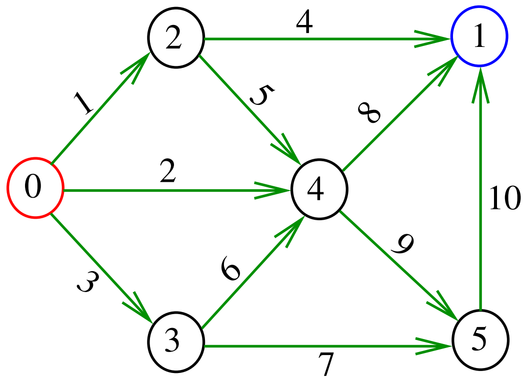
Saldos

O **saldo** em `v` é a diferença

$$\texttt{ef}(\texttt{v}) - \texttt{inf}(\texttt{v})$$

entre o efluxo de `v` e o influxo em `v`.

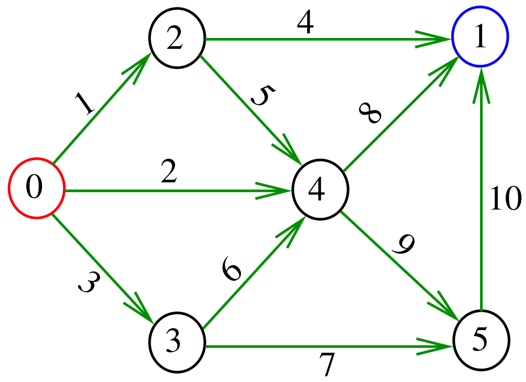
Exemplo: o saldo do vértice 4 é 17-13=4



Fluxos

Num digrafo com vértice inicial `s` e vértice final `t`, um **fluxo** (= *flow*) é uma função `f` que atribui valores em $\mathbb{Z}_{\geq}$ aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de `s` e `t` é nulo e em `s` é ≥ 0.

Exemplo: não é um fluxo

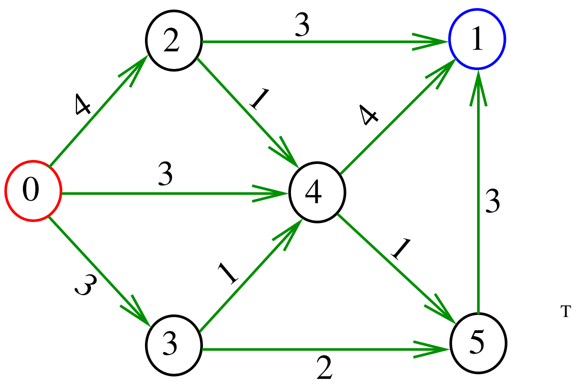


Exemplo: é um fluxo onde `s`=0 e `t`=1

Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo `f` é o saldo de `f` em `s`.
Em geral (mas nem sempre) o influxo em `s` é nulo e o efluxo de `t` é nulo.

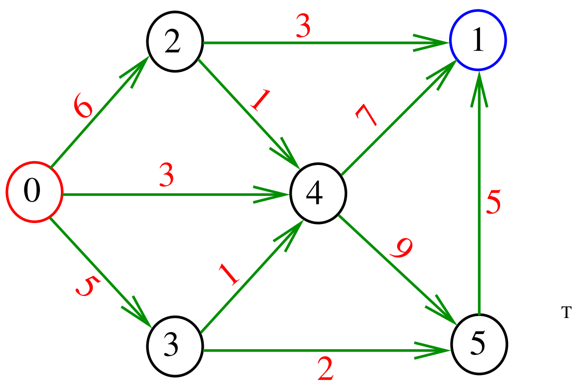
Exemplo: fluxo de intensidade 10



Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com vértice inicial e vértice final em que a cada um arcos está associado um número em $\mathbb{Z}_{\geq}$ que chamaremos **capacidade do arco**.

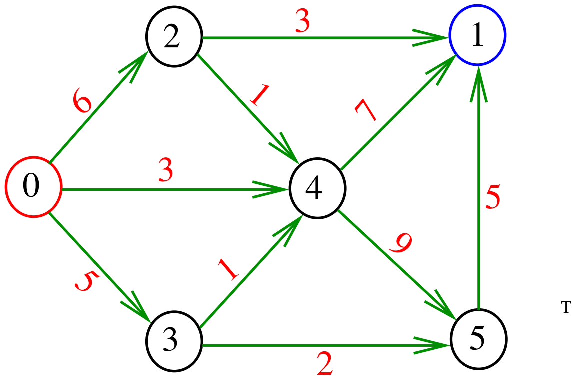
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: rede capacitada

