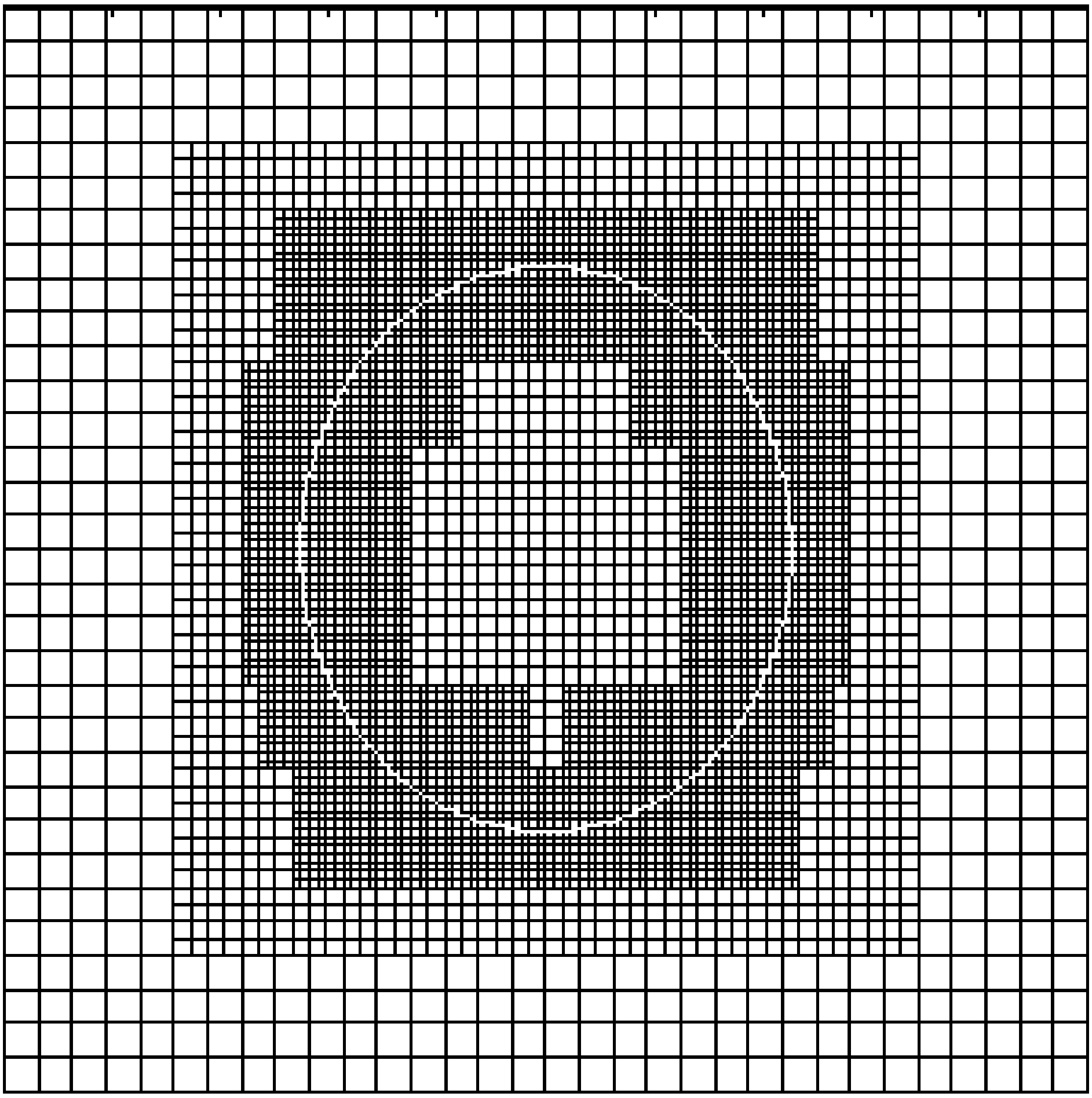
CÁLCULO NUMÉRICO

Caderno de Exercícios



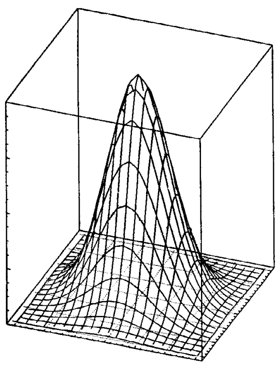
Departamento de Matemática Aplicada

IME-USP

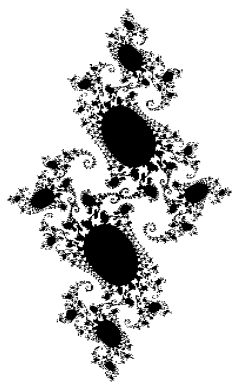
3ª edição — Março, 1998

Esta lista foi preparada com LaTeX 2_ε[1] (versão de dezembro de 1997). O editor utilizado é o poderoso editor de textos Emacs da *Free Software Foundation* em ambiente Linux.

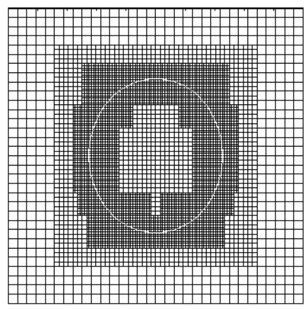
Capa : Multigrid gentilmente cedido pelo Prof. Alexandre Megiorin Roma.
Coordenação editorial : Equipe do curso de Cálculo Numérico.
Impressão : Gráfica do *IME-USP.*



1ª edição de
setembro de 1990.
Gaussiana.



2ª edição de
agosto de 1991.
Conjunto de Julia.



3ª edição de
março de 1998.
Multigrid.

Críticas (construtivas) e sugestões são bem vindas e podem ser encaminhadas ao seu professor ou então diretamente para o Prof. Claudio Hirofume Asano (**asano@ime.usp.br**). O prêmio dado por erro encontrado ainda não foi fixado (desde 1990!).

[1] LaTeX é um conjunto de macros, de autoria de Leslie Lamport, para o formatador de textos TeX o qual é devido, pela concepção e elaboração, ao Prof. Donald Knuth do *Stanford Department of Computer Science, Stanford University.* O logo TeX é marca registrada da *American Mathematical Society.*

1 Exercícios Sobre Zeros de Funções[2]

1.1 ➠Mostre que no *Método da Dicotomia* vale a igualdade

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

1.2 ➠Dado o intervalo $[a,b]$, mostre que no *Método da Dicotomia* o número de iterações, n, para que $|\alpha - x| < \varepsilon$, deve satisfazer

$$n \geq \frac{\ln\Big((b-a)/\varepsilon\Big)}{\ln 2} - 1.$$

1.3 ➠A equação $2x - \cos x = 0$ possui um único zero real α em $I = [0, \pi/4]$. Prove que **existe** $x_0 \in I$, $x_0 \neq \alpha$ tal que a seqüência

$$x_{n+1} = \frac{\cos x_n}{2}$$

converge para α.

