Cópias de $c_0(\Gamma)$ em espaços $C(K, X)$

Vinícius Morelli Côrtes

Este trabalho é baseado no artigo *Copies of $c_0(\Gamma)$ in $C(K, X)$ spaces*, de Elói M. Galego e James N. Hagler, publicado em 2012.

I - Definições e resultados preliminares

I - Definições e resultados preliminares

Todos os espaços vetoriais considerados são reais.

I - Definições e resultados preliminares

Todos os espaços vetoriais considerados são reais.

Dados K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach, denotamos por $C(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas $f : K \to X$, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{k \in K} \|f(k)\|, \forall f \in C(K, X).$$

Quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $C(K)$.

I - Definições e resultados preliminares

Todos os espaços vetoriais considerados são reais.

Dados K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach, denotamos por $C(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas $f\colon K \to X$, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{k \in K} \|f(k)\|, \forall f \in C(K, X).$$

Quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $C(K)$.

Dado Γ um conjunto não-vazio, denotamos por $c_0(\Gamma)$ o espaço de Banach de todas as funções $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |g(\gamma)| \geq \varepsilon\}$ é finito, munido da norma

$$\|g\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |g(\gamma)|, \forall g \in c_0(\Gamma).$$

I - Definições e resultados preliminares

Todos os espaços vetoriais considerados são reais.

Dados K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach, denotamos por $C(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas $f\colon K \to X$, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{k \in K} \|f(k)\|, \forall f \in C(K, X).$$

Quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $C(K)$.

Dado Γ um conjunto não-vazio, denotamos por $c_0(\Gamma)$ o espaço de Banach de todas as funções $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |g(\gamma)| \geq \varepsilon\}$ é finito, munido da norma

$$\|g\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |g(\gamma)|, \forall g \in c_0(\Gamma).$$

Proposição I.1: Se Γ é um conjunto finito, não-vazio, de cardinalidade n, então

$$c_0(\Gamma) \sim \mathbb{R}^n.$$

I - Definições e resultados preliminares

I - Definições e resultados preliminares

Proposição I.2: Sejam Γ_1 e Γ_2 dois conjuntos não-vazios. Então $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ são linearmente isométricos se, e somente se, Γ_1 e Γ_2 têm a mesma cardinalidade.

I - Definições e resultados preliminares

Proposição I.2: Sejam Γ_1 e Γ_2 dois conjuntos não-vazios. Então $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ são linearmente isométricos se, e somente se, Γ_1 e Γ_2 têm a mesma cardinalidade.

Vamos considerar os espaços $c_0(\tau)$, onde τ é um cardinal infinito. Denotamos

$$c_0 = c_0(\aleph_0).$$

I - Definições e resultados preliminares

Proposição I.2: Sejam Γ_1 e Γ_2 dois conjuntos não-vazios. Então $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ são linearmente isométricos se, e somente se, Γ_1 e Γ_2 têm a mesma cardinalidade.

Vamos considerar os espaços $c_0(\tau)$, onde τ é um cardinal infinito. Denotamos

$$c_0 = c_0(\aleph_0).$$

Definição I.3: Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia de* Y, e denotamos $Y \hookrightarrow X$, se Y é isomorfo a algum subespaço de X.

I - Definições e resultados preliminares

Proposição I.2: Sejam Γ_1 e Γ_2 dois conjuntos não-vazios. Então $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ são linearmente isométricos se, e somente se, Γ_1 e Γ_2 têm a mesma cardinalidade.

Vamos considerar os espaços $c_0(\tau)$, onde τ é um cardinal infinito. Denotamos

$$c_0 = c_0(\aleph_0).$$

Definição I.3: Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia de* Y, e denotamos $Y \hookrightarrow X$, se Y é isomorfo a algum subespaço de X.

Definição I.4: Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Dizemos que Y é *complementado* em X se Y é fechado e existe W subespaço fechado de X tal que $X = Y \oplus W$. Equivalentemente, Y é complementado em X se existe um operador linear contínuo $P\colon X \to Y$, sobrejetor, tal que $P \circ P = P$.

I - Definições e resultados preliminares

Definição I.5: Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia complementada de* Y, e denotamos $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$, se Y é isomorfo a algum subespaço complementado de X.

