

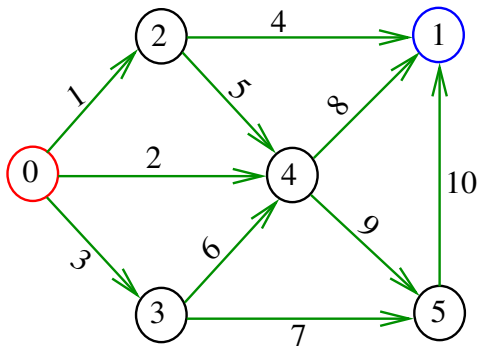
Saldos

O **saldo** em v é a diferença

$$ef(v) - inf(v)$$

entre o efluxo de v e o influxo em v .

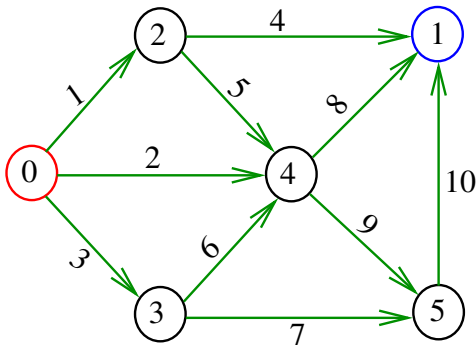
Exemplo: o saldo do vértice 4 é $17-13=4$



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **fluxo** (= *flow*) é uma função f que atribui valores em \mathbb{Z}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

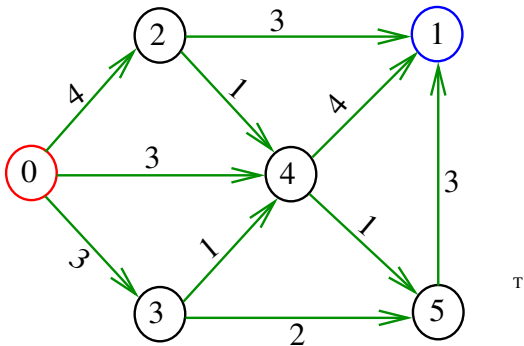
Exemplo: não é um fluxo



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **fluxo** (= *flow*) é uma função f que atribui valores em \mathbb{Z}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

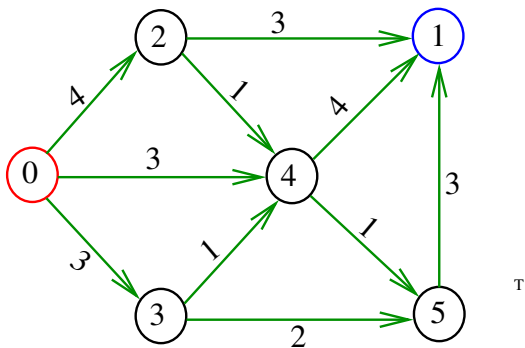
Exemplo: é um fluxo onde $s=0$ e $t=1$



Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo f é o saldo de f em s .
Em geral (mas nem sempre) o influxo em s é nulo e o efluxo de t é nulo.

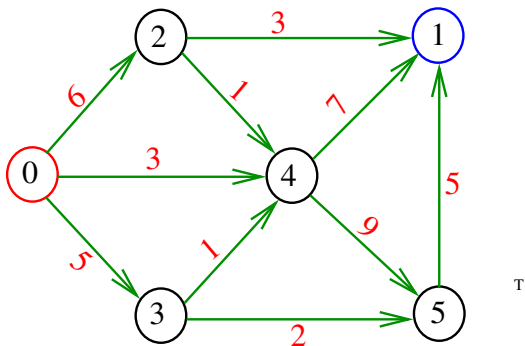
Exemplo: fluxo de intensidade 10



Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com **vértice inicial** e **vértice final** em que a cada um arcos está associado um número em \mathbb{Z}_{\geq} que chamaremos **capacidade do arco**.

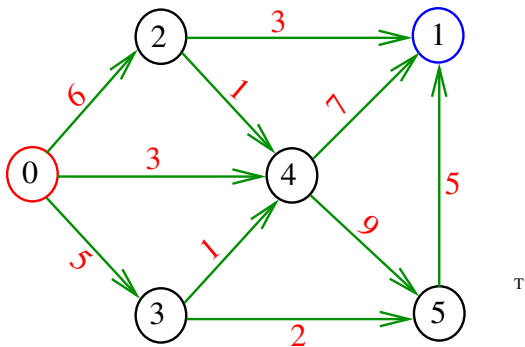
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

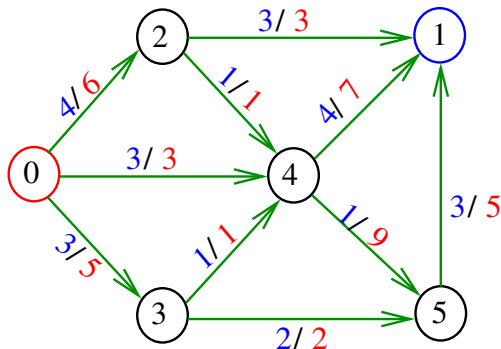
Exemplo: rede capacitada



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: fluxo que respeita as capacidades

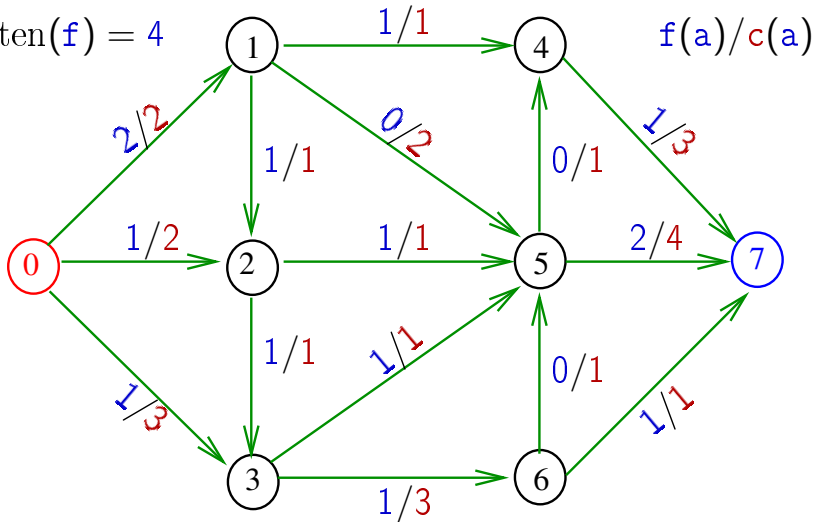


Método dos caminhos de aumento

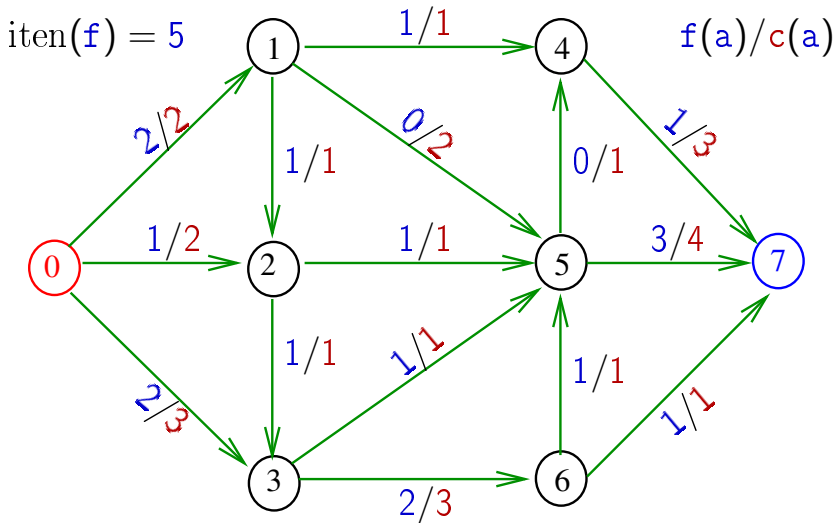
S 22.2

Fluxo é máximo?

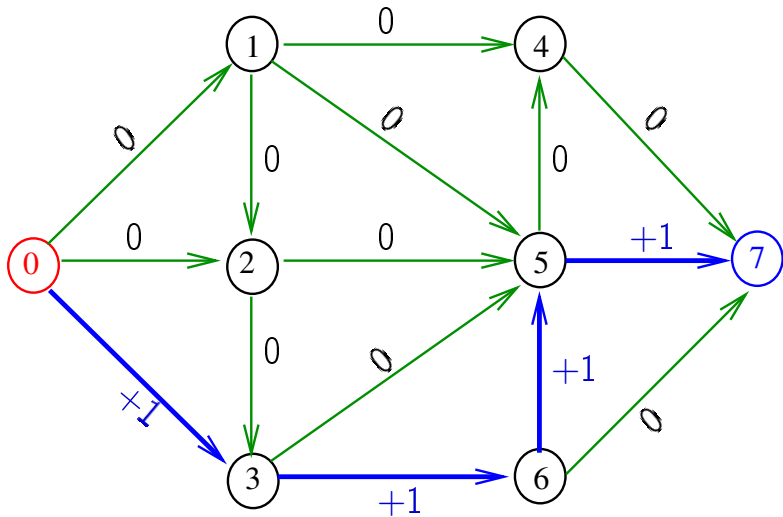
iten(f) = 4



E agora? Fluxo é máximo?



