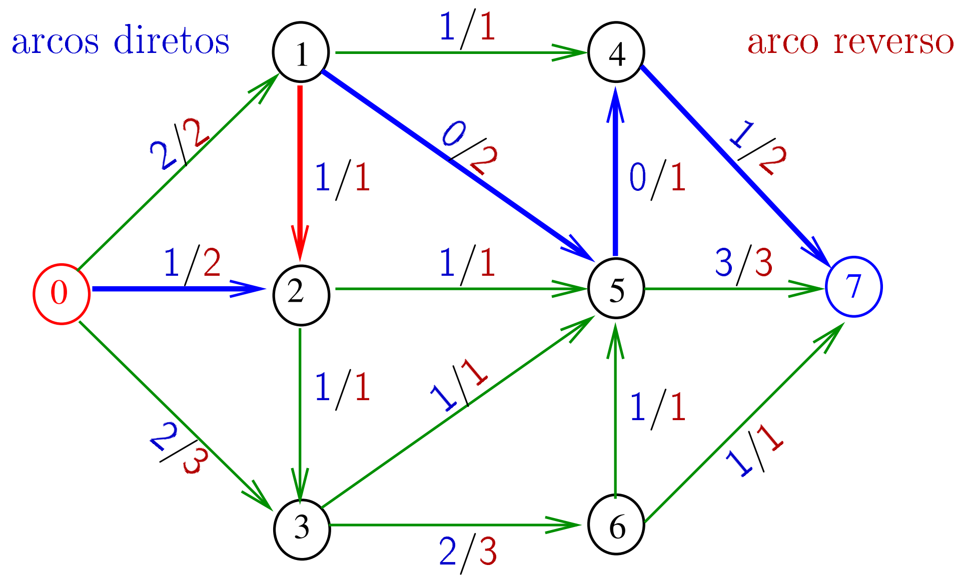
Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e
- os arcos reversos não estão vazios.

Exemplo

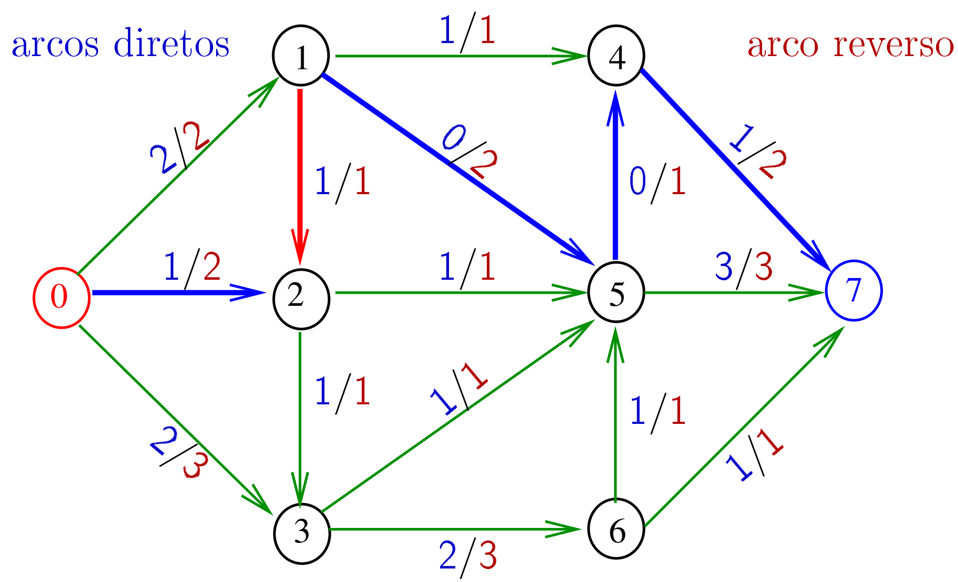


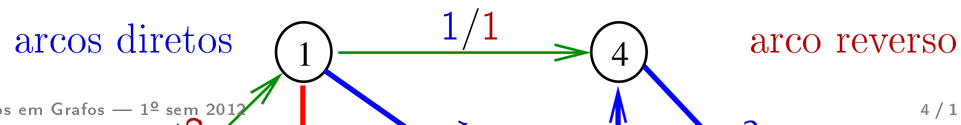
Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de **enviar** `d` unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- para cada arco direto, some `d` ao fluxo
- para cada arco reverso, subtraia `d` do fluxo.