Definição I.5: Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia complementada de* Y, e denotamos $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$, se Y é isomorfo a algum subespaço complementado de X.

Proposição I.6: Dados X, Y, Z, W espaços de Banach, temos:

(i) Se $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow Z$, então $X \hookrightarrow Z$;

(ii) Se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ e $Y \overset{c}{\hookrightarrow} Z$, então $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$;

(iii) Se $X \sim Y$, $Z \sim W$ e $X \hookrightarrow Z$, então $Y \hookrightarrow W$;

(iv) Se $X \sim Y$, $Z \sim W$ e $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$, então $Y \overset{c}{\hookrightarrow} W$.

II - Problemas estudados

II - Problemas estudados

Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito.

II - Problemas estudados

Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito.

Problema II.1: $c_0(\tau) \hookrightarrow X$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X)$?

II - Problemas estudados

Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito.

Problema II.1: $c_0(\tau) \hookrightarrow X$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X)$?

Problema II.2: $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K)$?

II - Problemas estudados

Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito.

Problema II.1: $c_0(\tau) \hookrightarrow X$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X)$?

Problema II.2: $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K)$?

Problema II.3: Que hipóteses sobre K e sobre X fornecem uma cópia complementada de $c_0(\tau)$ em $C(K, X)$?

III - O Problema II.1

III - O Problema II.1

Lema III.1: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então temos que

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X) \text{ e } C(K) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X).$$

III - O Problema II.1

Lema III.1: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então temos que

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X) \text{ e } C(K) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Teorema III.2: Dados K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito, temos:

(i) $c_0(\tau) \hookrightarrow X$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X)$;

(ii) $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$ ou $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K) \implies c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$.

IV - O Problema II.2

IV - O Problema II.2

Lema IV.1 (Ding, 2005): Dado K um espaço de Hausdorff compacto, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) K é infinito;

(ii) $C(K)$ tem dimensão infinita;

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$.

IV - O Problema II.2

Lema IV.1 (Ding, 2005): Dado K um espaço de Hausdorff compacto, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) K é infinito;

(ii) $C(K)$ tem dimensão infinita;

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$.

Lema IV.2: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, finito, e X um espaço de Banach. Se $|K| = n$, então $C(K, X) \sim X^n$.

IV - O Problema II.2

Lema IV.1 (Ding, 2005): Dado K um espaço de Hausdorff compacto, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) K é infinito;

(ii) $C(K)$ tem dimensão infinita;

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$.

Lema IV.2: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, finito, e X um espaço de Banach. Se $|K| = n$, então $C(K, X) \sim X^n$.

Lema IV.3 (Samuel, 1979): Dado X um espaço de Banach, temos que

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \hookrightarrow X^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

IV - O Problema II.2

Lema IV.1 (Ding, 2005): Dado K um espaço de Hausdorff compacto, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) K é infinito;

(ii) $C(K)$ tem dimensão infinita;

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$.

Lema IV.2: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, finito, e X um espaço de Banach. Se $|K| = n$, então $C(K, X) \sim X^n$.

Lema IV.3 (Samuel, 1979): Dado X um espaço de Banach, temos que

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \hookrightarrow X^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema IV.4: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então temos que

$$c_0 \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0 \hookrightarrow X \text{ ou } c_0 \hookrightarrow C(K).$$

IV - O Problema II.2

IV - O Problema II.2

Definição IV.5: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia-τ* se toda família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos de K tem cardinalidade menor do que τ. Quando $\tau = \aleph_1$, dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia enumerável*, ou que K tem a cce.

IV - O Problema II.2

Definição IV.5: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia-τ* se toda família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos de K tem cardinalidade menor do que τ. Quando $\tau = \aleph_1$, dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia enumerável*, ou que K tem a cce.

Teorema IV.6 (Rosenthal, 1970): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Então $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$ se, e somente se, K não satisfaz a condição da cadeia-τ.

IV - O Problema II.2

Definição IV.5: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia-τ* se toda família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos de K tem cardinalidade menor do que τ. Quando $\tau = \aleph_1$, dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia enumerável*, ou que K tem a cce.

Teorema IV.6 (Rosenthal, 1970): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Então $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$ se, e somente se, K não satisfaz a condição da cadeia-τ.