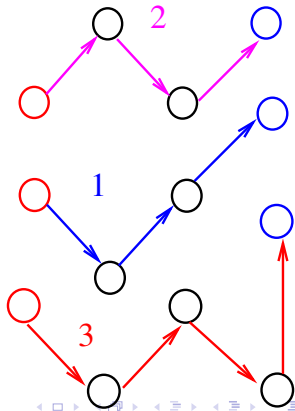
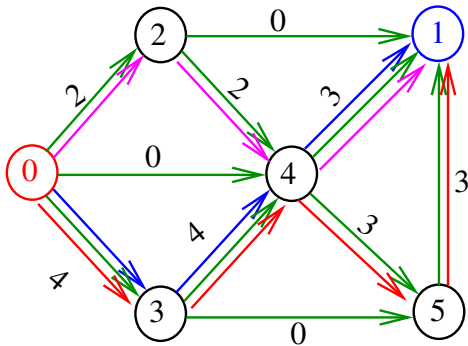
Onde mudou?



Decomposição de fluxos

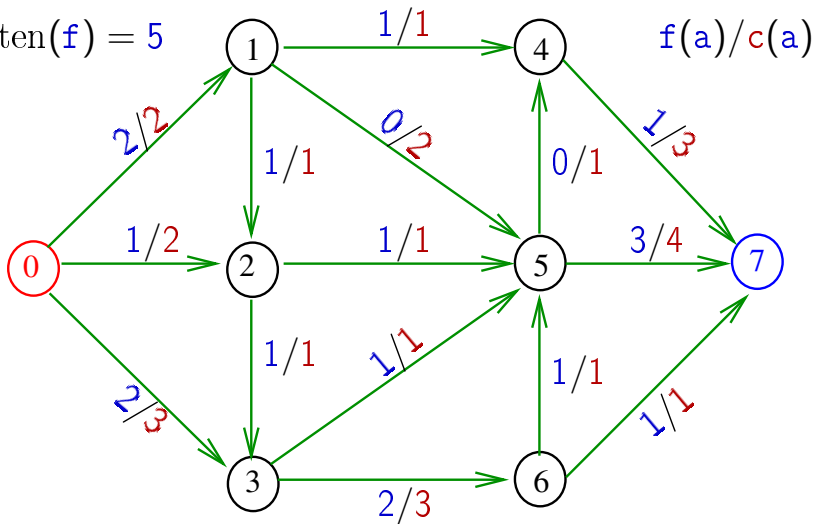
Fluxos podem ser representados por caminhos de s a t . A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

Exemplo:

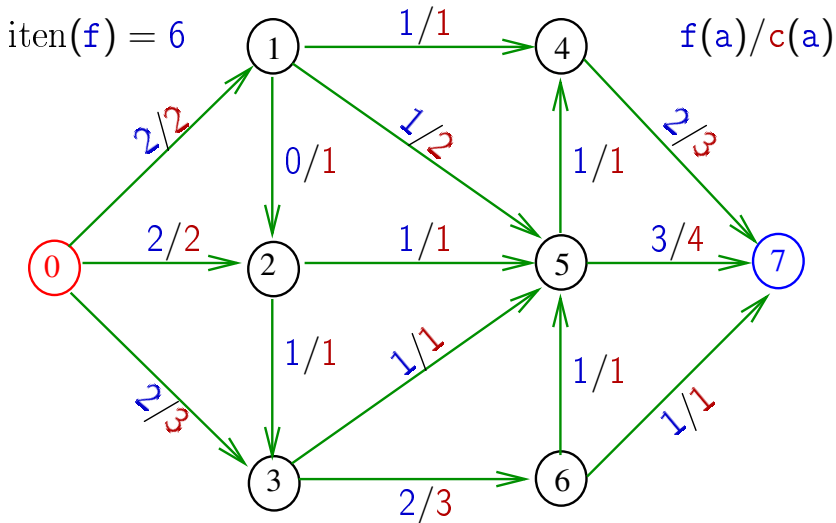


Fluxo é máximo?

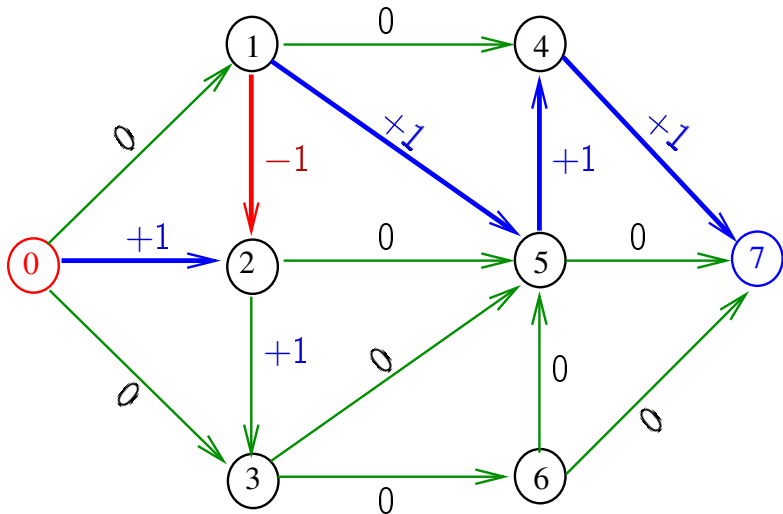
iten(f) = 5



E agora? Fluxo é máximo?

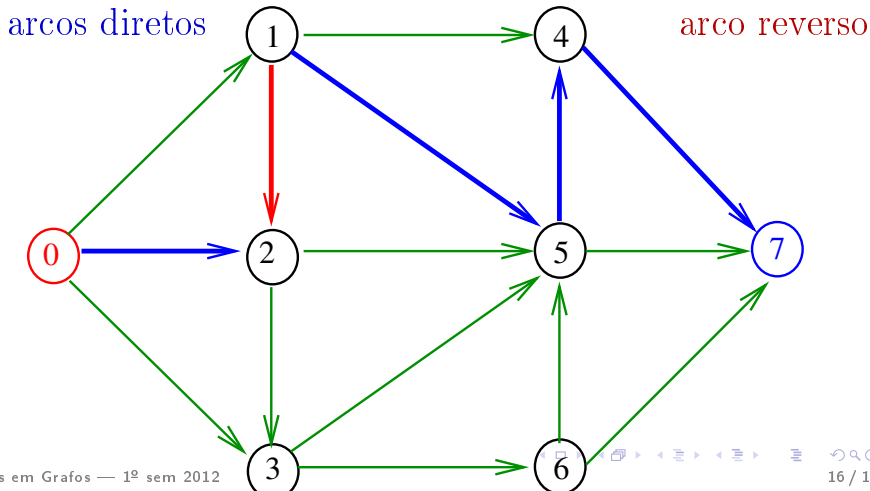


Onde mudou?



Pseudo-caminhos

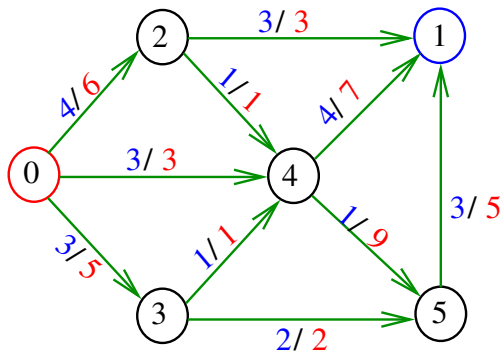
Um **pseudo-caminho** num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, $u-v$ ou $v-u$ é um arco do digrafo.



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco $u-v$ está **cheio** se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco $u-v$ está **vazio** se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio

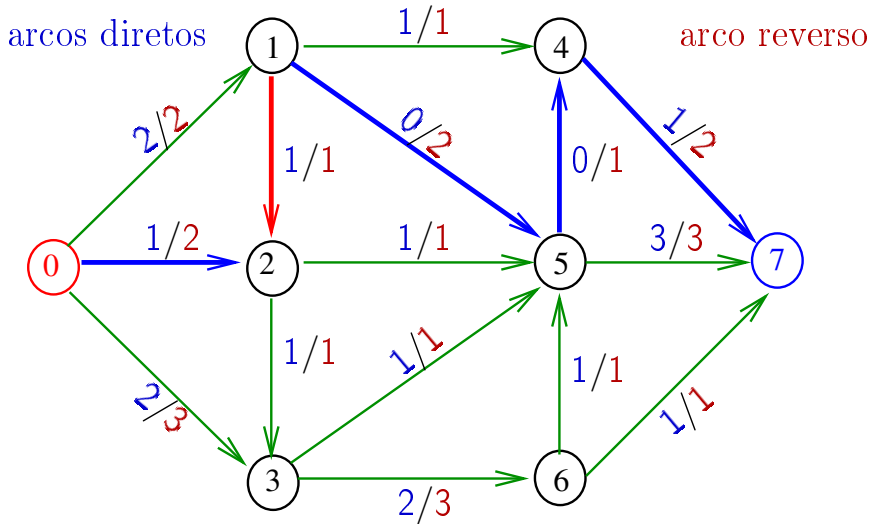


Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os **arcos diretos** não estão cheios e
- os **arcos reversos** não estão vazios.

