Espaços Lipschitz-livres associados a uniões e quocientes de espaços métricos

Pedro L. Kaufmann

Novembro, 2013

Espaços de funções lipschitzianas

Sejam (M, d) espaço métrico, $0 \in M$.

Notação

$$Lip_0(M) := \{f : M \to \mathbb{R} | f \text{ é lipschitziana, } f(0) = 0\}$$

é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

- $Lip_0(M) \cong Lip_{0'}(M)$, $0, 0' \in M$.
- Quando X é Banach, $Lip_0(X)$ é chamado também de *dual lipschitziano* de X.

Espaços de funções lipschitzianas

Sejam (M, d) espaço métrico, $0 \in M$.

Notação

$$Lip_0(M) := \{f : M \to \mathbb{R} | f \text{ é lipschitziana}, \ f(0) = 0\}$$

é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

- $Lip_0(M) \cong Lip_{0'}(M)$, $0, 0' \in M$.
- Quando X é Banach, $Lip_0(X)$ é chamado também de *dual lipschitziano* de X.

Espaços de funções lipschitzianas

Sejam (M, d) espaço métrico, $0 \in M$.

Notação

$$Lip_0(M) := \{f : M \to \mathbb{R} | f \text{ é lipschitziana, } f(0) = 0\}$$

é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

- $Lip_0(M) \cong Lip_{0'}(M)$, $0, 0' \in M$.
- Quando X é Banach, $Lip_0(X)$ é chamado também de *dual lipschitziano* de X.

Um pré-dual para $Lip_0(M)$

Para cada $x \in M$, definimos $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ por $\delta_x f := f(x)$.

Definição

$$\mathcal{F}(M) := \overline{span}\{\delta_x | x \in M\}$$

é o espaço Lipschitz-livre associado a M.

- $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{x_j} \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \int f \, d\mu = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j).$
- $x \in M \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(M)$ é uma isometria.
- μ, ν probabilidades de suporte finito $\Rightarrow \|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}}$ é igual à *distância de transporte de massa* (ou *earthmover distance*, ou *1-distância de Wasserstein*) entre μ e ν.
- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$.

Problema: $\mathcal{F}(M)$ é predual único?

Um pré-dual para $Lip_0(M)$

Para cada $x \in M$, definimos $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ por $\delta_x f := f(x)$.

Definição

$$\mathcal{F}(M) := \overline{span}\{\delta_x | x \in M\}$$

é o espaço Lipschitz-livre associado a M.

- $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{x_j} \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \int f \, d\mu = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$.
- $x \in M \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(M)$ é uma isometria.
- μ, ν probabilidades de suporte finito $\Rightarrow \|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}}$ é igual à *distância de transporte de massa* (ou *earthmover distance*, ou *1-distância de Wasserstein*) entre μ e ν.
- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$.

Problema: $\mathcal{F}(M)$ é predual único?

Um pré-dual para $Lip_0(M)$

Para cada $x \in M$, definimos $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ por $\delta_x f := f(x)$.

Definição

$$\mathcal{F}(M) := \overline{span}\{\delta_x | x \in M\}$$

é o espaço Lipschitz-livre associado a M.

- $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{x_j} \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \int f \, d\mu = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$.
- $x \in M \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(M)$ é uma isometria.
- μ, ν probabilidades de suporte finito $\Rightarrow \|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}}$ é igual à *distância de transporte de massa* (ou *earthmover distance*, ou *1-distância de Wasserstein*) entre μ e ν.
- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$.

Problema: $\mathcal{F}(M)$ é predual único?

Um pré-dual para $Lip_0(M)$

Para cada $x \in M$, definimos $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ por $\delta_x f := f(x)$.

Definição

$$\mathcal{F}(M) := \overline{span}\{\delta_x | x \in M\}$$

é o espaço Lipschitz-livre associado a M.

- $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{x_j} \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \int f \, d\mu = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j).$

- $x \in M \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(M)$ é uma isometria.
- μ, ν probabilidades de suporte finito $\Rightarrow \|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}}$ é igual à *distância de transporte de massa* (ou *earthmover distance*, ou *1-distância de Wasserstein*) entre μ e ν.
- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$.

Problema: $\mathcal{F}(M)$ é predual único?

Um pré-dual para $Lip_0(M)$

Para cada $x \in M$, definimos $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ por $\delta_x f := f(x)$.

Definição

$$\mathcal{F}(M) := \overline{span}\{\delta_x | x \in M\}$$

é o espaço Lipschitz-livre associado a M.

- $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{x_j} \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \int f \, d\mu = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$.