Teorema IV.7 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal não-enumerável. Então temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0 \hookrightarrow X.$$

IV - O Problema II.2

Definição IV.5: Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia-τ* se toda família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos de K tem cardinalidade menor do que τ. Quando $\tau = \aleph_1$, dizemos que K satisfaz a *condição da cadeia enumerável*, ou que K tem a cce.

Teorema IV.6 (Rosenthal, 1970): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e τ um cardinal não-enumerável. Então $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$ se, e somente se, K não satisfaz a condição da cadeia-τ.

Teorema IV.7 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal não-enumerável. Então temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0 \hookrightarrow X.$$

Apenas sob estas hipóteses, nada mais podemos afirmar. Não podemos trocar c_0 por $c_0(\tau)$ no enunciado do Teorema IV.7.

IV - O Problema II.2

IV - O Problema II.2

Proposição IV.8 (Laver-Galvin, 1980): Assumindo a Hipótese do Contínuo, existe um espaço de Hausdorff compacto K_1 tal que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_1, C(K_1)) \text{ mas } c_0(\aleph_1) \not\hookrightarrow C(K_1).$$

IV - O Problema II.2

Proposição IV.8 (Laver-Galvin, 1980): Assumindo a Hipótese do Contínuo, existe um espaço de Hausdorff compacto K_1 tal que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_1, C(K_1)) \text{ mas } c_0(\aleph_1) \not\hookrightarrow C(K_1).$$

Este resultado sugere que precisamos de mais hipóteses sobre K ou sobre X, ou de um outro modelo de teoria dos conjuntos, para fortalecer o Teorema IV.7.

Proposição IV.8 (Laver-Galvin, 1980): Assumindo a Hipótese do Contínuo, existe um espaço de Hausdorff compacto K_1 tal que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_1, C(K_1)) \text{ mas } c_0(\aleph_1) \not\hookrightarrow C(K_1).$$

Este resultado sugere que precisamos de mais hipóteses sobre K ou sobre X, ou de um outro modelo de teoria dos conjuntos, para fortalecer o Teorema IV.7.

Definição IV.9: Sejam S um espaço topológico e τ um cardinal não-enumerável. Dizemos que τ é um *calibre* de S se dada qualquer família $\{U_i : i \in \tau\}$ de subconjuntos abertos e não-vazios de S, existe um subconjunto Γ de τ tal que $|\Gamma| = \tau$ e

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \neq \varnothing.$$

IV - O Problema II.2

IV - O Problema II.2

Teorema IV.10 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal não-enumerável. Se τ é um calibre de K, então temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

IV - O Problema II.2

Teorema IV.10 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal não-enumerável. Se τ é um calibre de K, então temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

Axioma de Martin (M. E. Rudin, Lectures on set-teoretic topology, American Mathematical Society, pg. 15): Seja K um espaço de Hausdorff compacto que tem a cce. Então K *não* pode ser escrito da forma

$$K = \bigcup_{i \leq \lambda} F_i,$$

onde $\lambda < 2^{\aleph_0}$ é um cardinal e cada F_i é raro (isto é, $\overline{F_i}$ tem interior vazio).

IV - O Problema II.2

Teorema IV.10 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal não-enumerável. Se τ é um calibre de K, então temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

Axioma de Martin (M. E. Rudin, Lectures on set-teoretic topology, American Mathematical Society, pg. 15): Seja K um espaço de Hausdorff compacto que tem a cce. Então K *não* pode ser escrito da forma

$$K = \bigcup_{i \leq \lambda} F_i,$$

onde $\lambda < 2^{\aleph_0}$ é um cardinal e cada F_i é raro (isto é, $\overline{F_i}$ tem interior vazio).

Definição IV.11: Seja τ um cardinal. A *cofinalidade* de τ é o menor cardinal λ tal que existe uma família de ordinais $\{\alpha_i : i < \lambda\}$ com $\alpha_i < \tau$, para todo $i < \lambda$, e $\sup\{\alpha_i : i < \lambda\} = \tau$, e é denotada por $\mathrm{cf}(\tau)$.
Se $\mathrm{cf}(\tau) = \tau$, dizemos que τ é *regular*. Caso contrário, dizemos que τ é *singular*.

IV - O Problema II.2

IV - O Problema II.2

Lema IV.12 (M. E. Rudin, Lectures on set-teoretic topology, American Mathematical Society, pg. 16): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto que tem a cce e λ um cardinal regular, com $\aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}$. Assumindo o Axioma de Martin, temos que λ é um calibre de K.