Exemplo

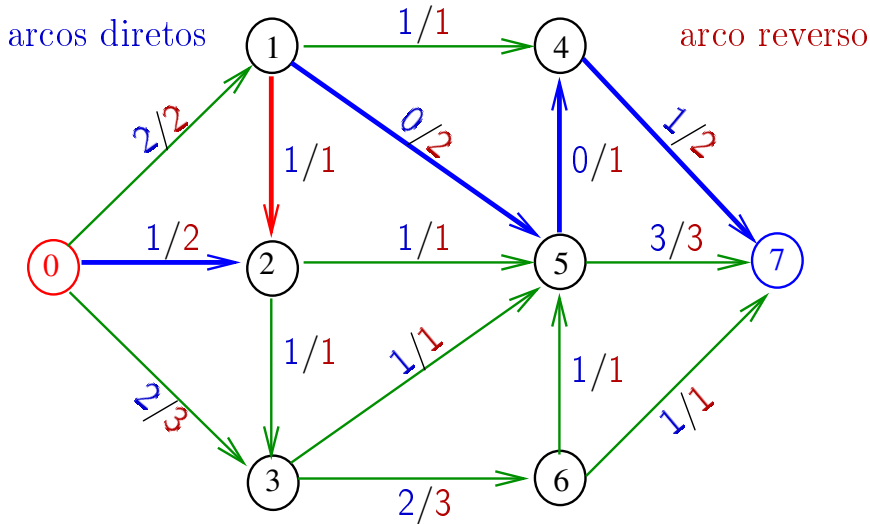


Enviar fluxo através de caminhos de aumento

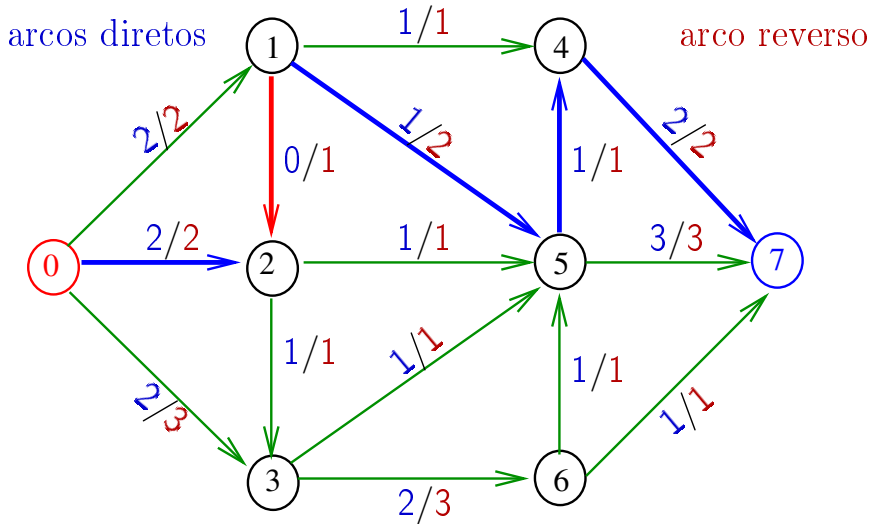
A operação de **enviar** d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- para cada **arco direto**, some d ao fluxo
- para cada **arco reverso**, subtraia d do fluxo.

Exemplo



Exemplo



Capacidade residual

A **capacidade residual** de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A **capacidade residual** de um arco reverso b é

$$f(b).$$

A **capacidade residual de um caminho de aumento** é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco reverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e
- arco direto 4-7 é 1.

Grafo residual

Dada uma rede capacitada G e um fluxo f , o **digrafo residual** tem os mesmos vértices que G e arcos

- a de G tais que $c(a) - f(a) > 0$
- reversos de arcos a de G tais que $f(a) > 0$

Existe caminho de aumento em G para f se e só se existe caminho de s a t no digrafo residual correspondente.

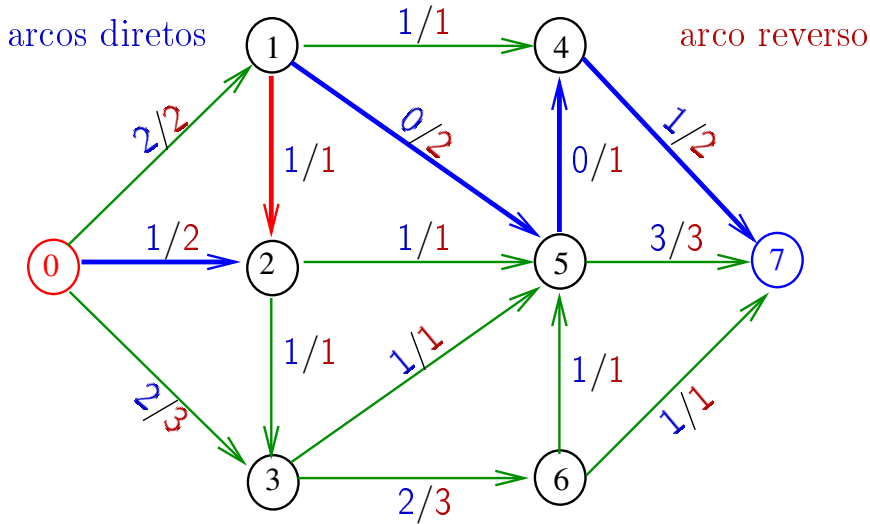
Grafo residual

Dada uma rede capacitada G e um fluxo f , o **digrafo residual** tem os mesmos vértices que G e arcos

- a de G tais que $c(a) - f(a) > 0$
- reversos de arcos a de G tais que $f(a) > 0$

Existe caminho de aumento em G para f se e só se existe caminho de s a t no digrafo residual correspondente.

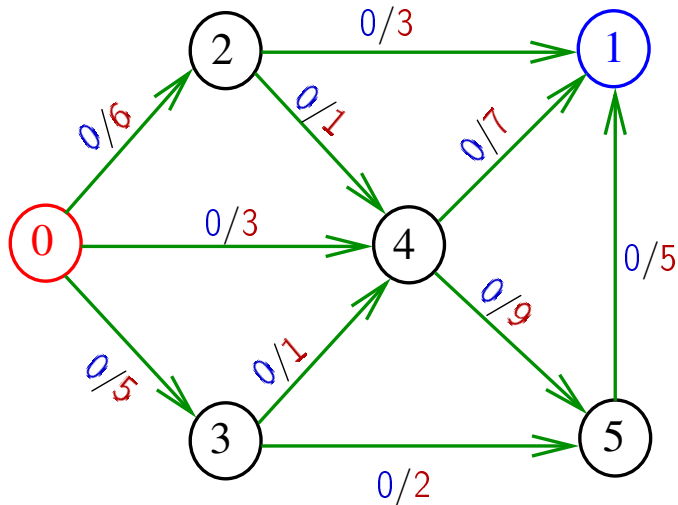
Exemplo



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$

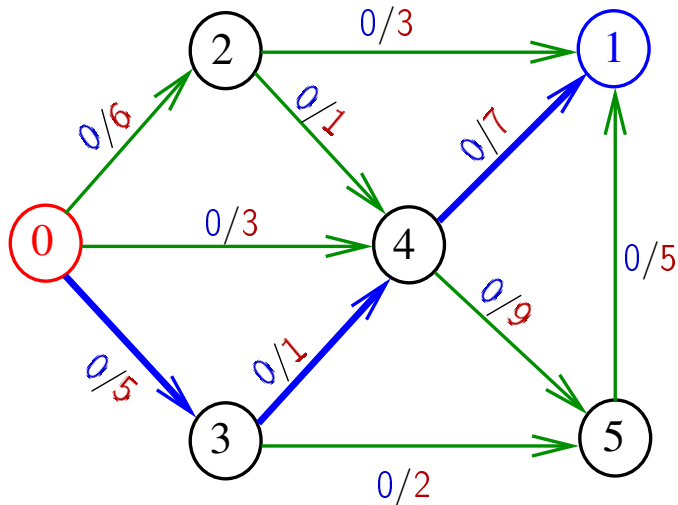
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$

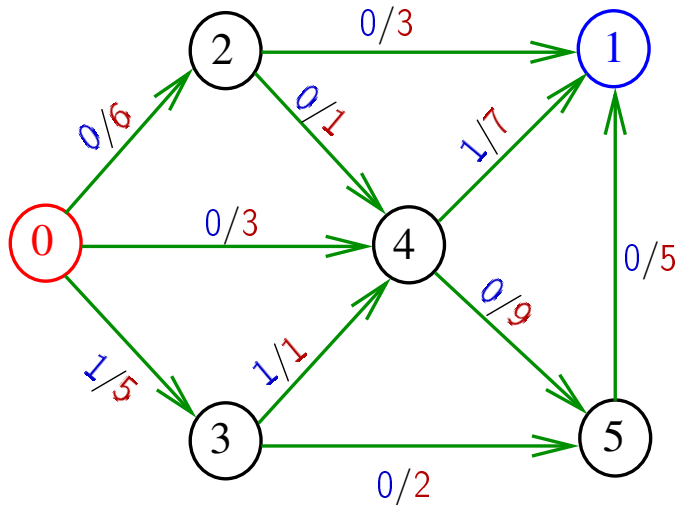
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 1$

