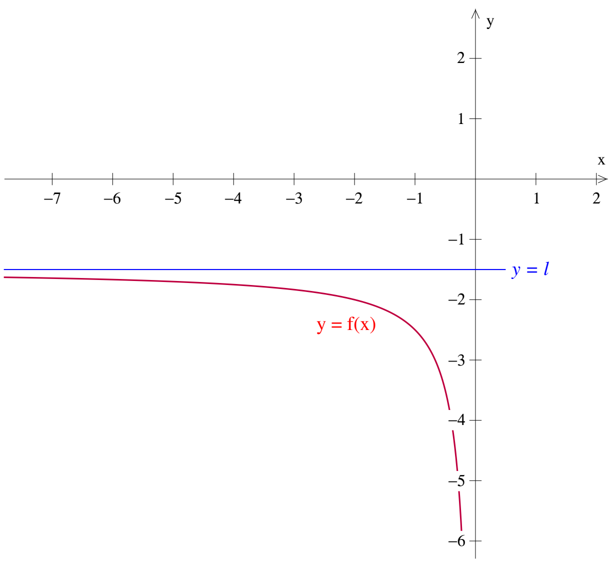


Figura 6

15. Definição: Reta Assíntota Vertical

Sejam f uma função e $x_o \in \mathbb{R}$.

A reta $x = x_o$ é **uma assíntota vertical ao gráfico de f** se ao menos um dos limites abaixo estiver verificado:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_o^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{ou } \lim_{x \to x_o^+} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_o^-} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_o^-} f(x) = -\infty.$$

Observe as fuguras abaixo que ilustram alguns casos da definição acima.

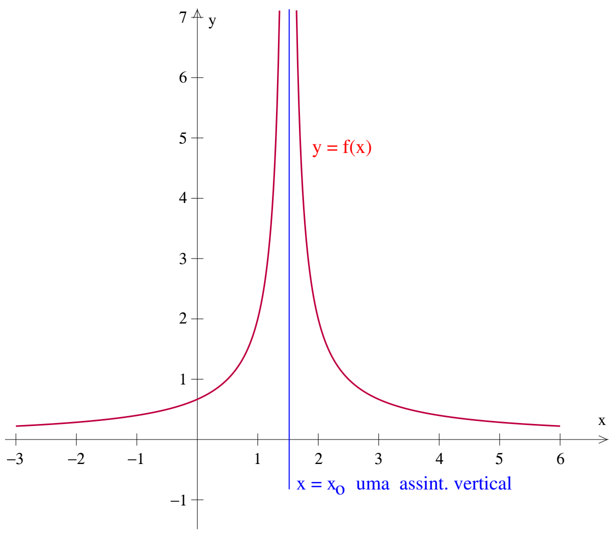
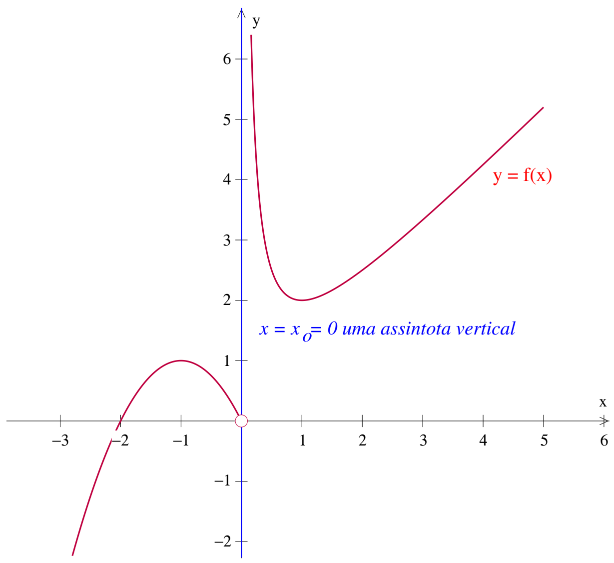


Figura 7



Ficura 8

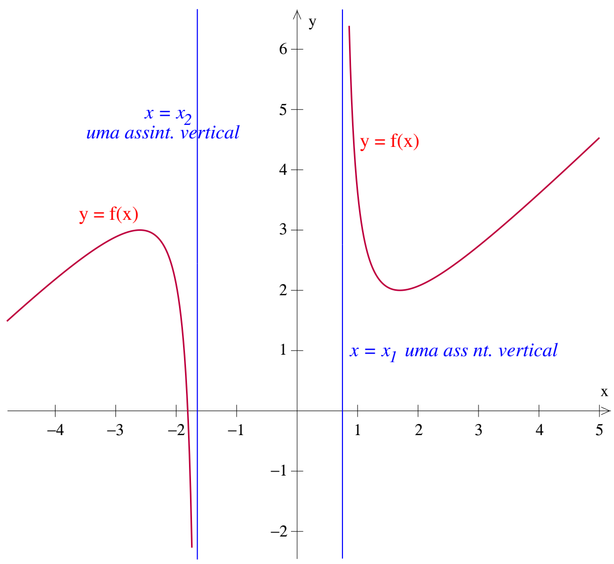


Figura 9