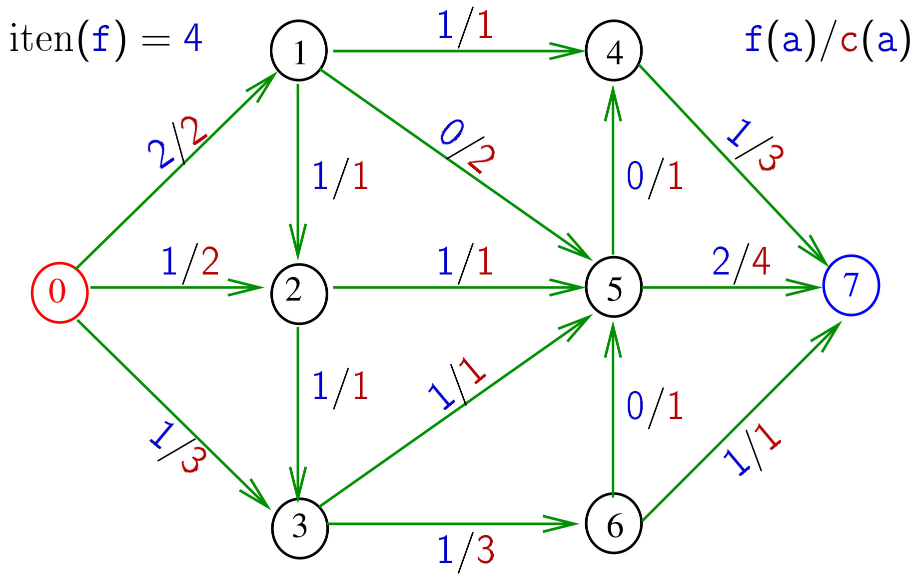


Exemplo: fluxo que respeita as capacidades

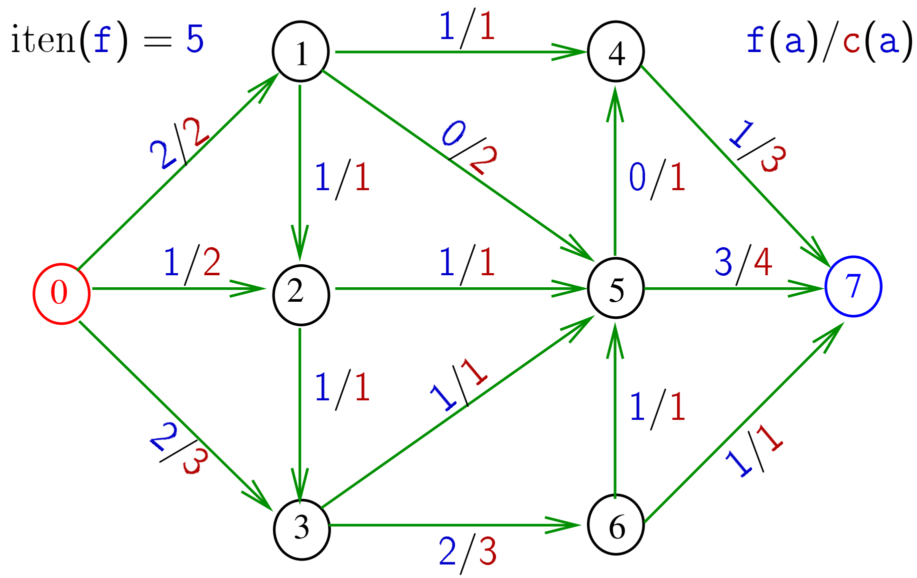
Método dos caminhos de aumento

S 22.2

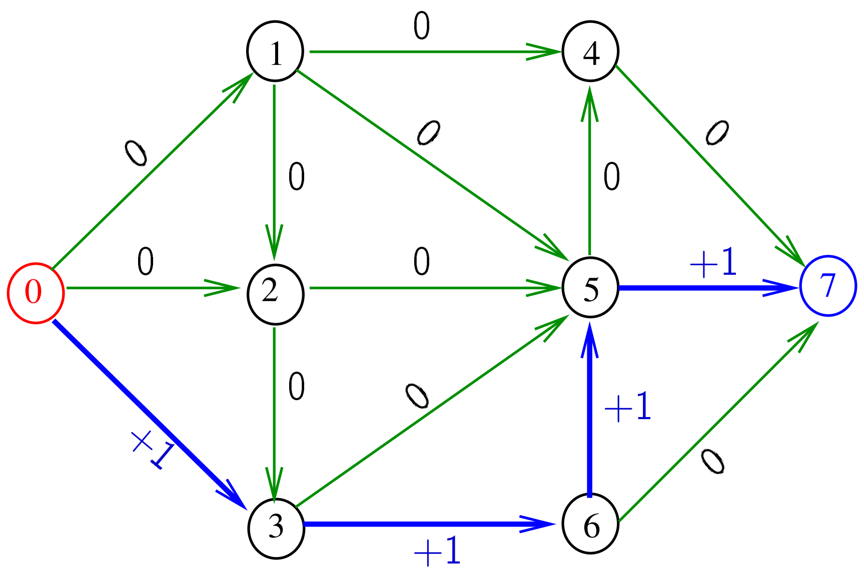
Fluxo é máximo?



E agora? Fluxo é máximo?



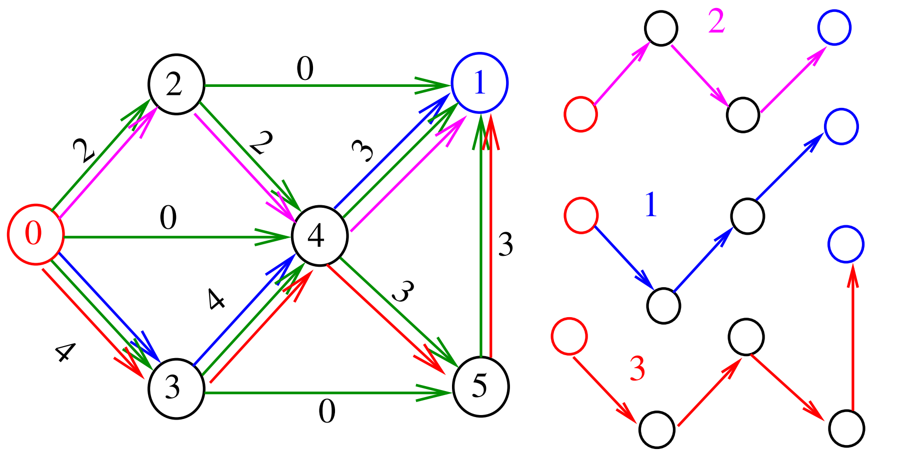
Onde mudou?