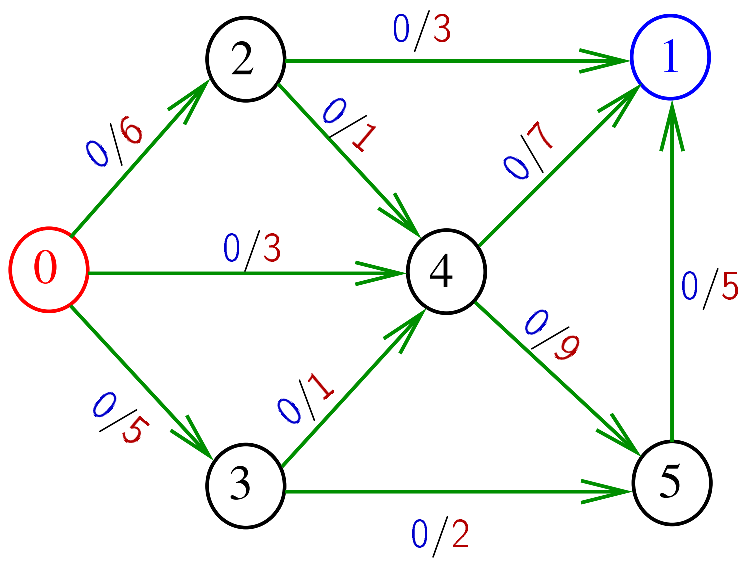
Exemplo





Método de Ford-Fulkerson

$\mathrm{int}(f) = 0$ $\qquad$ f(a)/c(a)



$\mathrm{int}(f) = 0$ $\qquad$ f(a)/c(a)

0/3

Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

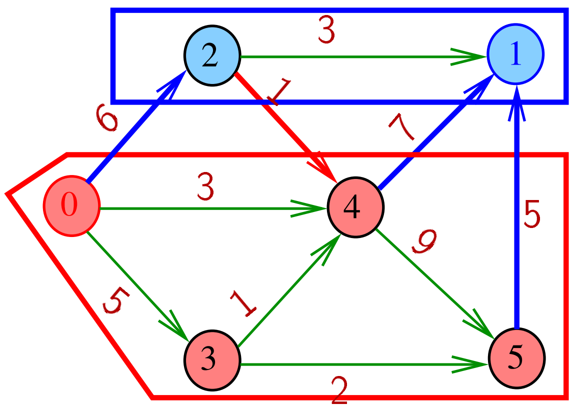
Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento
Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P
Seja f′ o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P
Faça $f \leftarrow f'$.

Capacidade de um corte

Numa rede capacitada, a capacidade de um corte (S,T) é a soma das capacidades dos arcos diretos do corte.

Exemplo: corte de capacidade 18



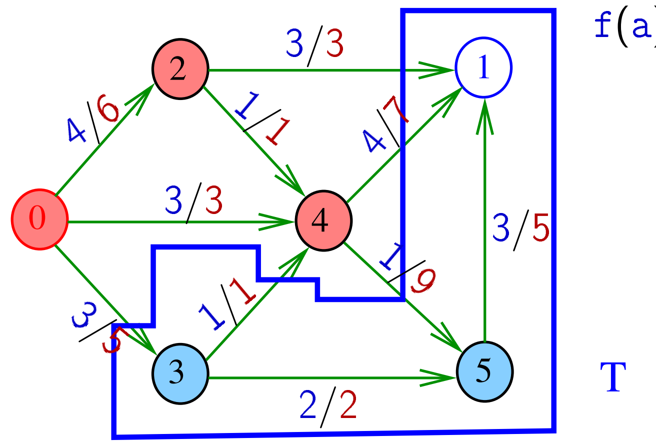
Lema da dualidade

Se f é um fluxo que respeita c e (S,T) é um corte então

intensidade de f $\leq$ capacidade de (S,T).