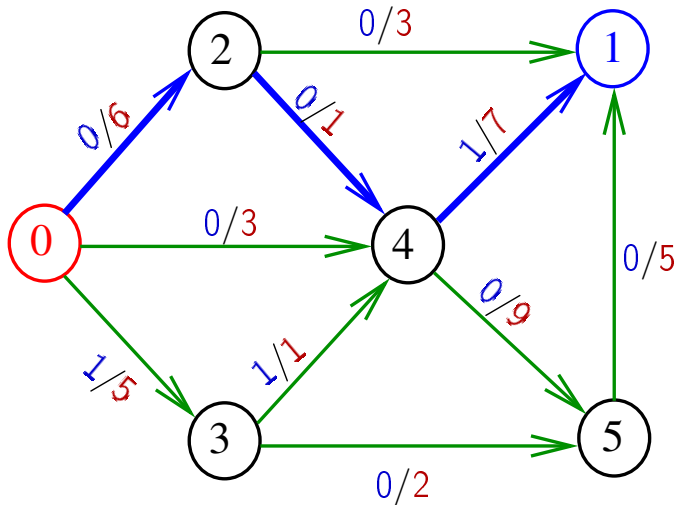
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 1$$

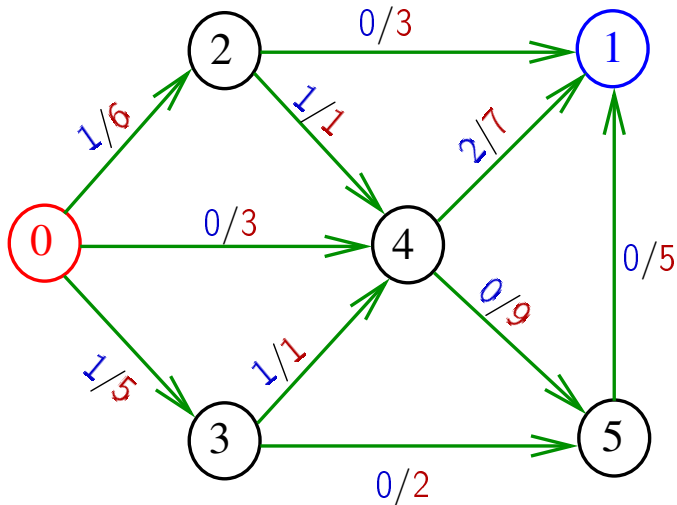
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 2$$

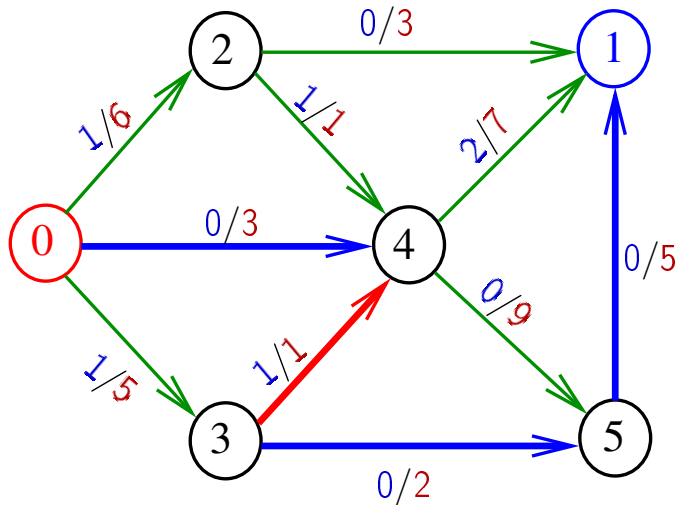
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 2$$

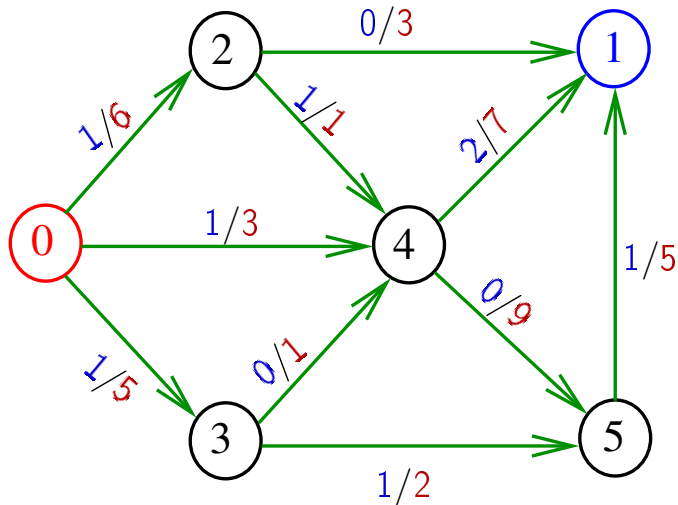
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 3$

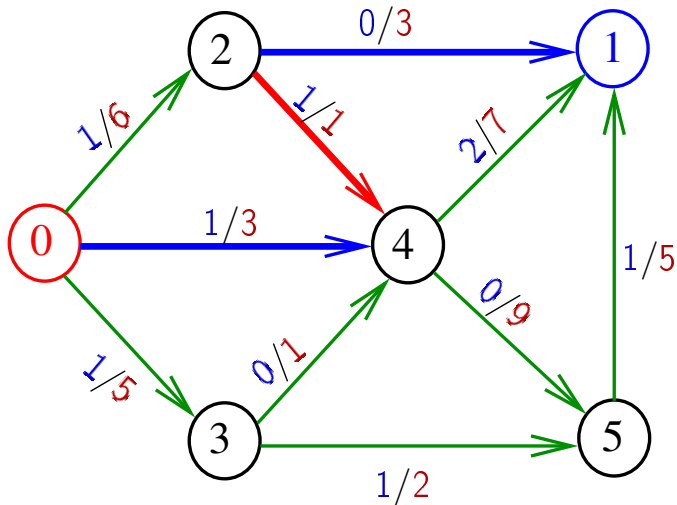
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 3$

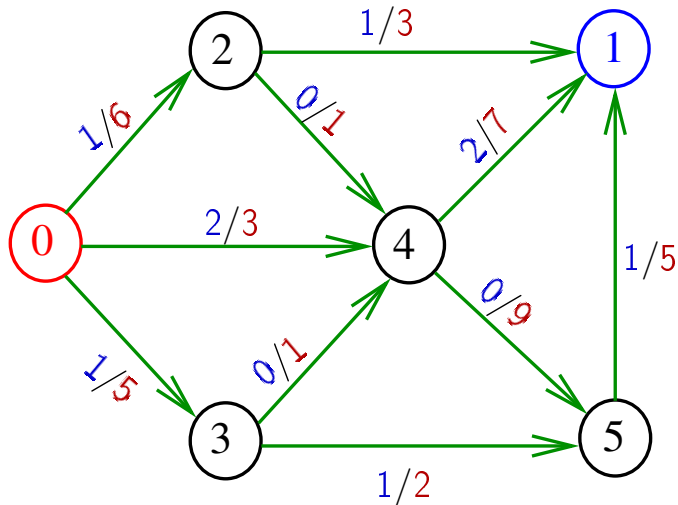
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 4$$

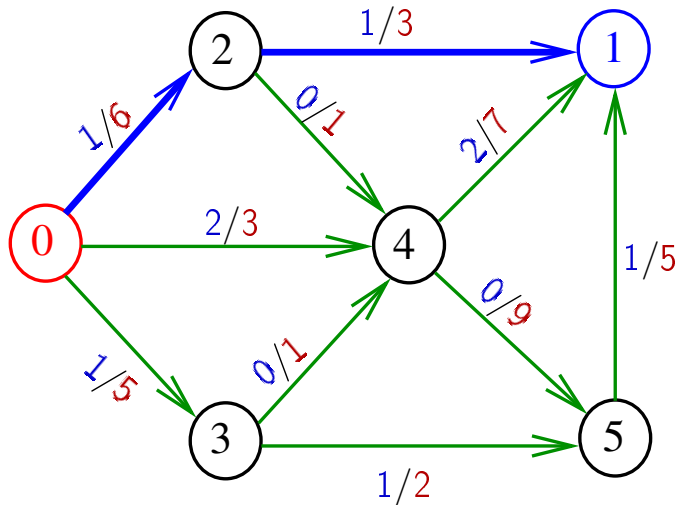
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 4$

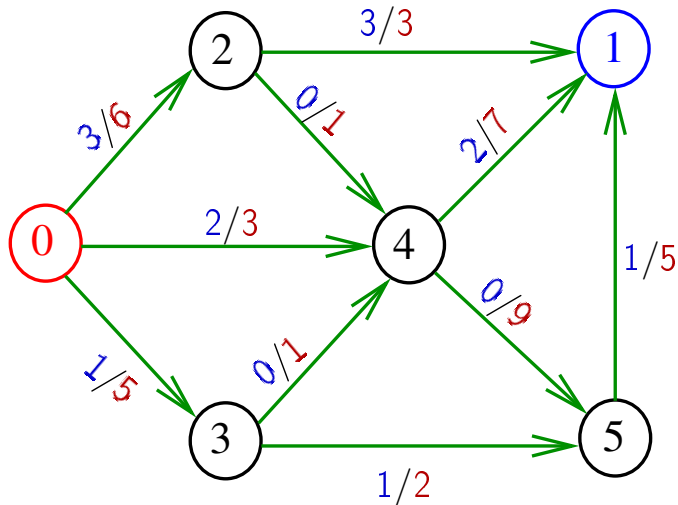
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 6$$