- $x \in M \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(M)$ é uma isometria.
- μ, ν probabilidades de suporte finito $\Rightarrow \|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}}$ é igual à *distância de transporte de massa* (ou *earthmover distance*, ou *1-distância de Wasserstein*) entre μ e ν.
- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$.

Problema: $\mathcal{F}(M)$ é predual único?

Um pré-dual para $Lip_0(M)$

Para cada $x \in M$, definimos $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ por $\delta_x f := f(x)$.

Definição

$$\mathcal{F}(M) := \overline{span}\{\delta_x | x \in M\}$$

é o espaço Lipschitz-livre associado a M.

- $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{x_j} \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \int f \, d\mu = \sup_{f \in B_{Lip_0(M)}} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j).$
- $x \in M \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(M)$ é uma isometria.
- μ, ν probabilidades de suporte finito $\Rightarrow \|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}}$ é igual à *distância de transporte de massa* (ou *earthmover distance*, ou *1-distância de Wasserstein*) entre μ e ν.
- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$.

Problema: $\mathcal{F}(M)$ é predual único?

Relação entre M e $\mathcal{F}(M)$

Godefroy, Kalton 2003

$\forall\ L : M \to N$ lipschitziana com $L(0_M) = 0_N$ $\exists!$ $\hat{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ *linear* tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L} & N \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^M} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^N} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\hat{L}} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

Exemplo de aplicação: se X é Banach, X satisfaz λ-BAP $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(X)$ satisfaz λ-BAP.

Relação entre M e $\mathcal{F}(M)$

Godefroy, Kalton 2003

$\forall\ L : M \to N$ lipschitziana com $L(0_M) = 0_N$ $\exists!$ $\hat{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ *linear* tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L} & N \\ \Big\downarrow \delta^M & & \Big\downarrow \delta^N \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\hat{L}} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

Exemplo de aplicação: se X é Banach, X satisfaz λ-BAP $\Leftrightarrow \mathcal{F}(X)$ satisfaz λ-BAP.

Por que estudar se $\mathcal{F}(M) \overset{\simeq}{\hookrightarrow} L_1$?

(1) Relevante para o problema de decidir se $\mathcal{F}(M)$ é predual único, pois $X \overset{\simeq}{\hookrightarrow} L_1 \Rightarrow X$ é pré-dual único a menos de isomorfismo isométrico. (Godefroy, Talagrand 1981)
(2) É importante, para certos problemas de ciência da computação, mapear com pouca distorção espaços métricos "úteis" em L_1.

$\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1$?

• $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong L_1$.

• (Godard 2012) $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma) \Leftrightarrow M$ é isométrico a um subconjunto de uma $\mathbb{R}$-árvore (lembrando que (T, d) é uma $\mathbb{R}$-árvore se (1) $\forall\, a, b \in T\ \exists!$ isometria ϕ de $[0, d(a, b)]$ a um subconjunto de T tal que $\phi(0) = a$ e $\varphi(d(a, b)) = b$, e (2) toda $\varphi : [0, 1] \to T$ 1–1 e contínua tem a mesma imagem que a isometria associada aos pontos $a = \varphi(0)$ e $b = \varphi(1)$).

Problema: Caracterizar os espaços métricos M tais que $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma)$.

• $(X, \|\cdot\|)$ Banach, $\dim X < \infty$, $K \subset X$ compacto, $0 < \theta < 1$. Definimos a distância d_θ em K por $d_\theta(x, y) := \|x - y\|^\theta$. Então $\mathcal{F}((K, d_\theta)) \simeq \ell_1$.

• (Naor, Schechtman 2007) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \overset{\simeq}{\not\hookrightarrow} L_1$.

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong L_1$.
- (Godard 2012) $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma) \Leftrightarrow M$ é isométrico a um subconjunto de uma $\mathbb{R}$-árvore (lembrando que (T, d) é uma $\mathbb{R}$-árvore se (1) $\forall\, a, b \in T\, \exists!$ isometria ϕ de $[0, d(a, b)]$ a um subconjunto de T tal que $\phi(0) = a$ e $\varphi(d(a, b)) = b$, e (2) toda $\varphi : [0, 1] \to T$ 1–1 e contínua tem a mesma imagem que a isometria associada aos pontos $a = \varphi(0)$ e $b = \varphi(1)$).

Problema: Caracterizar os espaços métricos M tais que $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma)$.

- $(X, \|\cdot\|)$ Banach, $\dim X < \infty$, $K \subset X$ compacto, $0 < \theta < 1$. Definimos a distância d_θ em K por $d_\theta(x, y) := \|x - y\|^\theta$. Então $\mathcal{F}((K, d_\theta)) \simeq \ell_1$.
- (Naor, Schechtman 2007) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \overset{\cong}{\not\hookrightarrow} L_1$.