1.4 A equação $x^2 + x - 0.7 = 0$ possui um único zero real α em $[0,1]$. Prove que **existe** $x_0 \in I$, $x_0 \neq \alpha$ tal que a seqüência $x_{n+1} = 0.7 - x_n^2$ converge para α.

1.5 A equação $xe^x - 2 = 0$ possui um único zero real α em $I = [0.7, 1]$. Prove que a seqüência $x_0 \in I$, $x_{n+1} = 2e^{-x_n}$ converge para α, **qualquer que seja** $x_0 \in I$.

1.6 ➠Dada a função $f(x) = x^3 + 3x - 2$ pede-se

(a) determine um intervalo I que somente contenha a primeira raiz α positiva de $f(x) = 0$. **Justifique**.

(b) escreva a função $\phi(x)$ do *Método de Newton*.

(c) escolha uma aproximação inicial $x_0 \neq \alpha$, tal que se possa assegurar que a seqüência definida por

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

com ϕ dada em (b), convirja para α. **Justifique**.

1.7 (a) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com derivada contínua satisfazendo $\phi(\alpha) = \alpha$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e considere a seqüência $x_n = \phi(x_{n-1})$, para $n = 1, 2, \ldots$. Mostre que se $|\phi'(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $|x_n - \alpha| \leq M^n |x_0 - \alpha|$.

(b) Seja $\phi(x) = \cos(x/3)$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(\alpha) = \alpha$ e determine um $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - \alpha| \leq 10^{-4}$, onde $x_0 = 0$, $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$.

1.8 ➠A função $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$, $x \in \mathbb{R}$, possui exatamente duas raízes reais: $\alpha_1 \in [0.01, 1]$ e $\alpha_2 \in [4, 5]$.

Considere as funções $\phi_1(x) = e^{x-3}$ e $\phi_2(x) = \ln x + 3$.

[2] No fim da seção está o teorema global sobre convergência do *Método de Newton*.

(a) ϕ_1 pode ser usada para aproximar α_1 pelo *Método das Aproximações Sucessivas* com garantia de convergência ? E ϕ_2? **Justifique**.

(b) ϕ_1 pode ser usada para aproximar α_2 pelo *Método das Aproximações Sucessivas* com garantia de convergência? E ϕ_2? **Justifique**.

1.9 Deseja-se utilizar o *Método de Newton* para aproximar uma raiz α de

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 3}{x^2 + 1}.$$

(a) Escolha um $x_0 \neq \alpha$ convenientemente de modo a garantir convergência. **Justifique**.

(b) Faça 2 iterações.

1.10 Complete cada uma das frases abaixo com uma das seguintes alternativas, de forma a torná-las verdadeiras. **Justifique**, a seguir, cada afirmação obtida.

(i) $\phi'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) $0 < \phi'(x) < 1/4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\phi'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(a) Se ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, com derivada contínua, tal que $\phi(10) = 10$ e .... então a seqüência $x_0 \neq 0$, $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ oscila em torno de $\alpha = 10$.

(b) Se ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, com derivada contínua, tal que $\phi(10) = 10$ e .... então a seqüência $x_0 < 10$, $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ dispõe-se em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < 10.$$

(c) Se ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, com derivada contínua, tal que $\phi(10) = 10$ e .... então a seqüência $x_0 > 10$, $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ satisfaz $x_n > 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1.11 Determine o valor numérico de $1/3$ através do *Método das Aproximações Sucessivas* sem usar divisões utilizando $\phi(x) = x(2 - 3x)$.

1.12 Mostre que o processo iterativo definido por

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{a}{x_n}$$

não converge para $\sqrt{a}$, se $x_0 \neq \sqrt{a}$.

1.13 ➠Utilizando o *Método das Aproximações Sucessivas* determine

$$s = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}.$$

Justifique o que for necessário para garantir convergência.

1.14 ➠

(a) Aplique o *Método de Newton* para a função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(raiz } \alpha = 0\text{).}$$

Qual é o comportamento das iteradas x_n? Elas convergem?

(b) Faça o mesmo que (a), mas com

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{x^2} & x \leq 0. \end{cases}$$

1.15 (a) O *Método de Newton* pode ser usado para funções de uma variável complexa a valores complexos $f(z)$ ($z = x + iy$, x e y reais):

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \qquad n \geq 0.$$

Se for desejável evitar o uso de aritmética complexa, mostre que

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - \dfrac{A_n C_n + B_n D_n}{C_n^2 + D_n^2} \\ \\ y_{n+1} &= y_n - \dfrac{B_n C_n - A_n D_n}{C_n^2 + D_n^2} \end{cases}$$

com $f(z_n) = A_n + iB_n$ e $f'(z_n) = C_n + iD_n$ decomposição em parte real e imaginária.

(b) Use o *Método de Newton* para calcular um zero de

$$p(z) = z^4 - 3z^3 + 20z^2 + 44z + 54$$

localizado perto de $z_0 = 2.5 + 4.5i$.

1.16 Use o *Método de Newton* para aproximar um zero de

$$f(x) = (e^{2x} - 10x)(x^2 + 1).$$

Justifique tudo que for necessário para garantir convergência e, a seguir, faça 3 iterações.

1.17 Use o *Método de Newton* para aproximar um zero de

$$f(x) = e^{4x^2 - 5x}(x^3 - 1.45x^2 + 3x - 4.35).$$

Justifique tudo que for necessário para garantir convergência e, a seguir, faça 3 iterações.

1.18 Mostre que nenhuma das funções abaixo pode ser usada para aproximar $\sqrt{2}$ pelo método iterativo a partir de chutes iniciais diferentes de $\sqrt{2}$ com garantia de convergência.

(a) $\phi(x) = \cos(x/2 + 2)$.

(b) $\phi(x) = x^2 + x - 2$.

1.19 A função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$ assume o valor -4 num ponto $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando o *Método de Newton* aproxime α. Justifique o que for necessário para garantir convergência.

1.20 Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e considere a seqüência $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, onde ϕ é uma função definida em $\mathbb{R}$, contínua e diferenciável, satisfazendo $-1/2 \leq \phi'(x) < 0$, com um ponto fixo $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x_0 < \alpha$ então:

(a) $x_k < \alpha$, se k for par, e $x_k > \alpha$ se k for ímpar.

(b) A seqüência x_k dispõe-se em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$x_0 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n} < \ldots < \alpha < \ldots < x_{2n+1} < x_{2n-1} < \ldots < x_1$$

(Sugestão: Teorema do Valor Médio.)

1.21 ➠Dada $f(x) = \ln(x) + x - 4$, pede-se:

(a) Mostre que f tem um único zero em $I = [2, 4]$.

(b) Considerando o processo iterativo

$$x_n = x_{n-1} + cf(x_{n-1})$$

determine um intervalo para c de forma que o processo convirja, tomando-se x_0 o extremo de I mais próximo da raiz.

(c) Utilizando (b) com $c = -1$ e tomando-se x_0 convenientemente, calcule 3 iterações e delimite o erro de truncamento cometido na 3ª iteração.