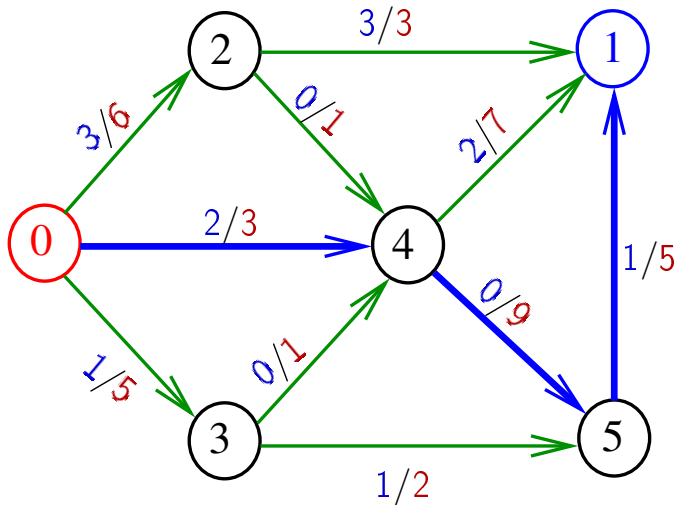
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 6$

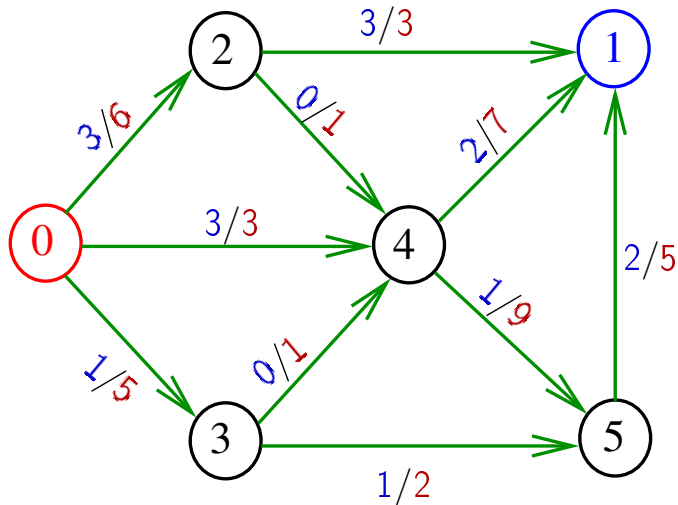
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 7$$

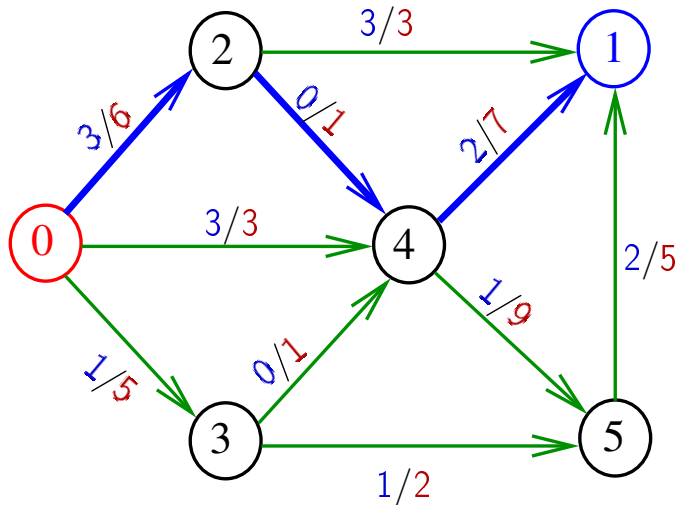
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 7$

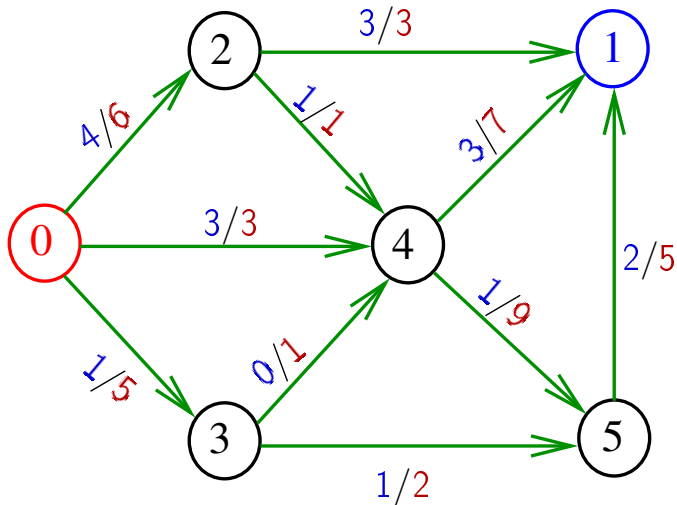
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$$\text{int}(f) = 8$$

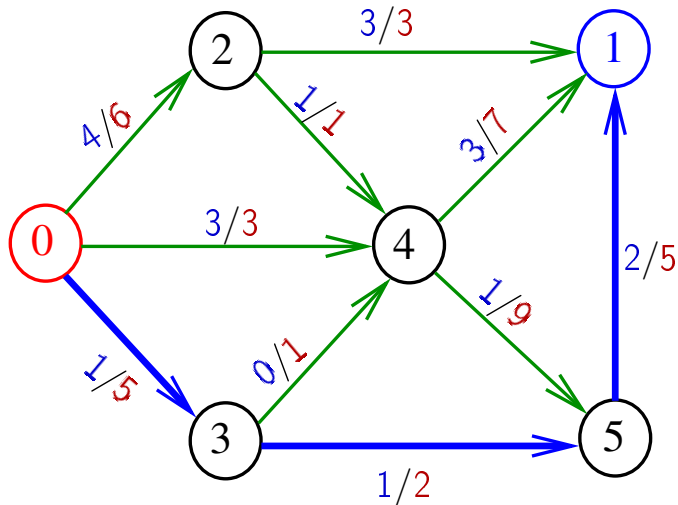
$$f(a)/c(a)$$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 8$

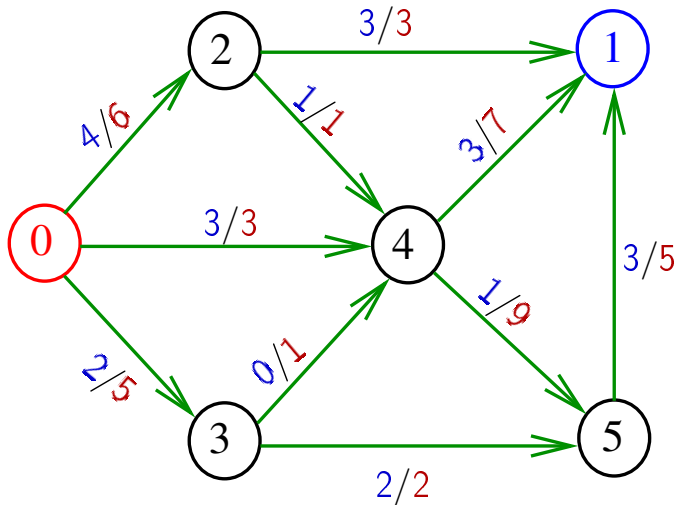
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 9$

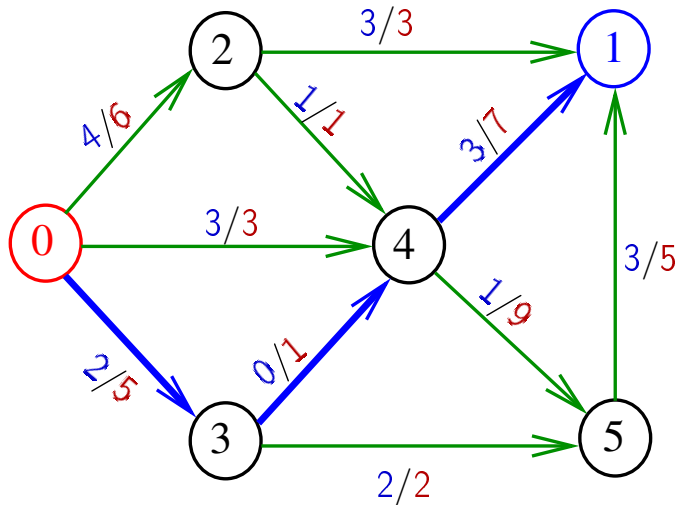
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 9$

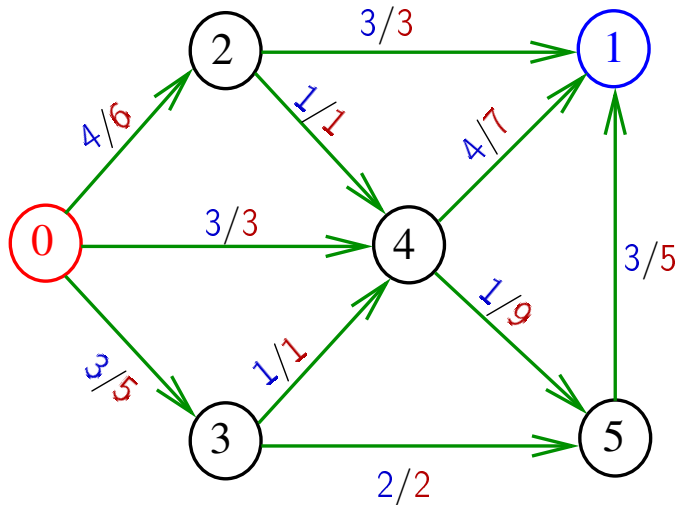
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 10$