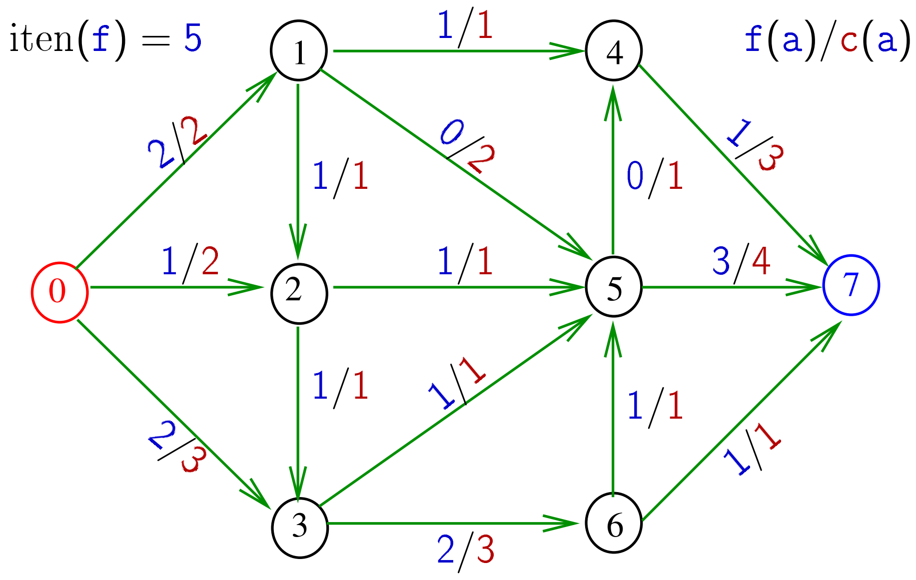
Decomposição de fluxos

Fluxos podem ser representados por caminhos de s a t. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

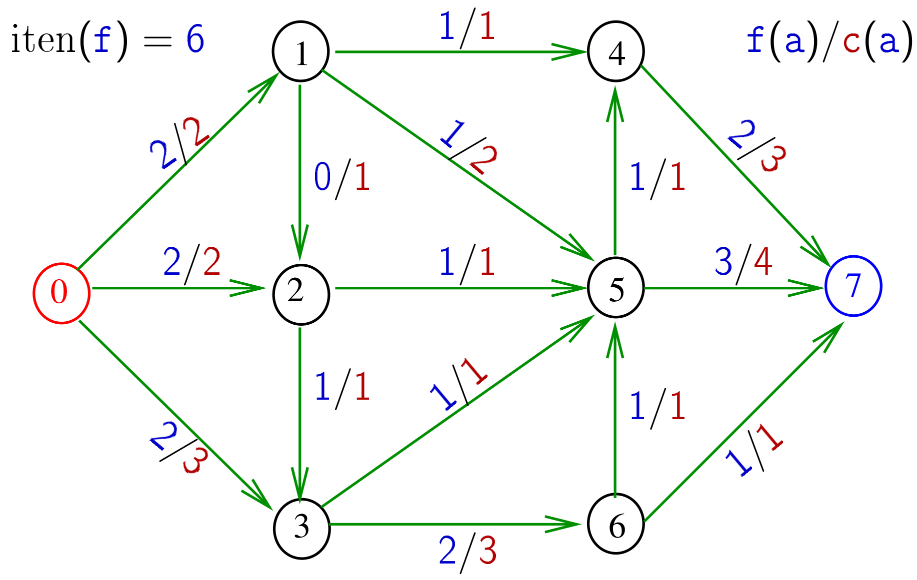
Exemplo:



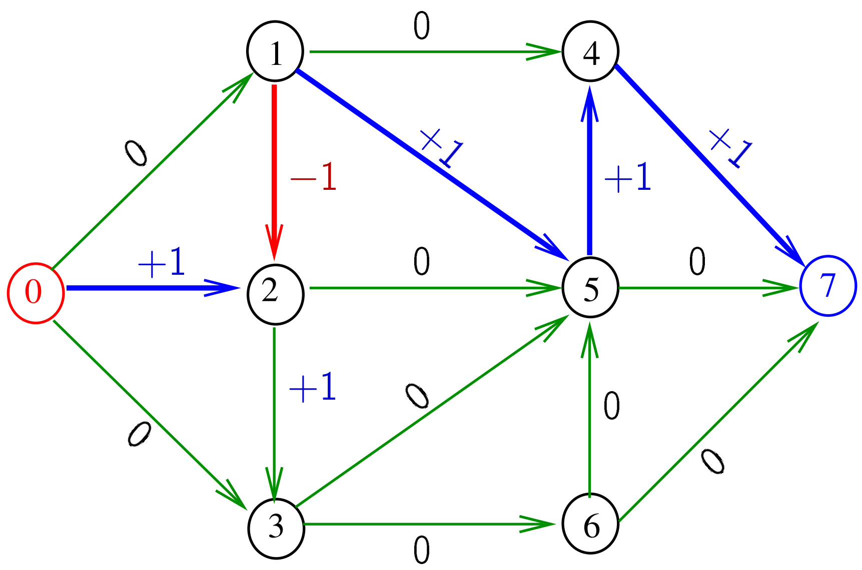
Fluxo é máximo?