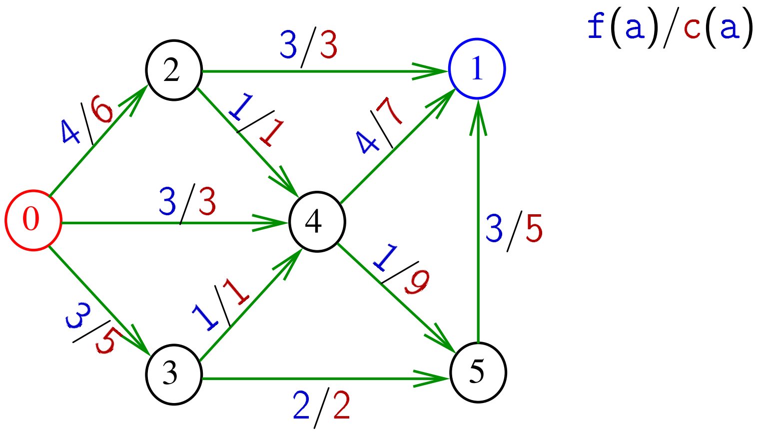
Exemplo: $\mathrm{int}(f) = 10 \leq 24 = c(S,T)$.

f(a)/c(a)

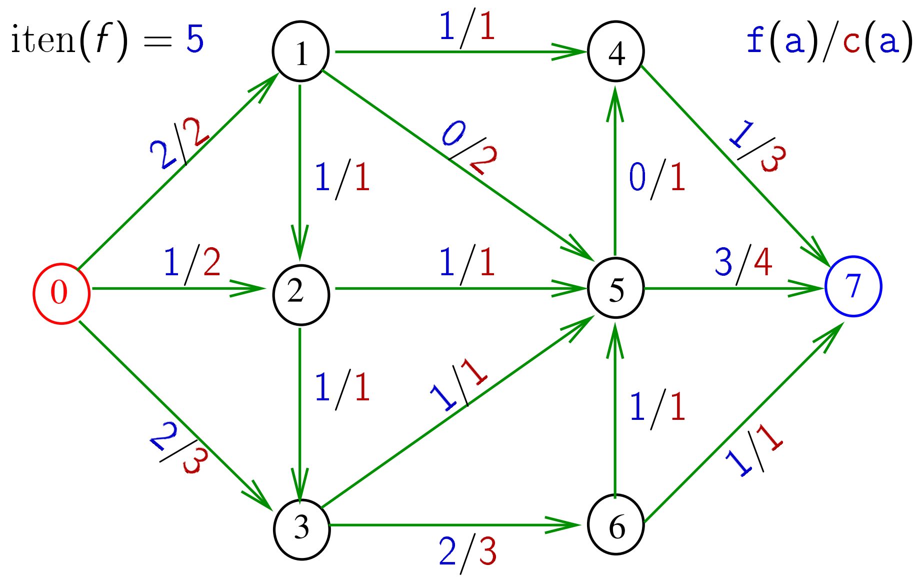


Conseqüência

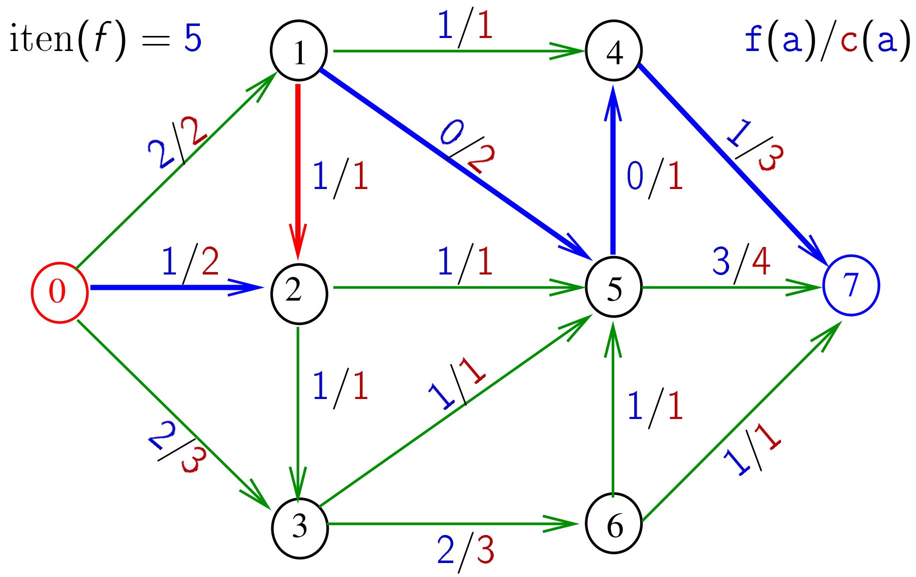
Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de f = capacidade de (S,T). então f é um fluxo de máximo e (S, T) é um corte de capacidade mínima.