(d) Calcule a raiz real de f utilizando o *Método de Newton* com erro inferior a 0.001 (**precisão pré-fixada**).

1.22 Para os itens abaixo responda se a afirmação feita é *verdadeira* ou *falsa*, **justificando** através de uma prova ou contra-exemplo:

(a) Seja $f(x)$ contínua num intervalo I com um único zero $\alpha \in I$. Se $m \leq |f'(x)|$, $m > 0$, para todo $x \in I$, então o erro de truncamento $|y - \alpha|$ é delimitado por

$$|y - \alpha| \leq \frac{|f(y)|}{m}, \quad \forall y \in I.$$

(b) Seja ϕ contínua com derivada contínua no intervalo $I = [a, b]$ e α o seu único ponto fixo em I. Se

(i) $0 \neq |\phi'(x)| < 1$, $\forall x \in I$

(ii) $x_0 \in I$ e $x_n = \phi(x_{n-1}) \in I$, $n = 1, 2, \ldots$

(iii) $x_0 \neq \alpha$

então, apesar de x_n convergir para α, nunca atingiremos a raiz num número finito de passos.

(c) Idem, com $I = \mathbb{R}$.

(d) Se ϕ é contínua e o processo $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge, então x_n converge para algum ponto fixo de ϕ.

(e) Seja ϕ contínua e diferenciável no intervalo I e α o seu único ponto fixo neste intervalo. Tomando-se $x_0 < \alpha$, $x_0 \in I$, e tendo-se $0 < \phi'(x) < 1$, $\forall x \in [x_0, \alpha)$, então o processo iterativo definido por $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge para α.

(f) Seja $\alpha \in [a, b]$ o único zero da função $f(x)$, contínua em $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então utilizando apenas o *Teorema de Bolzano* podemos obter o extremo do intervalo mais próximo da raiz.

(g) Seja ϕ contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ e α o seu único ponto fixo. Se $\phi'(x) > 1$, $\forall x \geq \alpha$, e $x_0 > \alpha$ então o processo iterativo definido por $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge.

(h) Se ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, com derivada contínua, tal que $\phi(4) = 4$ e $\phi'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então a seqüência $x_0 > 4$, $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ satisfaz $x_n > 4$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

(i) Se ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, com derivada contínua, tal que $\phi(0) = 0$ e $0 < \phi'(x) < 1/3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ então a seqüência $x_0 = -2$ e $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ é estritamente crescente.

(j) Dada a função $f(x) = e^{-x} - x$, o processo iterativo $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \phi(x_n) = e^{-x_n}$, converge para a única raiz de $f(x)$.

1.23 Dada a função $f(x) = e^x - 2$,

(a) localize a raiz α de f, delimitando um intervalo $I = [a, b]$ tal que α seja a única raiz em I. **Justifique.**

(b) Escreva $\phi(x)$ do *Método de Newton* para determinar o zero de $f(x)$.

(c) Escolha uma aproximação inicial $x_0 \neq \alpha$ tal que se possa assegurar a convergência da seqüência obtida pelo processo iterativo definido por $x_{n+1} = \phi(x_n)$, com $\phi(x)$ dada em (b), para raiz α de $f(x)$, isolada em I no item (a). **Justifique** a escolha feita.

(d) Faça 2 iterações do processo definido em (c) e delimite o erro de truncamento $|\alpha - x_2|$.

1.24 Mostre que se

(i) ϕ e ϕ' são funções contínuas em $I = [a, b]$.

(ii) $\alpha \in I$ é um ponto fixo de ϕ (i.e. $\phi(\alpha) = \alpha$).

(iii) $k = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1$;

(iv) $x_0 \in I$ e $x_{n+1} = \phi(x_n) \in I$ para $i = 0, 1, \ldots$

então

(a) $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$.

(b) Se $-1 < \phi'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então a convergência da seqüência é *oscilante* e se $0 < \phi'(x) < 1$ então a convergência da seqüência é *monotônica*.

(c) Prove que α é o único ponto fixo de ϕ em I.

1.25 **Método da Falsa Posição**

Suponhamos que $f(x)$ é contínua, possui um único zero real α isolado no intervalo $[a, b]$ e satisfaz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Seja $\tilde{x}$ a intersecção do eixo Ox com a corda $\overline{PQ}$ onde $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$.

O *Método da Falsa Posição*, parecido com o da *Dicotomia*, consiste em

(i) calcular $\tilde{x}$;

(ii) substituir um dos extremos de I por $\tilde{x}$.

Podemos utilizar o critério de parada: $|\tilde{x} - \tilde{x}_{anterior}| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ dado.

(a) Aplique o *Método da Falsa Posição* para calcular a raiz de $f(x) = x^2 - 5$ com $\varepsilon = 0.01$ partindo-se do intervalo inicial $[2, 2.5]$.

(b) Pode-se afirmar que a raiz exata satisfaz $\alpha = \tilde{x} \pm \varepsilon$?

1.26 Use o *Método de Newton* para determinar o ponto de mínimo global do polinômio abaixo, se existir tal ponto.

$$p(x) = x(x-1)(x+1)(x-2).$$

Atenção: Primeiro verifique se existe ou não um ponto de mínimo global (isto é, um ponto $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$). Depois isole os possíveis candidatos (se existirem) e só então calcule, pelo método pedido, o ponto de mínimo global.

1.27 Use o *Método de Newton* para determinar o ponto de máximo global do polinômio abaixo

$$p(x) = -2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 14x - 1$$

sabendo que ele é um ponto crítico[3] de f isolado no intervalo $[1, 3]$. Delimite o erro cometido.

1.28 Dada a função

$$f(x) = x^2 - 2$$

determine um intervalo $I = [a, b]$ e uma condição inicial $x_0 \neq \alpha$ de modo que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convirja para a raiz positiva α de $f(x)$. **Justifique**.

Faça as iterações, verificando se é possível utilizar precisão pré-fixada de $\varepsilon = 0.001$.

[3] Ponto crítico é um ponto onde a derivada se anula.

1.29 Dada a função

$$f(x) = \frac{5}{x} - 0.6x - 2$$

pede-se

(a) Determine um intervalo que contenha apenas uma raiz desta função. **Justifique**.

(b) A seqüência gerada por

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{5}{0.6x_n + 2}$$

converge para a raiz α delimitada em (a), escolhendo-se convenientemente $x_0 \neq \alpha$? **Justifique**. Em caso afirmativo, exiba um tal x_0 que garanta a convergência.

(c) Faça 2 iterações do processo.

(d) Encontre a raiz delimitada em (a) pelo *Método de Newton*, com precisão $\varepsilon = 0.01$.

1.30 Dada a função

$$f(x) = e^{-1-x}$$

que possui um ponto fixo $\alpha > 0$, pede-se

(a) Mostre que a seqüência dada por

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

converge para α, qualquer que seja o chute inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) O número de iterações que devem ser feitas para garantir que o erro absoluto cometido seja menor que 0.00001, partindo-se de $x_0 = 5$ e sabendo-se que $|5-\alpha| < 5$.