E agora? Fluxo é máximo?



Onde mudou?

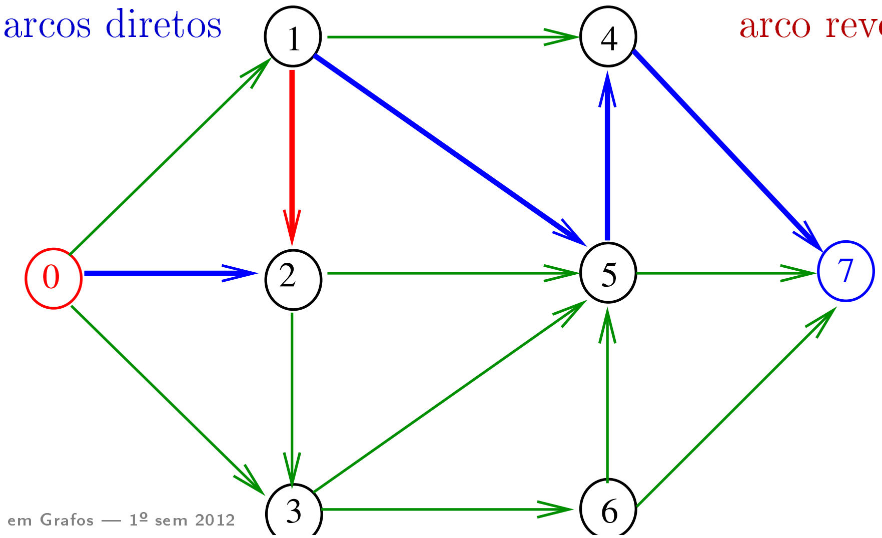


Pseudo-caminhos

Um **pseudo-caminho** num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, u-v ou v-u é um arco do digrafo.

arcos diretos

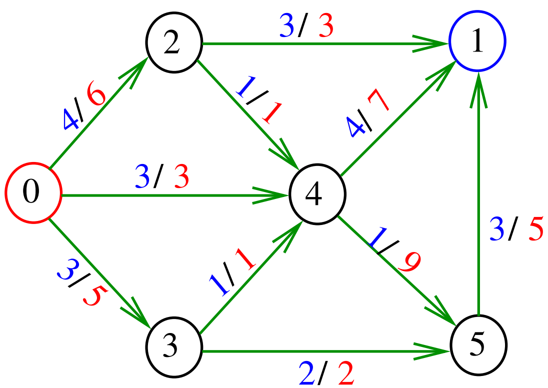
arco reverso



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco u-v está **cheio** se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco u-v está **vazio** se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio

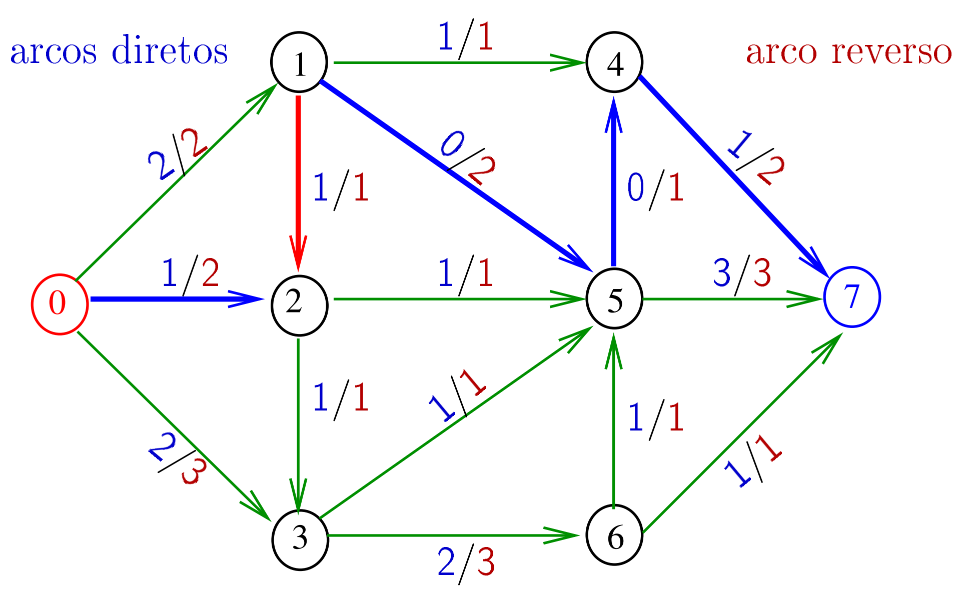


Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e
- os arcos reversos não estão vazios.