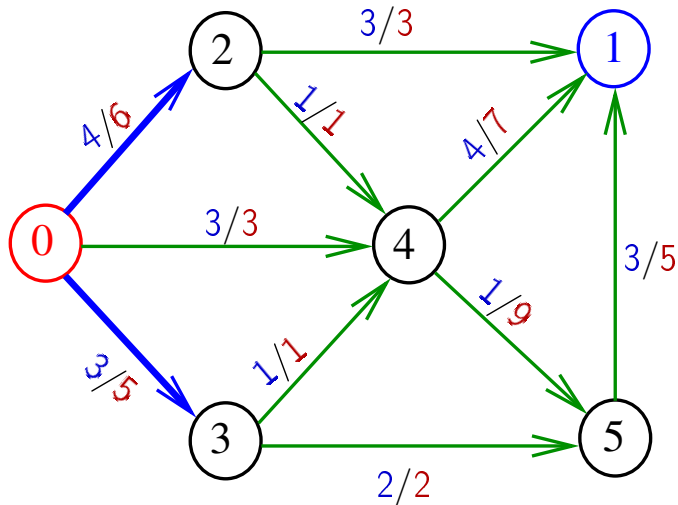
$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 10$

$f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento
Seja d a capacidade residual de um
caminho de aumento P
Seja f' o fluxo obtido ao enviarmos d
unidades de fluxo ao longo de P
Comece nova iteração com f' no papel

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

(i0) f é inteiro;

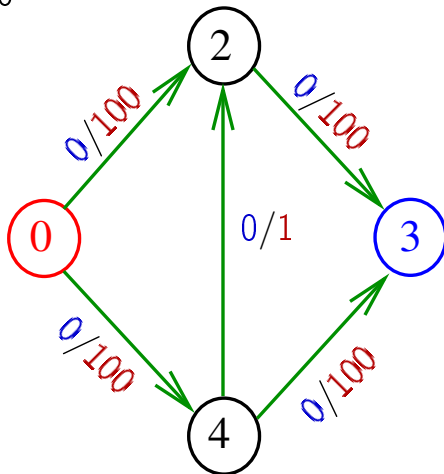
(i1) f é um fluxo;

(i2) f respeita c .

Número de iterações

$$\text{int}(f) = 0$$

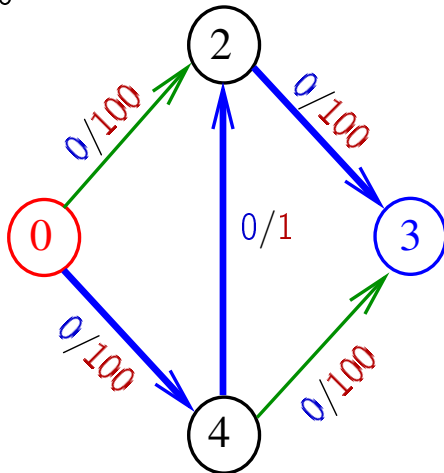
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 0$$

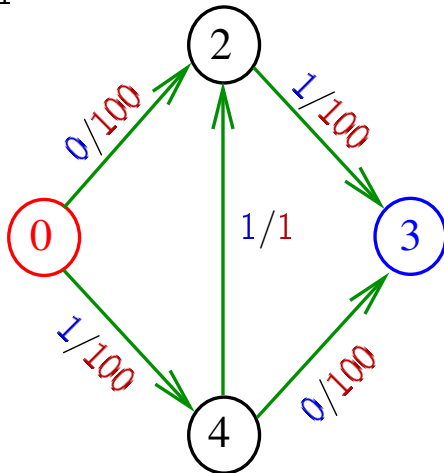
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 1$$

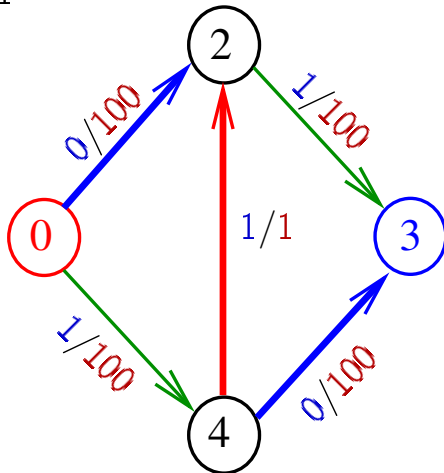
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 1$$

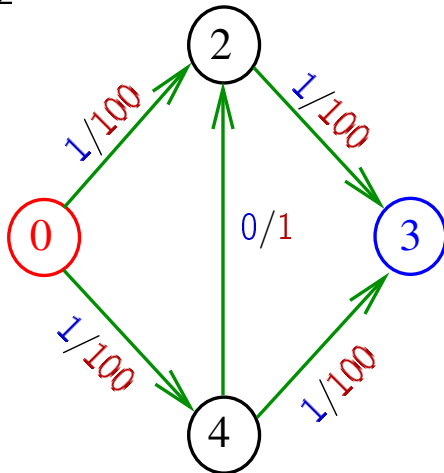
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 2$$

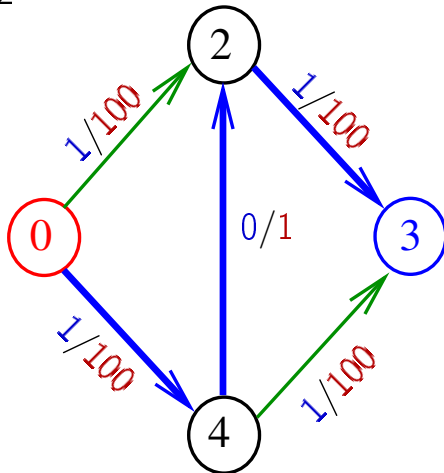
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 2$$

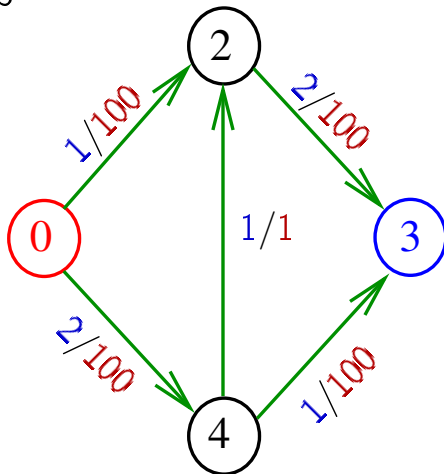
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 3$$

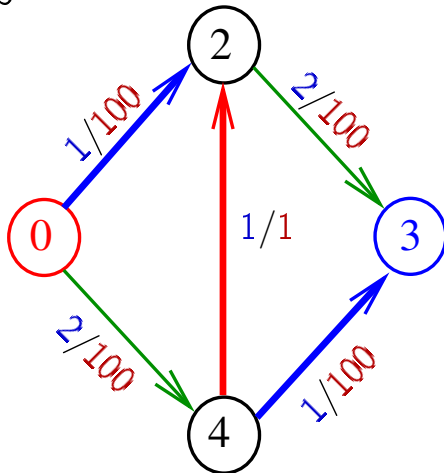
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 3$$

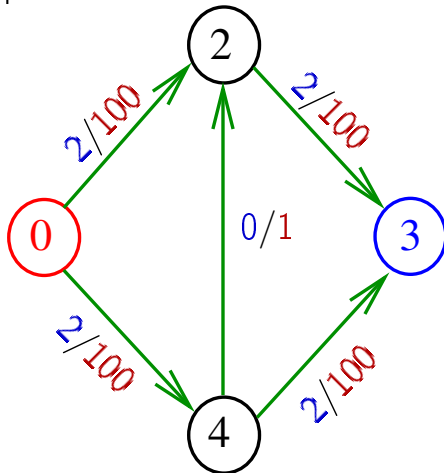
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 4$$

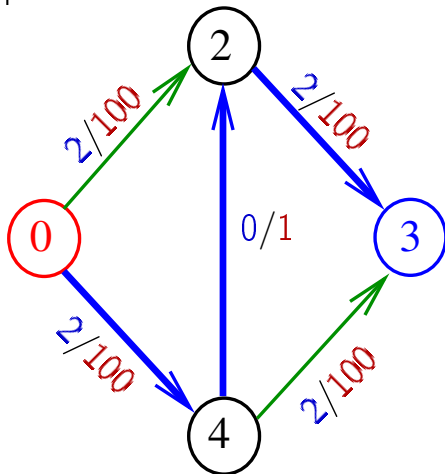
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 4$$