• $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong L_1$.

• (Godard 2012) $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma) \Leftrightarrow M$ é isométrico a um subconjunto de uma $\mathbb{R}$-árvore (lembrando que (T, d) é uma $\mathbb{R}$-árvore se (1) $\forall\, a, b \in T\, \exists!$ isometria ϕ de $[0, d(a, b)]$ a um subconjunto de T tal que $\phi(0) = a$ e $\varphi(d(a, b)) = b$, e (2) toda $\varphi : [0, 1] \to T$ 1–1 e contínua tem a mesma imagem que a isometria associada aos pontos $a = \varphi(0)$ e $b = \varphi(1)$).

Problema: Caracterizar os espaços métricos M tais que $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma)$.

• $(X, \|\cdot\|)$ Banach, $\dim X < \infty$, $K \subset X$ compacto, $0 < \theta < 1$. Definimos a distância d_θ em K por $d_\theta(x, y) := \|x - y\|^\theta$. Então $\mathcal{F}((K, d_\theta)) \simeq \ell_1$.

• (Naor, Schechtman 2007) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \overset{\simeq}{\not\hookrightarrow} L_1$.

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong L_1$.
- (Godard 2012) $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma) \Leftrightarrow M$ é isométrico a um subconjunto de uma $\mathbb{R}$-árvore (lembrando que (T, d) é uma $\mathbb{R}$-árvore se (1) $\forall\, a, b \in T\, \exists!$ isometria ϕ de $[0, d(a, b)]$ a um subconjunto de T tal que $\phi(0) = a$ e $\varphi(d(a, b)) = b$, e (2) toda $\varphi : [0, 1] \to T$ 1–1 e contínua tem a mesma imagem que a isometria associada aos pontos $a = \varphi(0)$ e $b = \varphi(1)$).

Problema: Caracterizar os espaços métricos M tais que $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma)$.

- $(X, \|\cdot\|)$ Banach, $\dim X < \infty$, $K \subset X$ compacto, $0 < \theta < 1$. Definimos a distância d_θ em K por $d_\theta(x, y) := \|x - y\|^\theta$. Então $\mathcal{F}((K, d_\theta)) \simeq \ell_1$.
- (Naor, Schechtman 2007) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \overset{\cong}{\not\hookrightarrow} L_1$.

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong L_1$.
- (Godard 2012) $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma) \Leftrightarrow M$ é isométrico a um subconjunto de uma $\mathbb{R}$-árvore (lembrando que (T, d) é uma $\mathbb{R}$-árvore se (1) $\forall\, a, b \in T\, \exists!$ isometria ϕ de $[0, d(a, b)]$ a um subconjunto de T tal que $\phi(0) = a$ e $\varphi(d(a, b)) = b$, e (2) toda $\varphi : [0, 1] \to T$ 1–1 e contínua tem a mesma imagem que a isometria associada aos pontos $a = \varphi(0)$ e $b = \varphi(1)$).

Problema: Caracterizar os espaços métricos M tais que $\mathcal{F}(M) \overset{\cong}{\hookrightarrow} L_1(\sigma)$.

- $(X, \|\cdot\|)$ Banach, $\dim X < \infty$, $K \subset X$ compacto, $0 < \theta < 1$. Definimos a distância d_θ em K por $d_\theta(x, y) := \|x - y\|^\theta$. Então $\mathcal{F}((K, d_\theta)) \simeq \ell_1$.
- (Naor, Schechtman 2007) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \overset{\cong}{\not\hookrightarrow} L_1$.

Espaços Lipschitz-livres de uniões de espaços métricos

Godard 2012

Seja (W,d) tal que $W = \cup_{i\in I} M_i$ e $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tal que para cada $x \in M_i, y \in M_j$ com $i \neq j$ temos $\alpha \leq d(x,y) \leq \beta$. Então

$$\mathcal{F}(W) \simeq \left(\sum_{i\in I} \mathcal{F}(M_i) \right)_{\ell_1} \oplus_1 \ell_1(I).$$

Proposição

Seja (W,d) tal que $W = M \cup N$,

1. $M \cap N = \{p\}$, e
2. $\exists C \geq 1$ tal que $x \in M, y \in N \Rightarrow d(x,p) + d(y,p) \leq Cd(x,y)$.