Exemplo

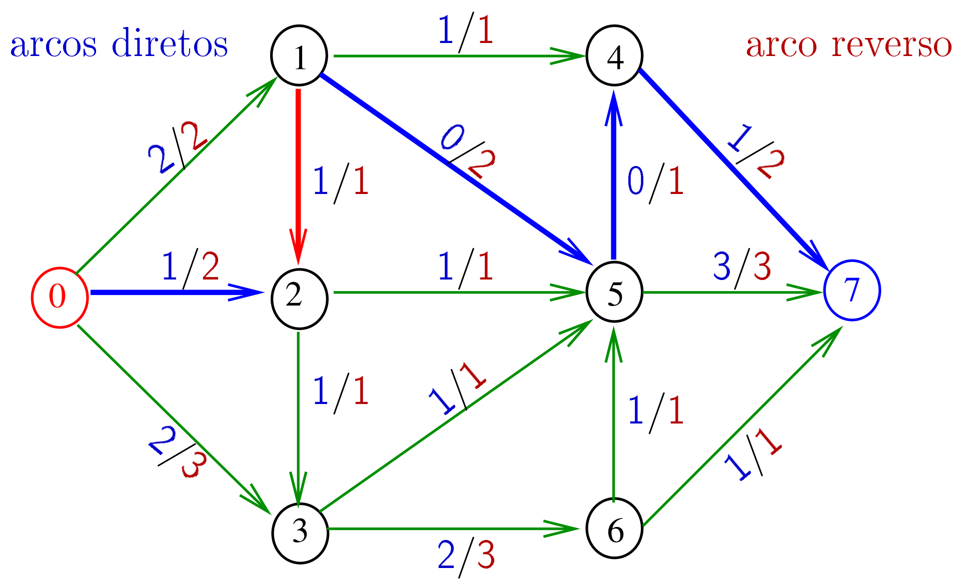


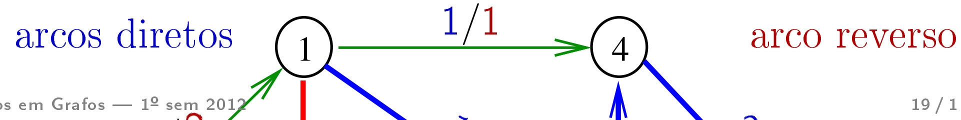
Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de **enviar** `d` unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- para cada arco direto, some `d` ao fluxo
- para cada arco reverso, subtraia `d` do fluxo.

Exemplo





Capacidade residual

A **capacidade residual** de um arco direto `a` é

$$c(a) - f(a).$$

A **capacidade residual** de um arco reverso `b` é

$$f(b).$$

A **capacidade residual de um caminho de aumento** é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco reverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e
- arco direto 4-7 é 1.

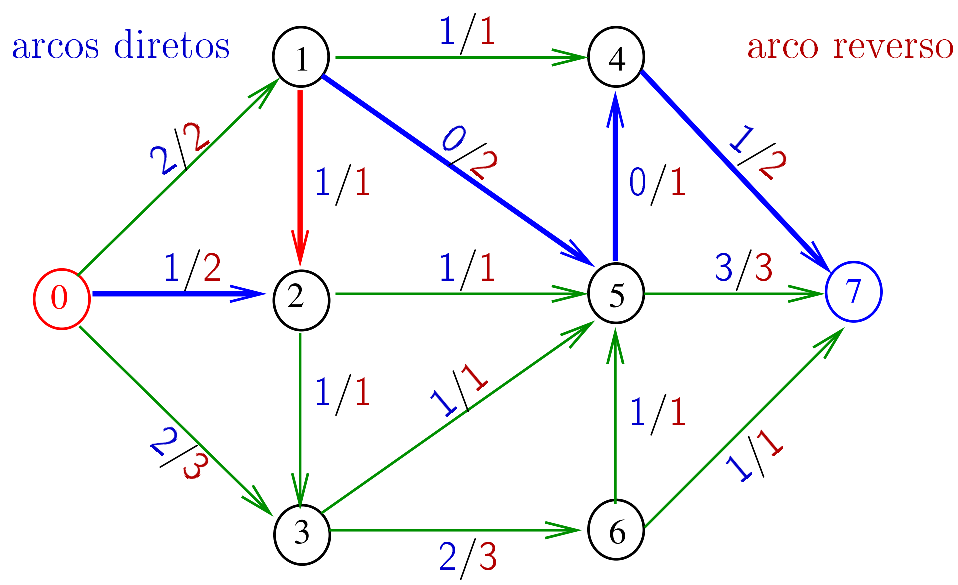
Grafo residual

Dada uma rede capacitada G e um fluxo f, o **digrafo residual** tem os mesmos vértices que G e arcos

- a de G tais que $c(a) - f(a) > 0$
- reversos de arcos a de G tais que $f(a) > 0$

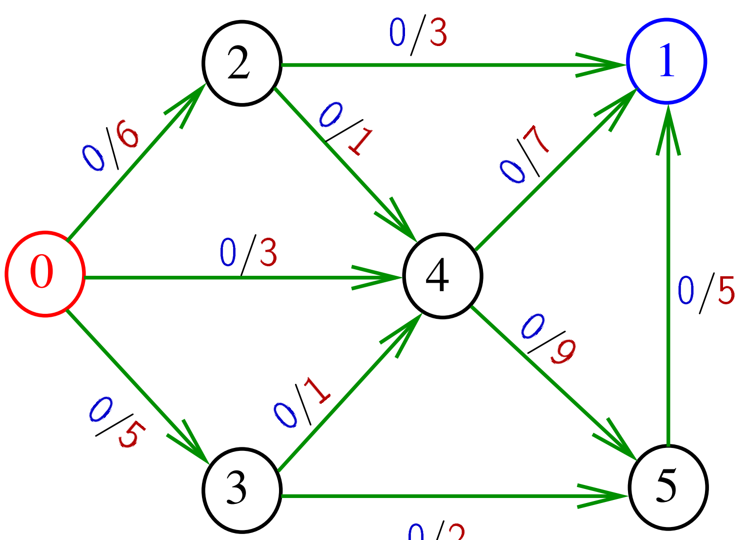
Existe caminho de aumento em G para f se e só se existe caminho de s a t no digrafo residual correspondente.