1.31 Dada a função

$$f(x) = \frac{x^4 - 1.4x^3 + 0.49x^2 - 1.4x - 0.51}{x^2 + 2}$$

que tem exatamente 2 zeros reais,

(a) utilize o *Método de Newton* para aproximar o **maior** zero de f de forma a **garantir** a convergência utilizando x_0 diferente desta raiz.

(b) Faça 3 iterações.

Observação: **Justifique** tudo que for necessário para garantir a convergência.

1.32 Use o *Método de Newton* para encontrar um zero positivo de

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 7}{x^2 + 4x + 1}$$

num intervalo em que você possa garantir *a priori* a convergência do processo. **Justifique** a escolha do intervalo e do chute inicial.

1.33 ➠A função

$$f(x) = 1 - e^x + \frac{3x}{2x+1}$$

tem um zero em $x = 0$.

Quais das funções abaixo você pode utilizar para determinar esse zero pelo *Método das Aproximações Sucessivas*? **Justifique**.

$$\phi_1(x) = \frac{(e^x - 1)(2x+1)}{3}$$

$$\phi_2(x) = x + 1 + \frac{3x}{(2x+1)} - e^x$$

$$\phi_3(x) = \frac{(2x+1)e^x - 1}{5}$$

1.34 Demonstre que a seqüência

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

pode ser utilizada para calcular $\sqrt[p]{a}$, $a \geq 0$.

1.35 Utilizando o exercício anterior calcule $\sqrt[3]{8}$.

1.36 Ache o ponto de inflexão[4] da função $f(x) = 2e^x + x^3 - 1$.

1.37 Seja a função $f(x) = e^{x-2} + x^5 - 1$. Ache o valor de x no qual $f(x) = 2$.

1.38 Queremos determinar a única raiz α de uma função $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ utilizando o *Método das Aproximações Sucessivas*.

Provar que se $\phi : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 (isto é, derivável com derivada contínua) e além disso

(a) $\phi(x) = x$ se, e só se, $x = \alpha$ e

(b) $\phi'(x) > 2$, $\forall x \in [0, \infty[$

então a seqüência

$$x_0 = \phi(0), \quad x_n = \phi^{-1}(x_{n-1}) \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

é crescente e converge para α.

(Sugestão: Estude a função ϕ^{-1} num intervalo $[\phi(0), a]$ com $a > \alpha$ e ...)

Teorema 1.1 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com f'' contínua. Suponha que*

(i) $f(a).f(b) < 0$.

(ii) $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

[4]Ponto de inflexão é um ponto crítico que não é de máximo local nem de mínimo local.

(iii) $f''(x)$ *não troca de sinal em* $[a, b]$.

Então a seqüência obtida aplicando-se o Método de Newton *a* f *converge para a única raiz* α *de* f *em* $[a, b]$ *se for escolhido* $x_0 \in [a, b]$ *convenientemente. Por exemplo, escolhendo-se*

$$x_0 = \begin{cases} a & \textit{se } \phi(a) \in [a, b] \\ b & \textit{em caso contrário} \end{cases}$$

a seqüência $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \geq 1$, *onde*

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

convergirá para α.

2 Exercícios sobre Sistemas Lineares

2.1 ➠Dado o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 40 \\ 20 & 62 & 2 \\ 18 & 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} 42 \\ -40 \\ 24 \end{bmatrix}$$

(a) calcule a solução pelo *Método de Eliminação de Gauss*

i. utilizando frações.

ii. utilizando aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos (mantendo o sistema na ordem dada).

iii. utilizando aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos e condensação pivotal.

(b) Coloque V se verdadeiro e F se falso:

i.	ii.	iii.	
			ocorre erro de truncamento.
			ocorre erro de arredondamento.
			sempre fornece a solução exata.

2.2 ➠Fazendo-se a triangularização de um sistema de ordem 3, $Ax = b$, pelo *Método de Eliminação de Gauss*, utilizando aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos e condensação pivotal, obtivemos:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 3.0 & -1.0 \\ 0.20 & 0.30 & 3.1 & 0.70 \\ 0.60 & 0.40 & 0.60 & 3.0 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad p_1 = 1 \quad \text{e} \quad p_2 = 3.$$

(a) Calcule det A.

(b) Calcule a inversa de A.

(c) Calcule a matriz A original.

2.3 Fazendo-se a triangularização do sistema

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 4.0 & 3.0 & 2.0 & 1.0 \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 & 3.0 & -1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 3.0 & 4.0 & -1.0 \\ 4.0 & 3.0 & 2.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

pelo *Método de Eliminação de Gauss* com condensação pivotal e utilizando aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos obtivemos:

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 3.0 & 2.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.75 & 1.7 & 1.5 & 1.3 & 0.25 \\ 0.50 & 0.88 & 1.7 & 1.4 & -1.7 \\ 0.25 & 0.76 & 0.82 & 1.7 & -0.10 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad p_1 = 4, \quad p_2 = 4 \quad \text{e} \quad p_3 = 4.$$

(a) Calcule a solução do sistema.

(b) Faça uma etapa de refinamento de solução.

2.4 É dado o sistema linear

$$\begin{cases} -16x + 10y - 40z = 80 \\ 8x + 4y + 28z = -72 \\ 24x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Aplicando-se o *Método de Eliminação de Gauss* com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos à matriz do sistema acima obtivemos:

$$\begin{bmatrix} 24 & 3.0 & 4.0 \\ -0.67 & 12 & -37 \\ 0.33 & 0.25 & 36 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad p_1 = 3 \quad \text{e} \quad p_2 = 3.$$

Faça uma etapa de refinamento partindo de

$$(x_0, y_0, z_0) = (0.58, -1.3, -2.8).$$

2.5 ➠Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

que tem uma única solução $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

(a) O sistema satisfaz o *Critério de Sassenfeld*? **Justifique**.

(b) Mostre que a seqüência de iteradas do *Método de Gauss-Seidel* converge.

2.6 Inverta a matriz abaixo usando o *Método de Eliminação de Gauss* com condensação pivotal e 2 algarismos significativos.

$$\begin{bmatrix} 0.60 & 1.8 & 0.0 \\ 1.2 & 0.80 & 2.0 \\ 0.0 & 0.70 & 1.0 \end{bmatrix}$$

2.7 O sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0.2 & -0.1 \\ 1 & 2 & 0.1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) satisfaz o *Critério das Linhas* ? **Justifique**.

(b) satisfaz o *Critério de Sassenfeld* ? **Justifique**.

O que se pode afirmar da convergência do *Método de Gauss-Seidel* em (a) e em (b)?