IV - O Problema II.2

Lema IV.12 (M. E. Rudin, Lectures on set-teoretic topology, American Mathematical Society, pg. 16): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto que tem a cce e λ um cardinal regular, com $\aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}$. Assumindo o Axioma de Martin, temos que λ é um calibre de K.

Teorema IV.13 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Assumindo o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do Contínuo, temos que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

IV - O Problema II.2

Lema IV.12 (M. E. Rudin, Lectures on set-teoretic topology, American Mathematical Society, pg. 16): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto que tem a cce e λ um cardinal regular, com $\aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}$. Assumindo o Axioma de Martin, temos que λ é um calibre de K.

Teorema IV.13 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Assumindo o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do Contínuo, temos que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

Definição IV.14: Seja S um espaço topológico. Definimos a *densidade* de S como sendo a menor cardinalidade de um subconjunto denso de S, e denotamos $\mathrm{dens}(S)$. Se $\mathrm{dens}(S) \leq \aleph_0$, dizemos que S é *separável*.

IV - O Problema II.2

IV - O Problema II.2

Teorema IV.15 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal não-enumerável. Se $\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{dens}(K)$, então temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

V - O Problema II.3

V - O Problema II.3

Lema V.1 (Sobczyk, 1941): Seja X um espaço de Banach separável. Então

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

V - O Problema II.3

Lema V.1 (Sobczyk, 1941): Seja X um espaço de Banach separável. Então

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Lema V.2: Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Então $C(K)$ é separável se, e somente se, K é metrizável.

V - O Problema II.3

Lema V.1 (Sobczyk, 1941): Seja X um espaço de Banach separável. Então

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Lema V.2: Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Então $C(K)$ é separável se, e somente se, K é metrizável.

Teorema V.3: Seja K um espaço compacto metrizável. São equivalentes:

(i) K é infinito;

(ii) $C(K)$ tem dimensão infinita;

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$;

(iv) $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K)$.

V - O Problema II.3

Teorema V.4 (Cembranos-Freniche, 1984): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então

$$c_0 \hookrightarrow C(K) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Equivalentemente, dados K um espaço de Hausdorff compacto infinito e X um espaço de Banach de dimensão infinita, temos $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$.

V - O Problema II.3

Teorema V.4 (Cembranos-Freniche, 1984): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então

$$c_0 \hookrightarrow C(K) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Equivalentemente, dados K um espaço de Hausdorff compacto infinito e X um espaço de Banach de dimensão infinita, temos $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$.

Este resultado também não pode ser estendido de forma natural ao caso não-enumerável.

V - O Problema II.3

Teorema V.4 (Cembranos-Freniche, 1984): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então

$$c_0 \hookrightarrow C(K) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Equivalentemente, dados K um espaço de Hausdorff compacto infinito e X um espaço de Banach de dimensão infinita, temos $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$.

Este resultado também não pode ser estendido de forma natural ao caso não-enumerável.

Proposição V.5: (Dow-Junnila-Pelant, 2009) Existe um espaço de Hausdorff compacto K_2 tal que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_2) \text{ mas } c_0(\aleph_1) \overset{c}{\not\hookrightarrow} C(K_2, X),$$

para todo espaço de Banach separável X.

V - O Problema II.3

V - O Problema II.3

Teorema V.6 (Josefson-Nissenzweig, 1975): Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tal que $\|\varphi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.

Teorema V.6 (Josefson-Nissenzweig, 1975): Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tal que $\|\varphi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi_n \overset{w^*}{\to} 0$.

Definição V.7: Sejam α um ordinal e X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *propriedade de Josefson-Nissenzweig-*α, ou simplesmente X tem JN_α, se existe uma família $(\varphi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ em X^* tal que $\|\varphi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$, e

$$(\varphi_i(x))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha), \text{ para todo } x \in X.$$

V - O Problema II.3

Teorema V.6 (Josefson-Nissenzweig, 1975): Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tal que $\|\varphi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi_n \stackrel{w^*}{\to} 0$.