. Então

$$\mathcal{F}(M \cup N) \overset{C}{\simeq} \mathcal{F}(M) \oplus_1 \mathcal{F}(N).$$

Espaços Lipschitz-livres de uniões de espaços métricos

Godard 2012

Seja (W, d) tal que $W = \cup_{i \in I} M_i$ e $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tal que para cada $x \in M_i, y \in M_j$ com $i \neq j$ temos $\alpha \leq d(x, y) \leq \beta$. Então

$$\mathcal{F}(W) \simeq \left(\sum_{i \in I} \mathcal{F}(M_i) \right)_{\ell_1} \oplus_1 \ell_1(I).$$

Proposição

Seja (W, d) tal que $W = M \cup N$,

1. $M \cap N = \{p\}$, e
2. $\exists C \geq 1$ tal que $x \in M, y \in N \Rightarrow d(x, p) + d(y, p) \leq Cd(x, y)$.

. Então

$$\mathcal{F}(M \cup N) \overset{C}{\simeq} \mathcal{F}(M) \oplus_1 \mathcal{F}(N).$$

Espaços Lipschitz-livres de quocientes de espaços métricos

Definição: espaço métrico quociente

Seja (M, d) espaço métrico, $F \subset M$ fechado $\neq \emptyset$, e seja $\sim_F$ a relação de equivalência em M que identifica todos os pontos de F. Então

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \min\{d(x,y), d(x,F) + d(y,F)\}, \tilde{x}, \tilde{y} \in M/\sim_F$$

é uma métrica em $M/\sim_F$, e $(M/\sim_F, \tilde{d})$ é o chamado *espaço métrico quociente de M por $\sim_F$*, que denotaremos por M/F.

- $Lip_{\tilde{0}}(M/F) \cong \{f \in Lip_0(M) : f \text{ é constante em } F\} \subset Lip_0(M)$.

Proposição

Suponha $\{0\} \in F \subset M$ fechado e que existe um *operador linear de extensão* $E : Lip_0(F) \to Lip_0(M)$, que é w^*-w^* contínuo. Então

$$\mathcal{F}(M) \overset{\|E\|+1}{\simeq} \mathcal{F}(F) \oplus_1 \mathcal{F}(M/F). \tag{1}$$

• A existência de tal operador é equivalente a $\mathcal{F}(F)$ ser complementado em $\mathcal{F}(M)$. É o caso se, por exemplo, M é *doubling* e $F \subset M$ é qualquer (Lancien, Pernecká 2013).

• Tais operadores não existem, por exemplo, quando $M = c_0$ e F é um subespaço sem BAP. Note que, neste caso, não temos (1).

Proposição

Suponha $\{0\} \in F \subset M$ fechado e que existe um *operador linear de extensão* $E : Lip_0(F) \to Lip_0(M)$, que é w^*-w^* contínuo. Então

$$\mathcal{F}(M) \overset{\|E\|+1}{\simeq} \mathcal{F}(F) \oplus_1 \mathcal{F}(M/F). \tag{1}$$

• A existência de tal operador é equivalente a $\mathcal{F}(F)$ ser complementado em $\mathcal{F}(M)$. É o caso se, por exemplo, M é *doubling* e $F \subset M$ é qualquer (Lancien, Pernecká 2013).

• Tais operadores não existem, por exemplo, quando $M = c_0$ e F é um subespaço sem BAP. Note que, neste caso, não temos (1).

Proposição

Suponha $\{0\} \in F \subset M$ fechado e que existe um *operador linear de extensão* $E : Lip_0(F) \to Lip_0(M)$, que é w^*-w^* contínuo. Então

$$\mathcal{F}(M) \overset{\|E\|+1}{\simeq} \mathcal{F}(F) \oplus_1 \mathcal{F}(M/F). \quad (1)$$

• A existência de tal operador é equivalente a $\mathcal{F}(F)$ ser complementado em $\mathcal{F}(M)$. É o caso se, por exemplo, M é *doubling* e $F \subset M$ é qualquer (Lancien, Pernecká 2013).

• Tais operadores não existem, por exemplo, quando $M = c_0$ e F é um subespaço sem BAP. Note que, neste caso, não temos (1).

Proposição

Sejam $(W, d, 0)$ tal que $W = M \cup N$ e F fechado com $0 \in F \subset M \cap N$, satisfazendo

1. existe um operador linear de extensão $E : Lip_0(F) \to Lip_0(M \cup N)$, que é w^*-w^* contínuo, e
2. $\exists C \geq 1$ tal que $x \in M, y \in N \Rightarrow d(x, F) + d(y, F) \leq Cd(x, y)$.

Então

$$\mathcal{F}(M \cup N) \overset{C(\|E\|+1)}{\simeq} \mathcal{F}(M/F) \oplus_1 \mathcal{F}(N/F) \oplus_1 \mathcal{F}(F).$$