Exemplo



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$ $f(a)/c(a)$



$\text{int}(f) = 0$ $f(a)/c(a)$

Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento
Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P
Seja f' o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P
Comece nova iteração com f' no papel de f

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

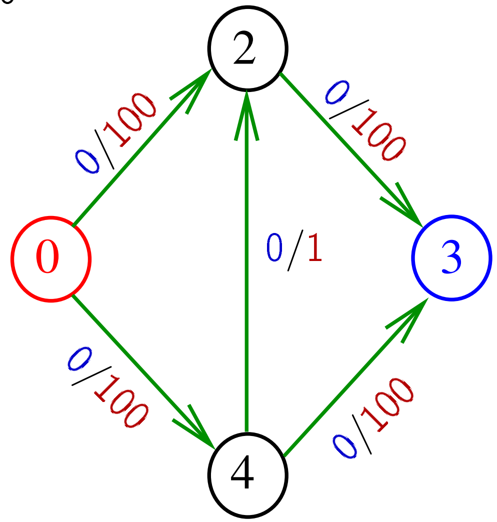
(i0) f é inteiro;

(i1) f é um fluxo;

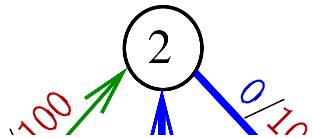
(i2) f respeita c.

Número de iterações

$\text{int}(f) = 0$ f(a)/c(a)

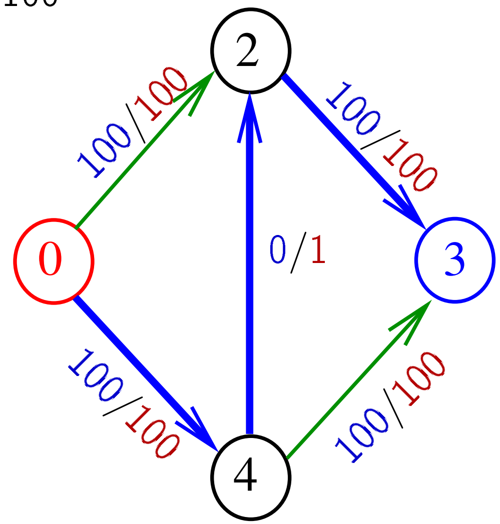


$\text{int}(f) = 0$ f(a)/c(a)



Fluxo máximo

$\text{int}(f) = 100$ f(a)/c(a)



Conclusão

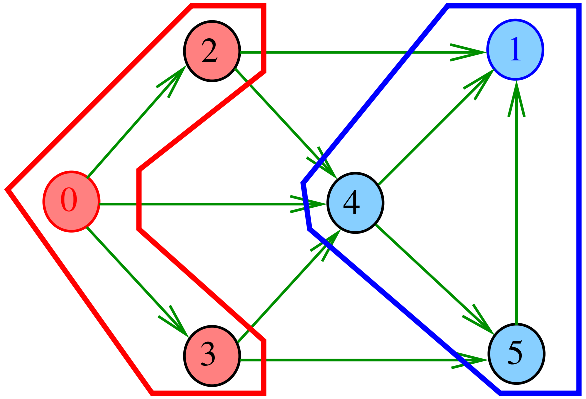
Se todos os arcos da rede têm capacidade menor que M então o número de caminhos de aumento necessário para atingir o fluxo máximo é menor que $V \times M$, sendo V o número de vértices da rede.

Cortes

Um **corte** (= s*t-cut*) é qualquer partição (S, T) do conjunto de vértices tal que

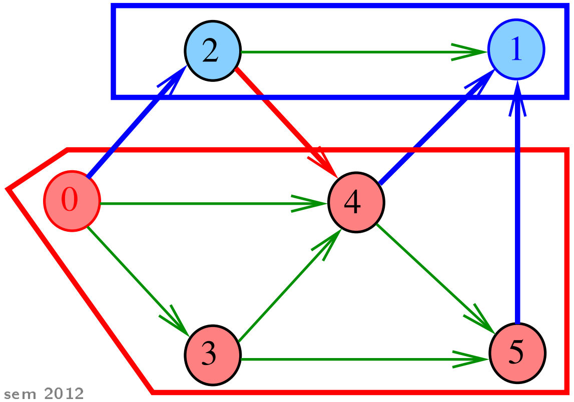
s está em S e t está em T.

Exemplo:



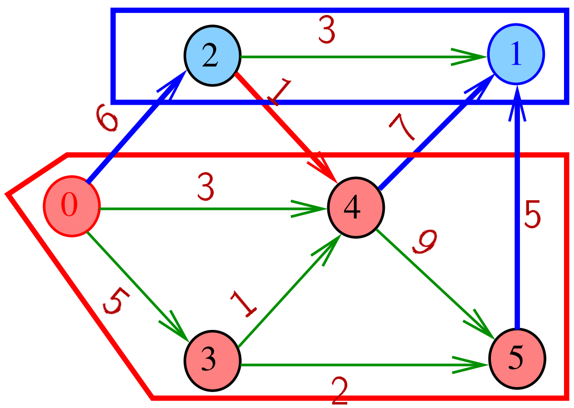
Arcos diretos e arcos reversos

Um **arco direto** de um corte (S,T) é qualquer arco que vai de S para T.
Um **arco reverso** do corte é qualquer arco que vai de T para S.
Exemplo: arcos azuis são diretos e vermelho é reverso



Capacidade de um corte

Numa rede capacitada, a capacidade de um corte (S,T) é a soma das capacidades dos arcos diretos do corte.
Exemplo: corte de capacidade 18