2.8 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

com $a_{ii} \neq 0$, $\det(A) \neq 0$. Considere o sistema $Ax = b$ e a seqüência $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$, gerada pelo *Método de Gauss-Seidel*. Seja $\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - \overline{x}_i$, onde $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ é a solução do sistema. Prove que:

(a)

$$\Delta x_i^{(k)} = -\frac{a_{12}a_{23}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}} \Delta x_i^{(k-2)} = M \Delta x_i^{(k-2)}$$

(b)

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = \overline{x}_i, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 \text{ se e só se } |M| < 1$$

(c) Dê um exemplo de um sistema linear 3×3 que não satisfaça o *Critério de Sassenfeld*, mas para o qual o *Método de Gauss-Seidel* seja convergente.

2.9 Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Resolva-o por *Eliminação de Gauss*, com condensação pivotal, utilizando aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos na mantissa.

(b) Determine a 1ª coluna da inversa da matriz dos coeficientes **utilizando** a triangularização feita no item (a).

2.10 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) Resolva $Ax = b$ pelo *Método de Eliminação de Gauss* com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos.

(b) Usando o **mesmo método** acima, calcule $\det A$.

(c) Explique as seguintes afirmações:

i. No processo de refinamento de uma solução aproximada, obtida pelo *Método de Eliminação de Gauss*, as operações envolvidas no cálculo dos resíduos devem ser feitas com precisão maior do que a utilizada nos cálculos restantes (por exemplo dupla-precisão).

ii. Para resolver o sistema $Ac = \mathrm{r}$, o resíduo é convertido para precisão simples.

2.11 Deseja-se resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo *Método de Gauss-Seidel*. Sabe-se que a solução está no cubo $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$. Escolha um chute inicial e diga qual o número de iterações necessárias para se ter certeza que o erro será menor que 0.01 . **Justifique**.

2.12 Resolva o sistema linear abaixo pelo *Método de Eliminação de Gauss* com condensação pivotal usando aritmética de ponto flutuante de 2 algarismos significativos.

Atenção: Antes de iniciar a aplicação do método você deve passar os coeficientes numéricos do sistema para 2 algarismos significativos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & -1.5 \\ -1.2 & 2 & 0.085 \\ -2 & 2.4 & 0.995 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5048 \\ 2.44 \\ 2.98 \end{bmatrix}$$

2.13 Considere os sistemas lineares

$$(1) \quad \begin{cases} 4x + 1y + 1z = 2 \\ 2x - 5y + 1z = 3 \\ 1x + 1y + 1.5z = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2) \quad \begin{cases} 5x + 2y + 2.5z = 6 \\ 2x - 5y + 1z = 3 \\ 1x + 1y + 1.5z = 4 \end{cases}$$

Observe que o sistema (2) foi obtido do sistema (1) substituindo-se a primeira equação de (1) pela soma desta com a última equação de (1). Portanto eles são equivalentes.

Queremos encontrar a solução do sistema (1) (ou (2)) usando o *Método de Gauss-Seidel*, partindo de um certo chute inicial fixado (x_0, y_0, z_0), de forma a obter a melhor precisão possível na vigésima iteração.

A qual dos dois sistemas devemos aplicar o *Método de Gauss-Seidel* segundo esse objetivo? **Justifique**.

2.14 Mostre que o sistema abaixo é consistente se e somente se $a = 1$ ou $a = -1$, usando o *Método de Eliminação de Gauss*.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 + a^2 \\ x + 2y + 3z = -2a \\ x + 3y + 4z = -4a \\ x + 2y + 2z = 2(1-a) \end{cases}$$

2.15 Para os itens abaixo responda se a afirmação feita é *verdadeira* ou *falsa*, **justificando** através de uma prova ou contra-exemplo:

(a) Quando usamos um método iterativo para determinar um número α com uma calculadora comum, e após a 10ª iteração os valores obtidos passam a se repetir $(x_{11} = x_{12} = x_{13} = \ldots)$ então certamente $\alpha = x_{11}$.

(b) Todo sistema linear que satisfaz o *Critério de Sassenfeld* também satisfará o *Critério das Linhas*.

(c) Dado um sistema linear, sempre existe uma ordem para as equações em que o sistema satisfaz o *Critério de Sassenfeld*.

(d) No *Método de Eliminação de Gauss* e no iterativo de *Gauss-Seidel* cometemos erro de truncamento.

2.16 (a) A função

$$\phi(z) = \frac{b_1 - \dfrac{a_{12}(b_2 - a_{21}z)}{a_{22}}}{a_{11}}$$

possui um único ponto fixo α em $\mathbb{R}$.

Mostre que se

$$\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right| < 1$$

então a seqüência $z^{(n+1)} = \phi(z^{(n)})$ converge para α, qualquer que seja o ponto inicial $z^{(0)}$ escolhido.

(b) Ao se resolver o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

pelo *Método de Gauss-Seidel*, com aproximação inicial $(x^{(0)}, y^{(0)})$ obtém-se uma seqüência $(x^{(n)}, y^{(n)})$ que converge para a solução do sistema sob certas condições. Mostre que a seqüência $x^{(n)}$ coincide com a seqüência definida no item (a) com valor inicial $x^{(0)} = z^{(0)}$.

3 Exercícios sobre o MMQ

3.1 ➠Seja $f(x) = x^5$ e sejam $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ os polinômios de Legendre de grau 0, 1, 2 e 3 respectivamente. Ao aproximarmos f no intervalo $[-1, 1]$ pelo MMQ por um polinômio de grau ≤ 2 obtivemos

$$p(x) = 0p_0(x) + \frac{3}{7}p_1(x) + 0p_2(x).$$

Ao aproximarmos f no intervalo $[-1, 1]$ pelo MMQ por um polinômio de grau ≤ 3 obtivemos

$$p(x) = b_0p_0(x) + b_1p_1(x) + b_2p_2(x) + b_3p_3(x).$$

Determine o valor de b_0, b_1, b_2 e b_3.

3.2 ➠Para os itens abaixo responda se a afirmação feita é *verdadeira* ou *falsa*, **justificando** através de uma prova ou contra-exemplo:

(a) Considere a função $f(x) = 2\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,2x + 5\cos 10x$, periódica de período 2π. Então ao fazermos a *Análise Harmônica* de f até o harmônico de ordem 8 obteremos $g(x) = 2\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,2x$.

(b) Se o polinômio $p(t) = t^3$ for aproximado pelo MMQ em $[-1, 1]$ por um polinômio da forma

$$q(t) = \sum_{i=0}^{10} a_i t^{2i}$$

então o erro quadrático cometido será nulo.

(c) Ao fazermos a *Análise Harmônica* de $f(x) = \cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x$ até o harmônico de ordem 3 obtemos a aproximação $g(x) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,3x$.

3.3 Aproxime a função f tabelada abaixo por uma função da forma $g(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\,\mathrm{sen}\,x$.

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f(x)$	-1	2	0	-2	1

3.4 Considere os seguintes produtos internos:

(i)

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b w(x)u(x)v(x)\,dx,$$

onde $w(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, $w(x) > 0$ para $a < x < b$.

(ii)

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i u(x_i)v(x_i),$$

onde $w_i > 0$ e $a \leq x_i \leq b$ para $i = 1, \ldots, n$.