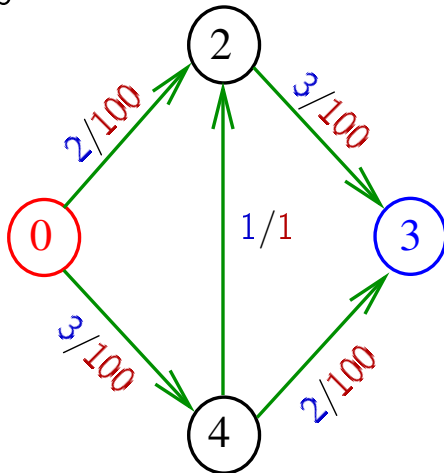
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 5$$

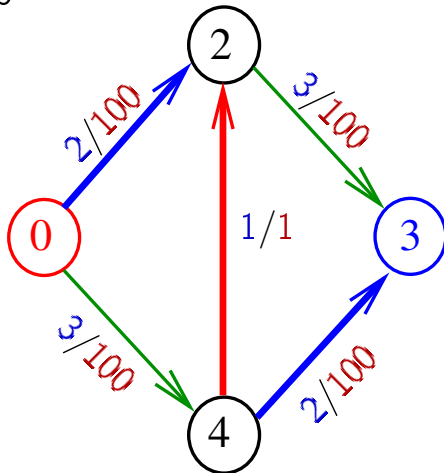
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 5$$

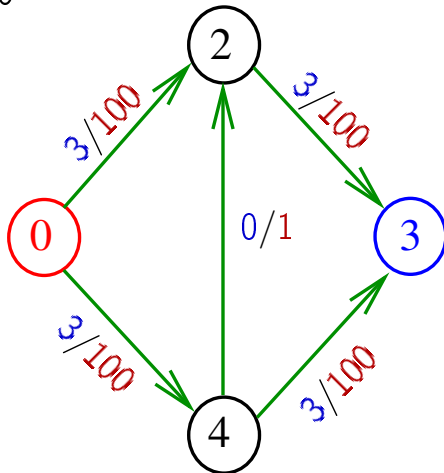
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 6$$

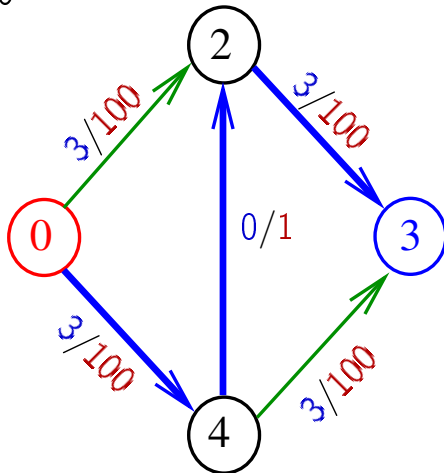
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 6$$

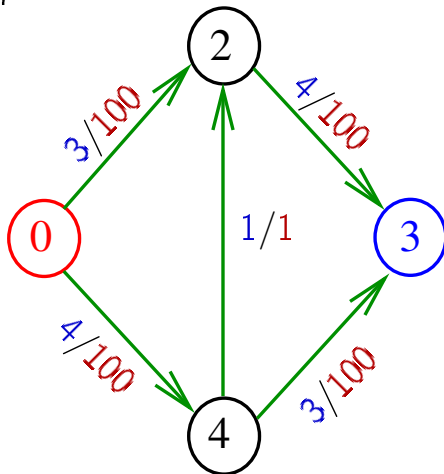
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 7$$

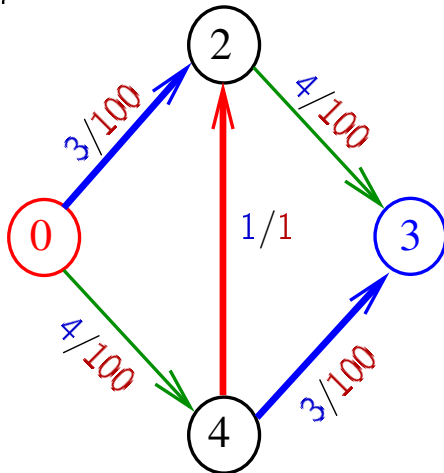
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 7$$

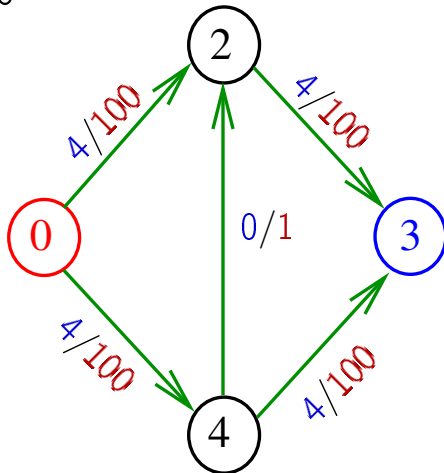
$$f(a)/c(a)$$



Número de iterações

$$\text{int}(f) = 8$$

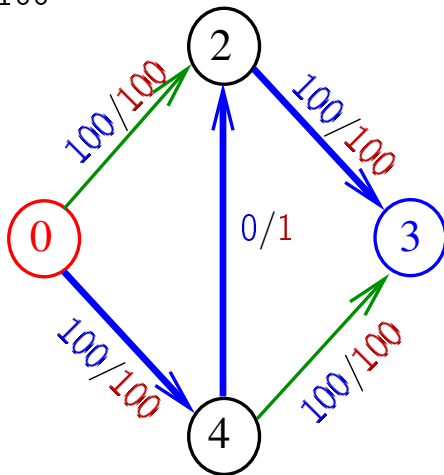
$$f(a)/c(a)$$



Fluxo máximo

$$\text{int}(f) = 100$$

$$f(a)/c(a)$$



Conclusão

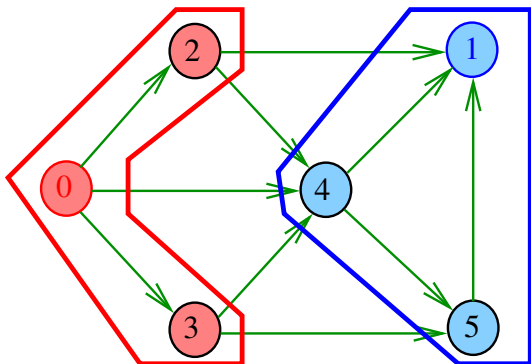
Se todos os arcos da rede têm capacidade menor que M então o número de caminhos de aumento necessário para atingir o fluxo máximo é menor que $V \times M$, sendo V o número de vértices da rede.

Cortes

Um **corte** (= *st-cut*) é qualquer partição (S, T) do conjunto de vértices tal que

s está em *S* e *t* está em *T*.

Exemplo:

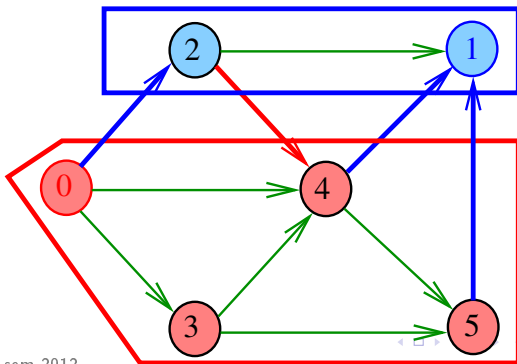


Arcos diretos e arcos reversos

Um **arco direto** de um corte (S, T) é qualquer arco que vai de S para T .

Um **arco reverso** do corte é qualquer arco que vai de T para S .

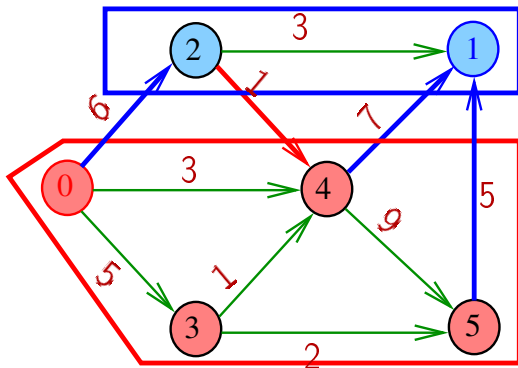
Exemplo: arcos azuis são **diretos** e vermelho é **reverso**



Capacidade de um corte

Numa rede capacitada, a capacidade de um corte (S,T) é a soma das capacidades dos **arcos diretos** do corte.

Exemplo: corte de capacidade 18

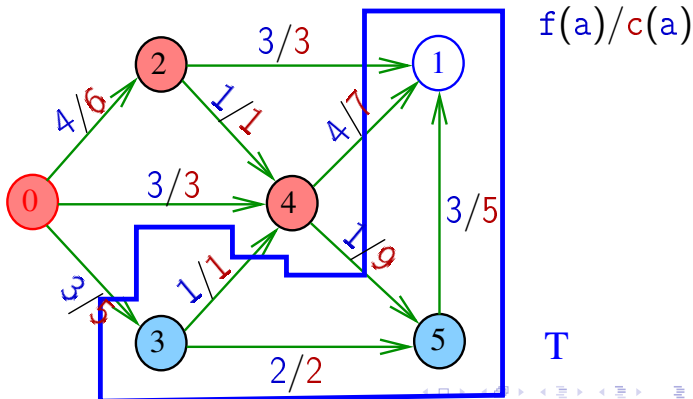


Lema da dualidade

Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte então

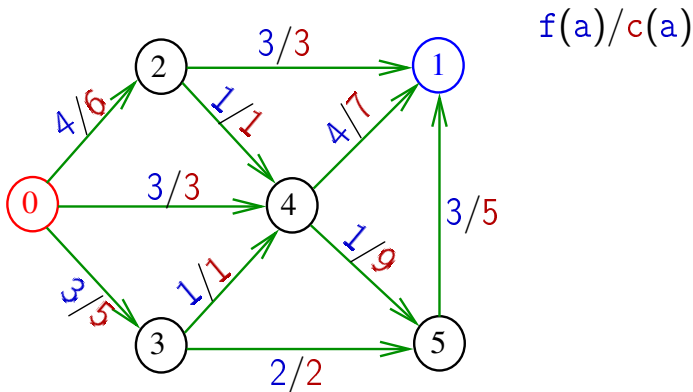
intensidade de $f \leq$ capacidade de (S, T) .