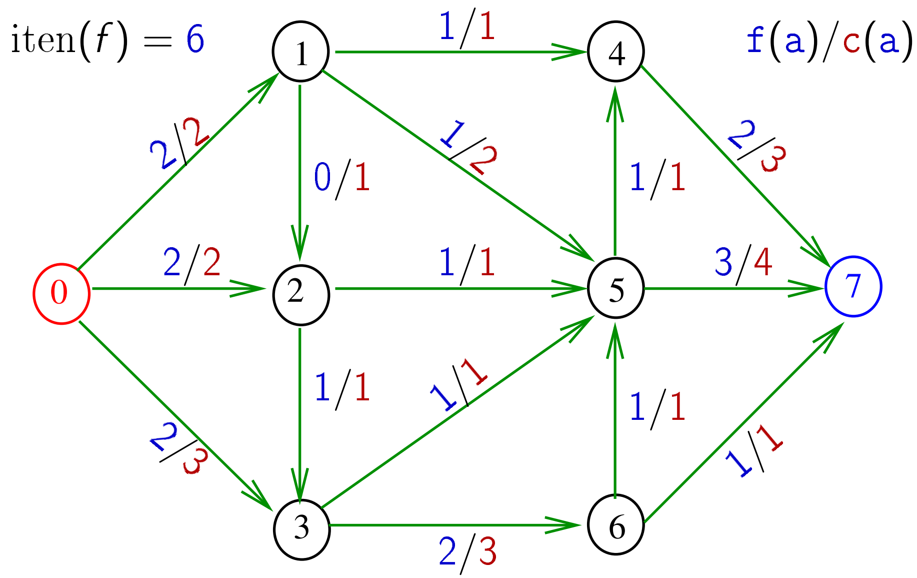
Fluxo é máximo?