Seja $\{p_k\}_{k=0,1,\ldots}$ uma família de polinômios ortogonais relativamente a $\langle\ ,\ \rangle$ (no caso (ii) temos $0 \leq k \leq n-1$). Mostre que:

(a) se $q(x)$ é um polinômio de grau $< k$ então $\langle p_k, q\rangle = 0$.

(b) se $q(x)$ é um polinômio de grau k então:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b w(x)q(x)^2\,dx &= \langle q, q\rangle > 0. \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i q(x_i)^2 &= \langle q, q\rangle > 0, \quad \text{se } k < n. \end{cases}$$

(c) se $q(x)$ é um polinômio de grau k então

$$\langle p_i, q\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k \Longrightarrow q(x) = 0.$$

(d) $p_k(x)$ tem k zeros reais distintos

- no intervalo $[a, b]$, no caso (i).
- no interior do menor intervalo que contém $\{x_1, \ldots, x_n\}$, no caso (ii).

3.5 ➠Determinar os três primeiros polinômios mônicos[5] ortogonais relativamente ao produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) g(x)\,dx.$$

3.6 Determinar os três primeiros polinômios mônicos ortogonais relativamente ao produto interno

$$\langle f, g\rangle = \sum_{s=0}^{5} f(s)g(s).$$

3.7 ➠

(a) Gere os três primeiros polinômios ortogonais mônicos em relação ao produto interno

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_1^2 h_1(t)h_2(t)t^2\,dt$$

(b) Encontre a, b e c de forma a minimizar

$$F(a, b, c) = \int_1^2 (t^2 - a - bt - ct^2)^2 t^2\,dt.$$

3.8 ➠

(a) Use os polinômios de Legendre para aproximar f pelo MMQ no intervalo $[1, 5]$ por um polinômio P de grau menor ou igual a dois, onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 1 \leq t \leq 3 \\ -1 & \text{para } 3 < t \leq 5. \end{cases}$$

(b) Calcule o erro quadrático cometido ao utilizar tal aproximação.

[5] Polinômios mônicos são aqueles cujo termo de maior grau tem coeficiente unitário.

3.9 ➠Família não linear nos parâmetros.

(a)

x	2	5	8	11	14	17	27	31	35	44
$f(x)$	94.8	89.7	81.3	74.9	68.7	64.0	49.3	44.0	39.1	31.6

Usar o MMQ para obter uma aproximação da função tabelada por uma função da família

i. ae^{bx}

ii. $1/(a+bx)$

iii. $x/(a+bx)$

(b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	1.7	2.5

Usar o MMQ para obter uma aproximação da função tabelada por uma função racional

$$\frac{a+x^2}{b+x}.$$

3.10 (a) Sejam $h_1, \ldots, h_n$ funções definidas num retângulo $I \times J \subset \mathbb{R}^2$, $x_1, \ldots, x_r$ pontos de I, distintos 2 a 2, $y_1, \ldots, y_s$ pontos de J, também distintos 2 a 2 e $F = [h_1, \ldots, h_n]$[6]. Mostre que:

$$\langle h, g \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} h(x_i, y_j) g(x_i, y_j), \qquad h, g \in F$$

define um produto interno em F. (Este produto interno pode ser degenerado[7]).

(b) Sejam $h_1, \ldots, h_n$ funções definidas num retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, integráveis em $[a, b] \times [c, d]$ e $F = [h_1, \ldots, h_n]$. Mostre que:

$$\langle h, g \rangle = \int_a^b \left[\int_c^d h(x, y) g(x, y)\, dy \right] dx, \qquad h, g \in F$$

define um produto interno em F. (Este produto interno pode ser degenerado). Mostre também que se $h_1, \ldots, h_n$ forem contínuas em $[a, b] \times [c, d]$ então $\langle\ ,\ \rangle$ é não degenerado em F.

3.11 Sejam $f(x, y)$ uma função definida num retângulo $I \times J \subset \mathbb{R}^2$, $x_1, \ldots, x_n$ pontos de I distintos 2 a 2 e $y_1, \ldots, y_s$ pontos de J também distintos 2 a 2. é dada uma tabela

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le s.$$

Fixados $m < n$ e $p < s$, queremos aproximar esta tabela por um polinômio de duas variáveis da forma

$$g_{mp}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{p} a_{kl} x^k y^l, \quad m < n, \quad p < s$$

[6] i.é., F é o espaço vetorial das funções da forma $a_1h_1 + a_2h_2 + \cdots + a_nh_n$.

[7] i.é. $\langle h, h \rangle = 0 \not\Rightarrow h = 0$.

pelo MMQ, relativamente ao produto interno

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} u(x_i, y_j)v(x_i, y_j). \qquad (\star)$$

Note que estamos aproximando f por uma função pertencente ao subespaço dos polinômios de grau $\leq mp$. Mostre que este problema tem uma única solução.

Sugestão: Sejam F o espaço vetorial gerado por f e pelas funções $x^k y^l$, $0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq p$ e G o subespaço de F gerado pelas funções $x^k y^l$, $0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq p$.

Queremos determinar a projeção ortogonal de f em G relativamente ao produto interno dado por $(\star)$.

Seja $\{p_\alpha(x)\}_{\alpha=0,1,\ldots,m}$ uma família de polinômios ortogonais relativamente a

$$\langle h, g\rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)g(x_i)$$

e $\{q_\beta(y)\}_{\beta=0,1,\ldots,p}$ uma família de polinômios ortogonais relativamente a

$$\langle h, g\rangle_2 = \sum_{j=1}^{s} h(y_j)g(y_j).$$

Mostre que $v_{\alpha\beta}(x, y) = p_\alpha(x)q_\beta(y)$ é uma base ortogonal de G (relativamente ao produto interno dado por $(\star)$). Mostre também como obter a solução a partir de $v_{\alpha\beta}$ e f_{ij}.

3.12 Os polinômios

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1\\
p_1(x) &= 1 - 2x\\
p_2(x) &= 1 - 6x + 6x^2\\
p_3(x) &= 1 - 12x + 30x^2 - 20x^3
\end{aligned}$$

satisfazem as relações

$$\langle p_i, p_j\rangle_1 = \int_0^1 p_i(x)p_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j\\ \dfrac{1}{2i+1} & \text{se } i = j \end{cases}$$

Utilizando estes polinômios, aproxime $f(x) = \operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, \pi/4]$ por um polinômio de grau ≤ 3, pelo MMQ. **Justifique**.

3.13 ➠Sabe-se que os seguintes polinômios

$$\begin{aligned}
p_0(s) &= 1\\
p_1(s) &= \frac{s}{2}\\
p_2(s) &= \frac{s^2}{2} - 1\\
p_3(s) &= \frac{5s^3 - 17s}{6}
\end{aligned}$$

são ortogonais relativamente ao produto interno

$$\langle u, v\rangle_1 = \sum_{s=-2}^{2} u(s)v(s).$$

Dada a tabela

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6
$f(x)$	0.21	1.25	2.31	2.70	2.65

aproxime f por um polinômio de grau ≤ 3 pelo MMQ, relativamente ao produto interno

$$\langle f, g\rangle_2 = f(0)g(0) + f(0.4)g(0.4) + f(0.8)g(0.8) + f(1.2)g(1.2) + f(1.6)g(1.6)$$

usando os polinômios dados acima. Obtenha também o valor da aproximação no ponto 0.7. **Justifique**.