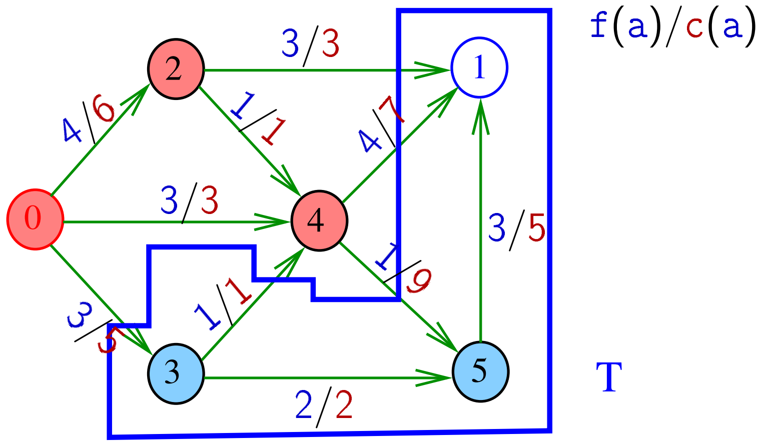


Lema da dualidade

Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte então

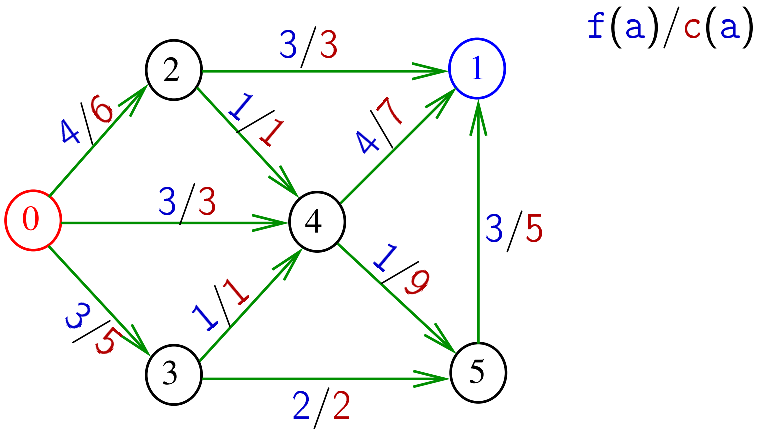
intensidade de $f \leq$ *capacidade de* (S, T).

Exemplo: $\mathrm{int}(f) = 10 \leq 24 = c(S, T)$.

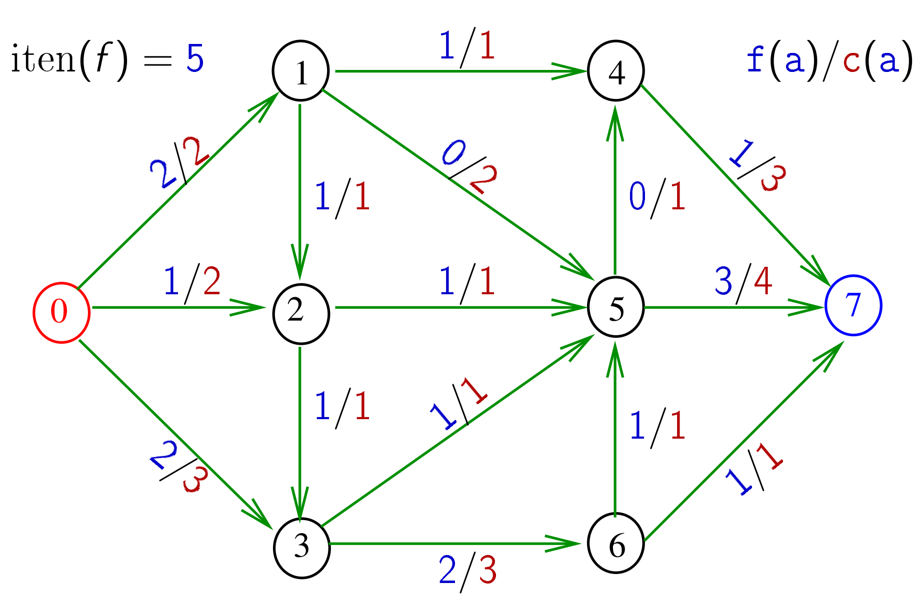


Conseqüência

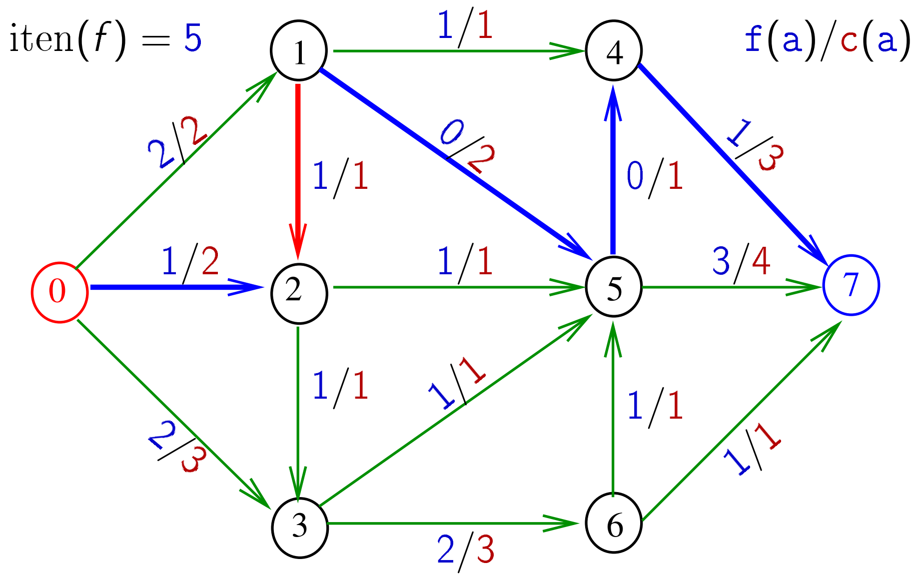
Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de f = capacidade de (S,T). então f é um fluxo de máximo e (S, T) é um corte de capacidade mínima.