Exemplo: $\text{int}(f) = 10 \leq 24 = c(S, T)$.



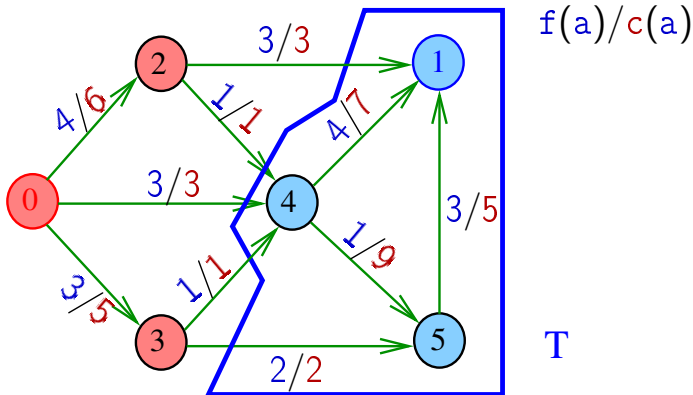
Consequência

Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de $f =$ capacidade de (S, T) .
então f é um fluxo de **máximo** e (S, T) é um corte de **capacidade mínima**.



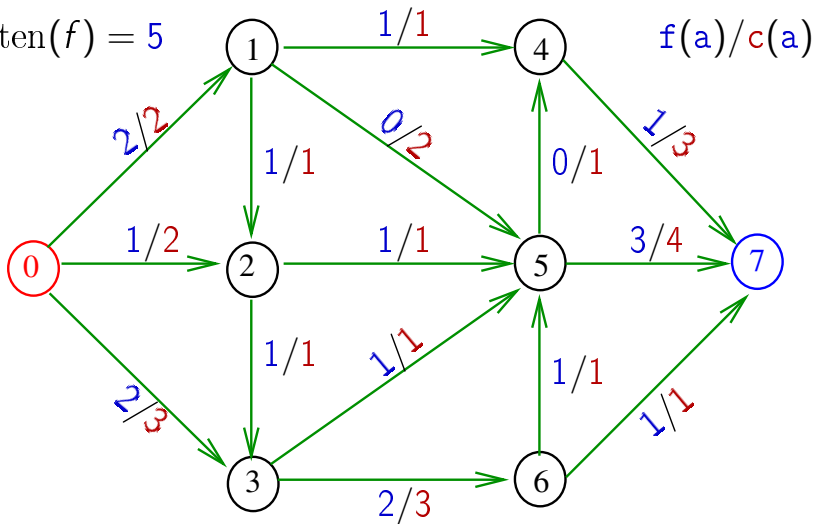
Consequência

Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de $f =$ capacidade de (S, T) .
então f é um fluxo de **máximo** e (S, T) é um corte de **capacidade mínima**.

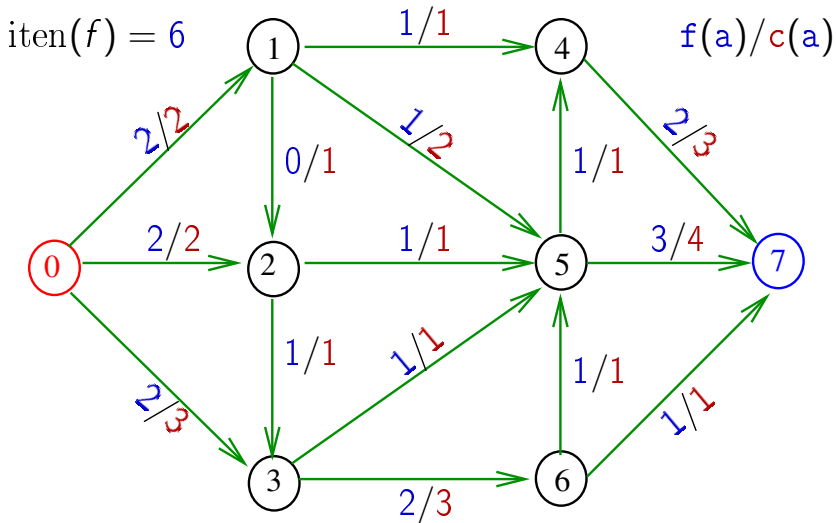


Fluxo é máximo?

$\text{iten}(f) = 5$

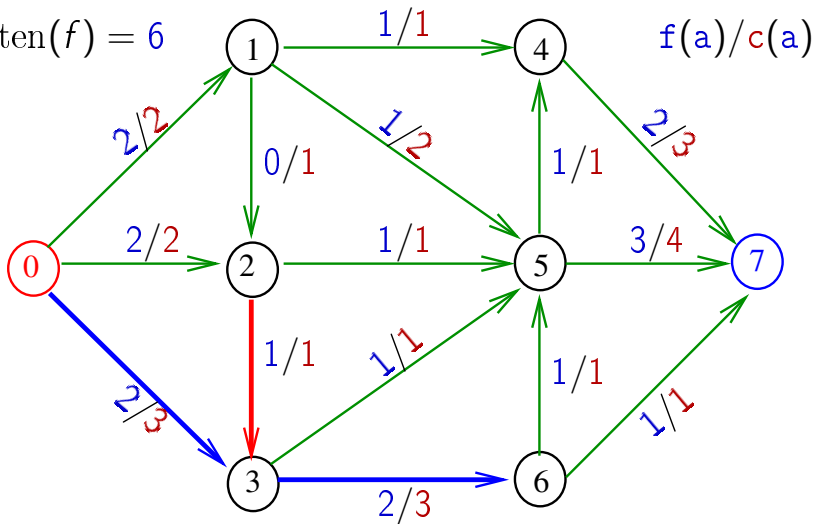


E agora? Fluxo é máximo?



Fluxo é máximo!

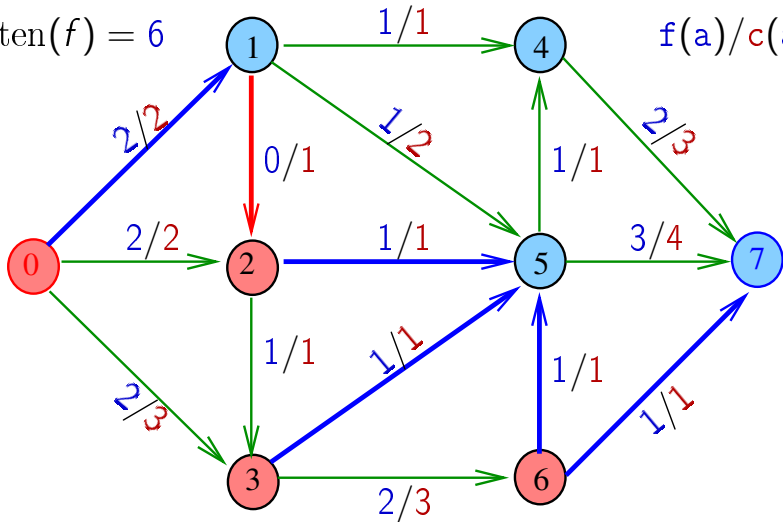
$\text{iten}(f) = 6$



Fluxo é máximo!

$\text{iten}(f) = 6$

$f(a)/c(a)$



Correção do método

Para mostrar que a correção do **método dos caminhos de aumento** basta mostrar que:

se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.

Seja S o conjunto de todos os vértices que são término de um “caminho de aumento”.

Seja T o conjunto dos demais vértices do digrafo.

É claro que s está em S e t está em T . Portanto, (S, T) é um corte.

Correção do método

Para mostrar que a correção do **método dos caminhos de aumento** basta mostrar que:

se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.

Seja **S** o conjunto de todos os vértices que são término de um “caminho de aumento”.

Seja **T** o conjunto dos demais vértices do digrafo.

É claro que **s** está em **S** e **t** está em **T**. Portanto, (S, T) é um corte.

Todos os **arcos diretos** desse corte estão **cheios**
Todos os **arcos reversos** estão **vazios**.

Portanto, o fluxo através desse corte é igual à capacidade do corte.

Logo, pelo lema da dualidade, nosso fluxo tem intensidade máxima.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois vértices s e t em uma rede capacidade com função-capacidade c tem-se que

$$\begin{aligned} & \max\{\text{int}(f) : f \text{ é fluxo que respeita } c\} \\ &= \min\{c(S, T) : (S, T) \text{ é um corte}\}. \end{aligned}$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um **fluxo máximo** é igual à capacidade de um **corte mínimo**.