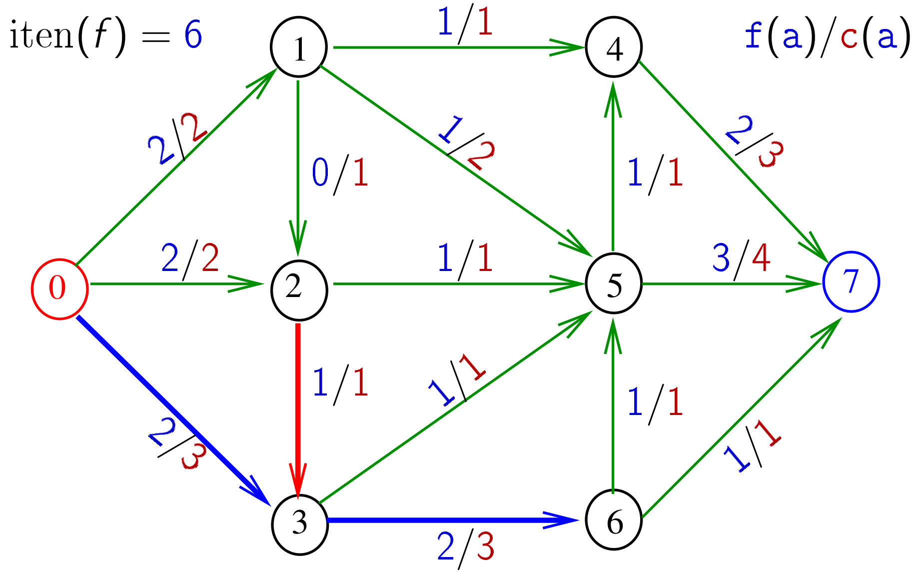
Caminho de aumento

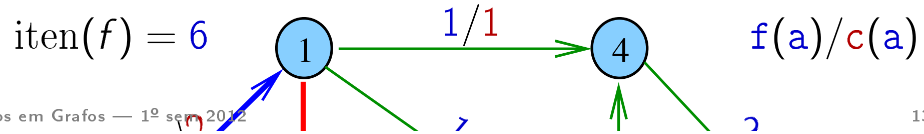


E agora? Fluxo é máximo?



Fluxo é máximo!





Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois vértices s e t em uma rede capacidade com função-capacidade c tem-se que

$$\max\{\mathrm{int}(\mathtt{f}) : \mathtt{f} \text{ é fluxo que respeita } \mathtt{c}\}$$
$$= \min\{\mathtt{c}(\mathtt{S},\mathtt{T}) : (\mathtt{S},\mathtt{T}) \text{ é um corte}\}.$$

Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.

Estrutura de dados para redes de fluxo

S 22.1

Listas de adjacência

Redes serão representadas por **listas de adjacência**.

Cada arco `v-u` será representado por um nó na lista encadeada `adj[v]`.

Além do campo `w`, esse nó terá os campos

- `cap` para armazenar a capacidade do arco `v-u` e
- `flow` para armazenar o valor do fluxo no arco.
- `dup` para armazenar ...

Estrutura node

```
typedef struct node *link;

struct node {
   Vertex w;
   link next;
   int cap;
   int flow;
   link dup;
};
```


Construtor

```
link
NEW (Vertex u, int cap, int flow, link next) {
   link x = malloc(sizeof*x);
   x->w = u;
   x->cap = cap;
   x->flow = flow;
   x->next = next;
   return x;
}
```


Flownet

```
struct flownet {
   int V,A;
   link *adj;
   Vertex s,t;
};

typedef struct flownet *Flownet;
```


Flowinit

```
Flownet FLOWinit (int V) {
   Vertex v;
   Flownet G = malloc(sizeof *G);
   G->adj = malloc(V * sizeof(link));
   G->V = V;
   G->A = 0;
   for (v = 0;v < V;v++) G->adj[v] = NULL;
   return G;
}
```

FLOWinsert

Insere um arco v-u, de capacidade cap e fluxo nulo na rede G.

```
void
FLOWinsertA (Flownet G,Vertex v,Vertex u,int
cap) {
   if (v == u || cap < 0) return;
   G->adj[v] = NEW(u,cap,0,G->adj[v]);
   G->adj[v]->dup = NULL;
   G->A++;
}
```


Redes de fluxo expandidas

É difícil procurar caminhos de aumento numa rede de fluxo porque esses caminhos podem ter arcos inversos.

Para contornar essa dificuldade, vamos introduzir o conceito de **rede de fluxo expandida**.

Para cada arco v-u, acrescente à rede um arco u-v.

Diremos que os novos arcos são **artificiais** e os antigos são **originais**

A capacidade arco artificial u-v será o negativo da capacidade do correspondente arco original v-u.

Redes expandidas

O fluxo em cada arco artificial será o negativo do fluxo no correspondente arco original.
O campo dup nos nós será usado para apontar de um arco original para o correspondente arco artificial e vice-versa.

Para cada o arco artificial teremos

$$\text{cap} \leq \text{flow} \leq 0$$

e para cada o arco original teremos

$$0 \leq \text{flow} \leq \text{cap}$$

Expand

Função que transforma uma rede de fluxo na correspondente rede de fluxo expandida:

```
void Expand (Flownet G) {
Vertex v,u;
int cap, flow;
link po, pa;
for (v = 0;v < G->V; v++)
   for(po=G->adj[v];po!=NULL;po=po->next)
      po->dup = NULL;
```

```
for (v = 0;v < G->V;v++)
   for(po=G->adj[v];po!=NULL;po=po->next)
      if (po->dup== NULL) {
         u = po->w;
         cap = po->cap;
         flow = po->flow;
         G->adj[u] = pa=
            NEW(v,-cap,-flow,G->adj[u]);
         po->dup= pa;
         pa->dup= po;
      }
}
```


flowV

flowV calcula o saldo de fluxo no vértice v de uma rede de fluxo expandida G.

```
int flowV (Flownet G, Vertex v) {
   link p;
   int x = 0;
   for (p = G->adj[v]; p != NULL; p = p->next)
      x += p->flow;
   return x;
}
```

A intensidade do fluxo é flowV(G, G->s).