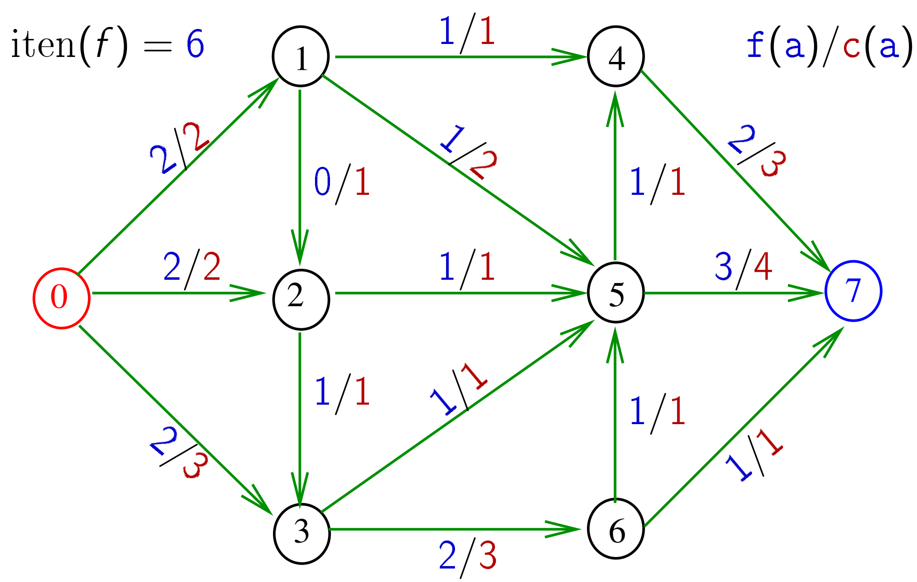
Fluxo é máximo?



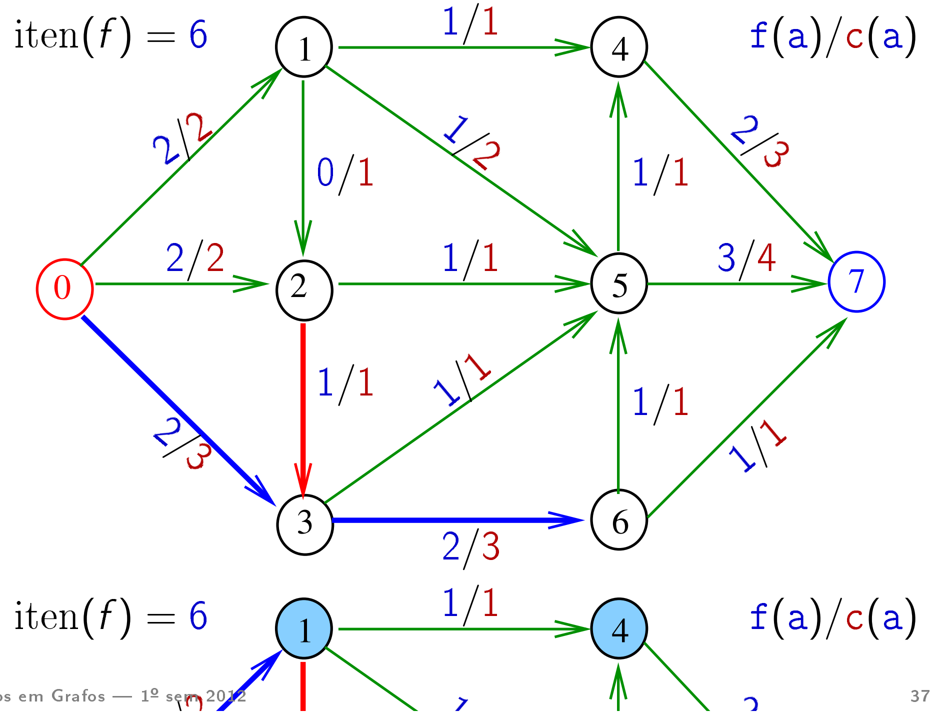
Caminho de aumento



E agora? Fluxo é máximo?



Fluxo é máximo!



Correção do método

Para mostrar que a correção do método dos caminhos de aumento basta mostrar que:

> *se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.*

Seja S o conjunto de todos os vértices que são término de um "caminho de aumento".
Seja T o conjunto dos demais vértices do digrafo.

É claro que s está em S e t está em T. Portanto, (S,T) é um corte.

Todos os arcos diretos desse corte estão cheios
Todos os arcos reversos estão vazios.

Portanto, o fluxo através desse corte é igual à capacidade do corte.

Logo, pelo lema da dualidade, nosso fluxo tem intensidade máxima.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

> Para quaisquer dois vértices s e t em uma rede capacidade com função-capacidade c tem-se que
>
> $$\max\{\text{int}(f) : f \text{ é fluxo que respeita } c\}$$
> $$= \min\{c(S,T) : (S,T) \text{ é um corte}\}.$$

> Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.