3.14 Mostre que

$$\int_c^{c+2L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{p\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \forall p = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_c^{c+2L} \cos\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{p\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq p \\ 2L & \text{se } k = p = 0 \\ L & \text{se } k = p,\ k > 0 \end{cases} \qquad (k, p \geq 0)$$

$$\int_c^{c+2L} \mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{p\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq p \\ L & \text{se } k = p,\ k \geq 1 \end{cases} \qquad (k, p \geq 1).$$

3.15 Seja f periódica de período $2L$. Deseja-se aproximar f por uma função da forma

$$g_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{L}\right)$$

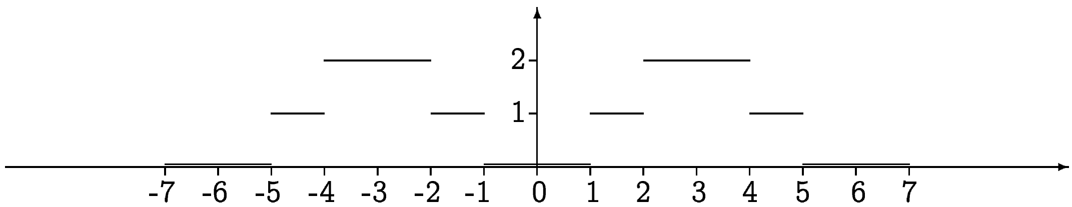
pelo MMQ relativamente ao produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_c^{c+2L} f(x)g(x)\,dx \qquad \text{(Análise Harmônica – Domínio contínuo).}$$

(a) Apresente as expressões para se calcular os coeficientes a_k, $k \geq 0$ e b_k, $k \geq 1$. **Justifique**.

(b) Mostre que se f é uma função par então $b_k = 0$, $k \geq 1$ e que se f é uma função ímpar então $a_k = 0$, $k \geq 0$.

3.16 Faça a Análise Harmônica da função abaixo até o harmônico de ordem 3.



3.17 Análise Harmônica (Domínio discreto).

Seja f periódica de período 2π. Suponha que f está tabelada nos $2n$ pontos $x_j = \frac{\pi}{n} j$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$. Deseja-se aproximar f por uma função da forma

$$g_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \Big(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \Big), \qquad m < n$$

pelo MMQ, relativamente ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) g(x_j).$$

(a) Mostre que

$$\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{sen} px_j \operatorname{sen} qx_j = 0, \qquad 1 \le p \le n-1, \quad 1 \le q \le n-1, \quad p \ne q$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \cos px_j \cos qx_j = 0, \qquad 0 \le p \le n, \quad 0 \le q \le n, \quad p \ne q$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{sen} px_j \cos qx_j = 0, \qquad 1 \le p \le n-1, \quad 0 \le q \le n,$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{sen}^2 px_j = n, \qquad 1 \le j < n$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \cos^2 px_j = n, \qquad 1 \le j < n.$$

(b) Quais as expressões para os coeficientes a_k, $k \ge 0$ e b_k, $k \ge 1$?

(c) Faça a Análise Harmônica Discreta para a função f tabelada abaixo, até o harmônico de ordem 3

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x_j)$	126	159	191	178	183	179	176	149

onde $x_j = \dfrac{\pi}{4} j$.

3.18 ➠

(a) Ao aproximarmos a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & 0 \le x \le \pi \\[2ex] -\dfrac{x}{\pi} + 2 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

por uma parábola, pelo MMQ, relativamente ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx,$$

obtivemos a função

$$g(x) = -\frac{1}{8} + \frac{15}{8\pi}x - \frac{15}{16\pi^2}x^2.$$

Ajuste f por uma função do tipo

$$h(x) = a_0 + a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos x,$$

pelo MMQ, com o mesmo produto interno. Qual das duas aproximações é melhor? Justifique.

(b) Dada a tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	0	1

aproxime-a por uma "reta" pelo MMQ. Esta mesma reta ajusta, pelo MMQ, a tabela

x	-1	0	0.5	1
$f(x)$	1	-1	0	1

?

Para a tabela

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	-1	0	1

,

você tem condições, sem fazer os cálculos, de dar informações sobre a "reta" que melhor a aproxima pelo MMQ? **Justifique**.

3.19 Ao fazermos a aproximação de uma função f por um polinômio da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

utilizando o MMQ, obtemos um polinômio de grau 2. Fazendo a aproximação de f por um polinômio da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

obteremos novamente um polinômio de grau 2? **Justifique**.

3.20 Dada uma função f tabelada em 5 pontos aplicou-se o MMQ para aproximá-la por um polinômio g de grau menor ou igual a 3 e obteve-se uma "reta" com $\langle f-g, f-g\rangle = 0$. Então $f(x)$ é uma "reta"? Justifique.

3.21 ➠Calcule a e b reais tais que

$$f(a,b) = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - a - bx^2\right)^2 dx$$

seja mínimo.

3.22 Seja $g_m(x)$ a aproximação obtida para $f(x)$ por um polinômio de grau m usando o MMQ. Prove que

$$\langle f - g_{m+1}, f - g_{m+1}\rangle \leq \langle f - g_m, f - g_m\rangle.$$

3.23 Dados

(i) F espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ produto interno em F.

(iii) $G_m = [g_0, \ldots, g_m]$ e $G_{m+1} = [g_0, \ldots, g_m, g_{m+1}]$ subespaços vetoriais de F (note que $G_{m+1} = G_m + \mathbb{R}g_{m+1}$).

(iv) $f \in F$.

Então se h_m e h_{m+1} são aproximações ótimas de f relativamente a $\langle\ ,\ \rangle$ em G_m e G_{m+1} respectivamente, temos

$$\langle f - h_{m+1}, f - h_{m+1} \rangle \leq \langle f - h_m, f - h_m \rangle.$$

Interprete este resultado.

3.24 Sejam f e h funções reais distintas não identicamente nulas. O que deve acontecer ao se tentar aproximar f num intervalo $[a, b]$ pelo MMQ por

$$g(x) = a_0 h(x) + a_1 f(x)?$$

Calcule a_0, a_1 e o erro quadrático

$$\int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)^2 \, dx.$$

3.25 ➠Mostre que os polinômios 1, x, x^2, x^3, ... não são ortogonais em relação a

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

quaisquer que sejam a e b ($b > a$).

4 Exercícios sobre Interpolação

4.1 ➠Determine os valores de (α, β) para os quais o polinômio interpolador da tabela

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	3	β+1	α	β^2-15

tem grau 2.