Rede expandida e capacidades residuais

Um caminho de s a t na rede de fluxo expandida corresponde a um caminho de aumento na rede de fluxo original se

- cap ≥ 0 implica em flow $<$ cap e
- cap < 0 implica em flow < 0

para todo arco do caminho.
A capacidade residual de um arco original da rede expandida é

$$\texttt{cap} - \texttt{flow}$$

e a capacidade residual de um arco artificial é

$$-\texttt{flow}.$$

Algoritmo de fluxo máximo: versão shortest augmenting paths

S 22.2

Camada externa da implementação

Um caminho de aumento pode ser representado por um caminho de capacidade residual positiva na rede expandida.

Para encontrar um tal caminho, podemos usar o algoritmo de busca em largura como modelo.

Na implementação a seguir, o vetor parnt será usado de maneira um pouco diferente: ao percorrer um arco v-u da rede expandida, o código fará

parnt[u] = p,

sendo p o endereço do nó na lista adj[v] para o qual p->w vale u.

O "pai" v de u será então parnt[u]->dup->w.

MaxFlow

Recebe uma rede capacitada (não-expandida) G e calcula um fluxo máximo.

```
void MaxFlow (Flownet G) {
   Vertex s = G->s, t= G->t, x;
   int d;link parnt[maxV];
   Expand(G);
   while (1) {
      d = AugmentingPath(G,parnt);
      if (d == 0) break;
      for(x=t;x!=s;x=parnt[x]->dup->w){
         parnt[x]->flow += d;
         parnt[x]->dup->flow-= d;
      }
}
```


Shortest augmenting paths

Para encontrar um caminho de aumento que tenha número mínimo de arcos, basta aplicar o algoritmo de busca em largura à rede de fluxo expandida.

Esta é uma implementação shortest-augmenting-path da função AugmentingPath.

```
#define ShrtstAugmPath AugmentingPath
```

A macro RC recebe um link p e calcula a capacidade residual do arco da rede de fluxo expandida que vai do vértice p->dup->w ao vértice p->w.

```
#define RC(p) (p->cap >= 0 ? p->cap - p->flow : -p->flow)
```


ShrtstAugmPath

A função ShrtstAugmPath devolve 0 se não há caminho de aumento.

Caso contrário, devolve a capacidade residual d de um caminho de aumento na rede expandida e armazena o caminho no vetor parnt.

A função supõe que todas as capacidades do caminho são menores que M.

```
int ShrtstAugmPath(Flownet G,link parnt[]) {
   Vertex s= G->s,t= G->t,v,u;
   int lbl[maxV],d;link p;
   for (v = 0;v < G->V;v++) lbl[v] = -1;
   QUEUEinit(G->V);
```

```
lbl[s] = 0;
QUEUEput(s);
while (!QUEUEempty()) {
    v = QUEUEget();
    for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next){
        u =p->w;
        if(RC(p)>0 && lbl[u]){
            lbl[u] = 0;
            parnt[u] = p;
            QUEUEput(u);
        }
    }
}
```



```
    if (lbl[t]) return 0;
    d = M;
    for (u = t; u != s; u = p->dup->w){
        p = parnt[u];
        if (d > RC(p)) d = RC(p);
    }
    return d;
}
```


Número de iterações

Edmonds e Karp (1972)

> O número de caminhos de aumento usados pela combinação de MaxFlow com ShrtstAugmPath nunca é maior que VA/2, sendo V o número de vértices e A o número de arcos originais.

Consumo de tempo

> O consumo de tempo de MaxFlow com ShrtstAugmPath é O(VA(V + A)), sendo V o número de vértices e A o número de arcos originais.