Definição V.7: Sejam α um ordinal e X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *propriedade de Josefson-Nissenzweig-*α, ou simplesmente X tem JN_α, se existe uma família $(\varphi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ em X^* tal que $\|\varphi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$, e

$$(\varphi_i(x))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha), \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema V.8 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e α um ordinal. Então temos:

(i) X tem JN_α e $c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K) \implies c_0(\aleph_\alpha) \stackrel{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$;

(ii) $C(K)$ tem JN_α e $c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \implies c_0(\aleph_\alpha) \stackrel{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$.

V - O Problema II.3

V - O Problema II.3

Corolário V.9 (Artigo básico, 2012): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e α um ordinal. Se X tem JN_α e *não* contém cópia de c_0, então

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K) \iff c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

VI - Considerações finais

VI - Considerações finais

Dado I um conjunto infinito, vamos considerar I munido da topologia discreta e denotar por βI seu compactificado de Stone-Čech.

VI - Considerações finais

Dado I um conjunto infinito, vamos considerar I munido da topologia discreta e denotar por βI seu compactificado de Stone-Čech.

Teorema VI.1 (Artigo básico, 2012): Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto satisfazendo

$$\aleph_0 \leq |I| < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha \leq 2^{|I|},$$

para algum ordinal α. Então temos que

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \iff c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

VI - Considerações finais

Dado I um conjunto infinito, vamos considerar I munido da topologia discreta e denotar por βI seu compactificado de Stone-Čech.

Teorema VI.1 (Artigo básico, 2012): Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto satisfazendo

$$\aleph_0 \leq |I| < \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha \leq 2^{|I|},$$

para algum ordinal α. Então temos que

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \iff c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

Lema VI.2 (König, 1905): Seja $\mathfrak{m}$ um cardinal infinito. Então $\mathfrak{m} < \operatorname{cf}(2^{\mathfrak{m}})$.

VI - Considerações finais

Dado I um conjunto infinito, vamos considerar I munido da topologia discreta e denotar por βI seu compactificado de Stone-Čech.

Teorema VI.1 (Artigo básico, 2012): Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto satisfazendo

$$\aleph_0 \leq |I| < \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha \leq 2^{|I|},$$

para algum ordinal α. Então temos que

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \iff c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

Lema VI.2 (König, 1905): Seja $\mathfrak{m}$ um cardinal infinito. Então $\mathfrak{m} < \operatorname{cf}(2^{\mathfrak{m}})$.

Corolário VI.3 (Artigo básico, 2012): Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto de cardinalidade $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Então temos que

$$c_0(2^{\mathfrak{m}}) \hookrightarrow X \iff c_0(2^{\mathfrak{m}}) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

VI - Considerações finais

VI - Considerações finais

Corolário VI.4 (Artigo básico, 2012): Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:

(i) $c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X$;

(ii) $c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C([0,1], X)$;

(iii) $c_0(\aleph_1) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta\mathbb{N}, X)$.

VI - Considerações finais

VI - Considerações finais

Vimos que

$$c_0 \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0 \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0 \hookrightarrow X.$$

Vimos também que, admitindo o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do Contínuo, temos

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

Vimos que

$$c_0 \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0 \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0 \hookrightarrow X.$$

Vimos também que, admitindo o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do Contínuo, temos

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

Problema VI.5: Dado $\alpha \geq 2$, obter um modelo de teoria dos conjuntos no qual

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K) \text{ ou } c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X.$$

VI - Considerações finais

VI - Considerações finais

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ o espaço de Banach das sequências limitadas de elementos de X, munido da norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}, X).$$

Denotamos por $c_0(\mathbb{N}, X)$ o subespaço (fechado) de $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ das sequências de elementos de X que convergem para zero.

VI - Considerações finais

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ o espaço de Banach das sequências limitadas de elementos de X, munido da norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}, X).$$

Denotamos por $c_0(\mathbb{N}, X)$ o subespaço (fechado) de $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ das sequências de elementos de X que convergem para zero.

Lema VI.6: Seja m um número natural. Então temos que

$$\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) \sim C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}^m).$$

VI - Considerações finais

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ o espaço de Banach das sequências limitadas de elementos de X, munido da norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}, X).$$

Denotamos por $c_0(\mathbb{N}, X)$ o subespaço (fechado) de $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ das sequências de elementos de X que convergem para zero.