4.2 ➠Sejam x_0, x_1, ..., $x_n \in [a, b]$ distintos 2 a 2, e seja f uma função contínua em $[a, b]$ com derivadas f', f'', ..., $f^{(10)}$ contínuas em $[a, b]$.

Seja $g(x)$ o polinômio de grau ≤ 7 que melhor aproxima a tabela

x_0	x_1	$\cdots$	x_{10}
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{10})$

pelo MMQ. Mostre que se $EQ(f, g) = 0$ então[8]

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_7)|}{8!} \max_{z \in [a,b]} |f^{(8)}(z)|.$$

4.3 Para os itens abaixo responda se a afirmação feita é *verdadeira* ou *falsa*, **justificando** através de uma prova ou contra-exemplo:

(a) $p(x) = 5x^6 - 2x^3 + x - 1$ é o polinômio interpolador de

x_i	0	1	-1	2	-2
$f(x_i)$	-1	3	5	305	333

.

(b) Tabelamos $f(x) = 2x^5 + 7x - 1$ em 11 pontos distintos 2 a 2

x_0	x_1	$\cdots$	x_{10}
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{10})$

.

Então ao aproximarmos essa tabela pelo MMQ por um polinômio de grau ≤ 8 certamente obteremos um polinômio de grau 5.

(c) Aproximamos uma função f contínua pelo MMQ por um polinômio de grau menor ou igual a k no intervalo $[0, 1]$ e obtivemos erro quadrático igual a zero. Podemos então concluir que f é um polinômio de grau menor ou igual a k.

(d) Se um polinômio P de grau 5 é tabelado em 10 pontos igualmente espaçados e se Q é o polinômio interpolador da tabela obtida, então o grau de Q é menor ou igual a 6.

(e) Se um polinômio P de grau 5 é tabelado em 5 pontos distintos e se Q é o polinômio interpolador da tabela obtida , então o grau de Q é 5.

[8] EQ: Erro Quadrático.

4.4 Conseguimos a seguinte tabela de uma certa função f:

x	0	1	2	3	4
y	1	2.7	53.1441	387.420489	2824.295365

Queremos usar interpolação para aproximar o valor de $f(0.5)$ de forma a ter a menor avaliação de erro possível. Sabendo que f é contínua, tem derivadas de todas as ordens contínuas e satisfaz $|f^{(k)}(x)| \leq 2^k e^8$, para todo $x \in [0, 4]$, resolva nosso problema, e dê a melhor avaliação que puder para o erro cometido.

4.5 Determinar o polinômio de grau mínimo que passa pelos pontos

x	0	1	3	4	6
y	3	0	18	63	285

4.6 Através da tabela para $y = \operatorname{sen} x$ que se segue,

x	y
1.2	0.93204
1.3	0.96356
1.4	0.98545
1.5	0.99749
1.6	0.99957

encontre x correspondente a $y = 0.96968$.

4.7 Uma tabela de senos é dada com argumentos variando de grau em grau. Delimitar o termo complementar para polinômios interpoladores de grau 1, 2 e 3.

4.8 Considere a tabela

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

(a) Sejam $g(x)$ o polinômio interpolador de f relativamente a x_0, x_1, ..., x_{n-1} e $h(x)$ o polinômio interpolador de f relativamente a x_1, x_2, ..., x_n. Mostre que

$$q(x) = \frac{(x - x_0)h(x) - (x - x_n)g(x)}{x_n - x_0}$$

é o polinômio interpolador de f relativamente a x_0, x_1, ..., x_n.

(b) Usando o item (a) obtenha a *Fórmula de Newton* para a interpolação polinomial.

5 Exercícios sobre Integração Numérica

5.1 ➠Mostre que quando a regra de *Simpson* é aplicada para

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

o erro é zero, se assumirmos que não houve erro de arredondamento.

Vale o mesmo para

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx?$$

5.2 ➠Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx$$

pela fórmula dos *Trapézios* e pela fórmula de *Simpson* com passo $h = \pi/20$. Delimitar os termos complementares.

5.3 ➠Faça a análise harmônica da função tabelada nos pontos

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f(x)$	2	1	0	-1	2

até o terceiro harmônico, calculando as integrais pelo *Método dos Trapézios* e pelo *Método de Simpson*.

5.4 Utilize a tabela abaixo para obter um valor aproximado da área sob a curva

x	2	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7
$f(x)$	0.707	0.674	0.659	0.645	0.632	0.609

5.5 (a) Dê uma condição suficiente para que o *Método dos Trapézios* seja exato. Idem para o *Método de Simpson*.

(b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{se } 0 \le x < 4 \\ -2x + 3 & \text{se } 4 \le x < 6 \\ -x^2 & \text{se } 6 \le x < 8 \\ 1 & \text{se } 8 \le x < 12 \\ a\pi x & \text{se } 12 \le x \le 14 \end{cases}$$

Qual o melhor método para aproximar

$$\int_0^{14} f(x) \, dx?$$

Justifique.

(c) Estime o erro cometido para o cálculo da integral do item (b) ao se utilizar o *Método dos Trapézios* e o *Método de Simpson*, com $h = 1/2$.

5.6 ➠Considere a função $f(x) = e^x$. Aproxime f no intervalo $[2, 6]$ pelo MMQ por um polinômio de grau ≤ 2, usando os polinômios de Legendre. Calcule as integrais que envolvam f pelo *Método de Simpson* com 2 repetições.

5.7 Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que existam as derivadas f', f'', f''' e $f^{(4)}$ existam e sejam contínuas em $[a, b]$. Seja $p_3(x)$ o polinômio interpolador de f em 4 pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$. Aproximamos $\int_a^b f(x)\,dx$ por $\int_a^b p_3(x)\,dx$. Mostre que o erro E cometido satisfaz

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{24} \max_{z\in[a,b]} |f^{(4)}(z)|.$$

5.8 Seja $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(2x + 1))$. Queremos aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ pelo *Método dos Trapézios* com n repetições, de forma a obter $|\text{erro}| \leq 0.0001$. Sabemos que $|f^{(k)}(z)| \leq 2^k$, para todo $z \in [0, 5]$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Encontre um valor de n (o menor que você conseguir) que possa ser usado para resolver este problema.

6 FORMULÁRIO

Polinômios de Legendre:

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \qquad p_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}, \quad \ldots$$

Estes polinômios satisfazem

$$\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \dfrac{2}{2j+1} & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Polinômios de Lagrange:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Polinômio interpolador na forma de Lagrange:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x).$$

Polinômio interpolador na forma de Newton:

$$p(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

ou ainda

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

Erro de truncamento na interpolação polinomial:

$$E_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)!}, \qquad \sigma \in I.$$

Fórmula dos Trapézios repetida n vezes:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\big[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big]$$

$$E_T = -\frac{nh^3}{12}f''(\sigma) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\sigma), \qquad \sigma \in [a,b].$$

Fórmula de Simpsom repetida n vezes:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big]$$

$$E_S = -\frac{nh^5}{90}f^{(IV)}(\sigma) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(IV)}(\sigma), \qquad \sigma \in [a,b].$$

Análise Harmônica:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$