Lema VI.6: Seja m um número natural. Então temos que

$$\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) \sim C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}^m).$$

Proposição VI.7 (Cembranos-Mendoza, 2010): $\ell_\infty(\mathbb{N}, c_0) \not\sim C(\beta\mathbb{N}, c_0)$.

VI - Considerações finais

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ o espaço de Banach das sequências limitadas de elementos de X, munido da norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}, X).$$

Denotamos por $c_0(\mathbb{N}, X)$ o subespaço (fechado) de $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ das sequências de elementos de X que convergem para zero.

Lema VI.6: Seja m um número natural. Então temos que

$$\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) \sim C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}^m).$$

Proposição VI.7 (Cembranos-Mendoza, 2010): $\ell_\infty(\mathbb{N}, c_0) \not\sim C(\beta\mathbb{N}, c_0)$.

Problema VI.8: $\ell_\infty(\mathbb{N}, X) \sim C(\beta\mathbb{N}, X) \implies \dim(X) < +\infty$?

VI - Considerações finais

Proposição VI.9 (Leung-Räbiger, 1990): Seja X um espaço de Banach. Então temos que

$$c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

VI - Considerações finais

Proposição VI.9 (Leung-Räbiger, 1990): Seja X um espaço de Banach. Então temos que

$$c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Problema VI.10: Caracterize os cardinais τ tais que, para todo espaço de Banach X, tem-se:

(i) $c_0(\tau) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X$;

(ii) $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Proposição VI.9 (Leung-Räbiger, 1990): Seja X um espaço de Banach. Então temos que

$$c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Problema VI.10: Caracterize os cardinais τ tais que, para todo espaço de Banach X, tem-se:

(i) $c_0(\tau) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X$;

(ii) $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Notemos que se $\ell_\infty(\mathbb{N}, X) \sim C(\beta\mathbb{N}, X)$ e $\mathrm{cf}(\tau) > \aleph_0$, temos, pelo Teorema IV.15, que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \sim C(\beta\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X,$$

pois $\mathrm{dens}(\beta\mathbb{N}) \leq \aleph_0$.

VI - Considerações finais

Lema VI.11: Seja X um espaço de Banach e seja $K_0 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, munido da topologia induzida por $\mathbb{R}$. Então

$$c_0(\mathbb{N}, X) \sim C(K_0, X).$$

Lema VI.11: Seja X um espaço de Banach e seja $K_0 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, munido da topologia induzida por $\mathbb{R}$. Então

$$c_0(\mathbb{N}, X) \sim C(K_0, X).$$

Como K_0 é enumerável, temos, pelo Teorema IV.15, que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow c_0(\mathbb{N}, X) \sim C(K_0, X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

Lema VI.11: Seja X um espaço de Banach e seja $K_0 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, munido da topologia induzida por $\mathbb{R}$. Então

$$c_0(\mathbb{N}, X) \sim C(K_0, X).$$

Como K_0 é enumerável, temos, pelo Teorema IV.15, que

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow c_0(\mathbb{N}, X) \sim C(K_0, X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

Problema VI.12: $c_0(\aleph_1) \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\aleph_1) \overset{c}{\hookrightarrow} X$?

VI - Considerações finais

VI - Considerações finais

Proposição VI.13 (Saab-Saab, 1982): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então temos que

$$\ell_1 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X) \implies \ell_1 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Proposição VI.13 (Saab-Saab, 1982): Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então temos que

$$\ell_1 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X) \implies \ell_1 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Problema VI.14: Para $1 < p < +\infty$, tem-se

$$\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X) \implies \ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} X?$$

VI - Considerações finais

VI - Considerações finais

Podemos ainda estudar problemas análogos aos Problemas II.1, II.2 e II.3 para espaços de Banach da forma $\mathcal{K}(X, Y)$ ou $X \hat{\otimes} Y$, onde X e Y são espaços de Banach.

Podemos ainda estudar problemas análogos aos Problemas II.1, II.2 e II.3 para espaços de Banach da forma $\mathcal{K}(X, Y)$ ou $X\hat{\otimes}Y$, onde X e Y são espaços de Banach.

Teorema VI.15 (Artigo básico, 2012. O caso $\alpha = 0$ é o Teorema de Ryan, 1991): Sejam X e Y espaços de Banach e α um ordinal. Se Y tem JN_α, então temos que

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \implies c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\otimes}Y \text{ e } c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{K}(X^*, Y).$$