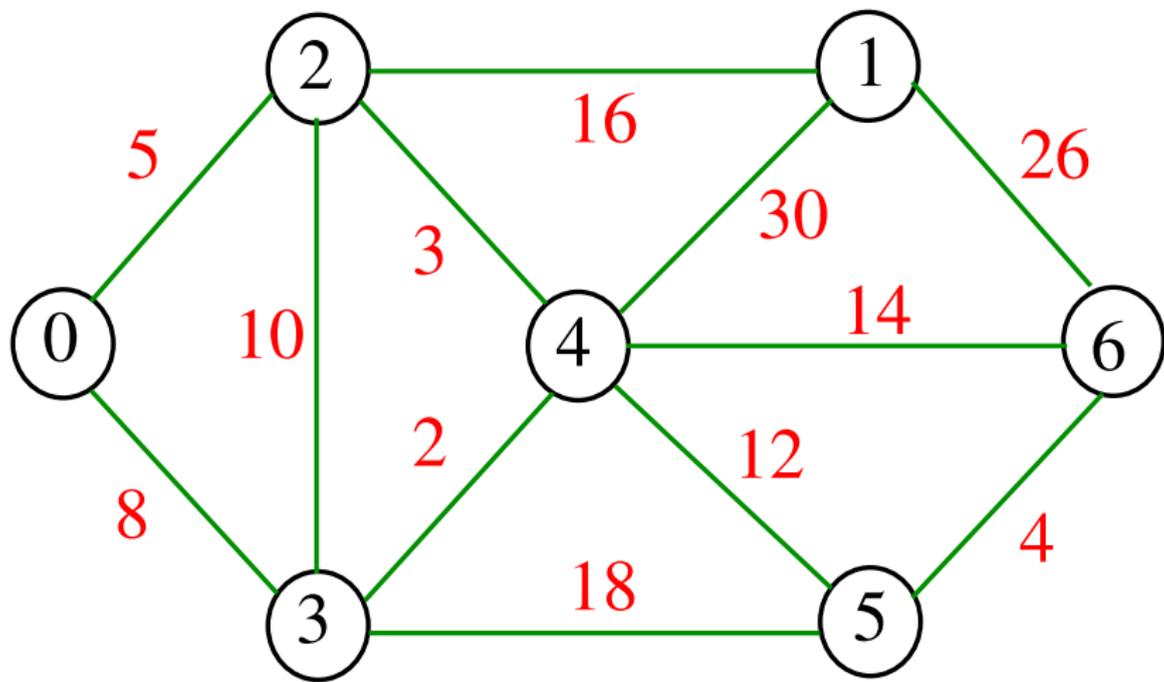


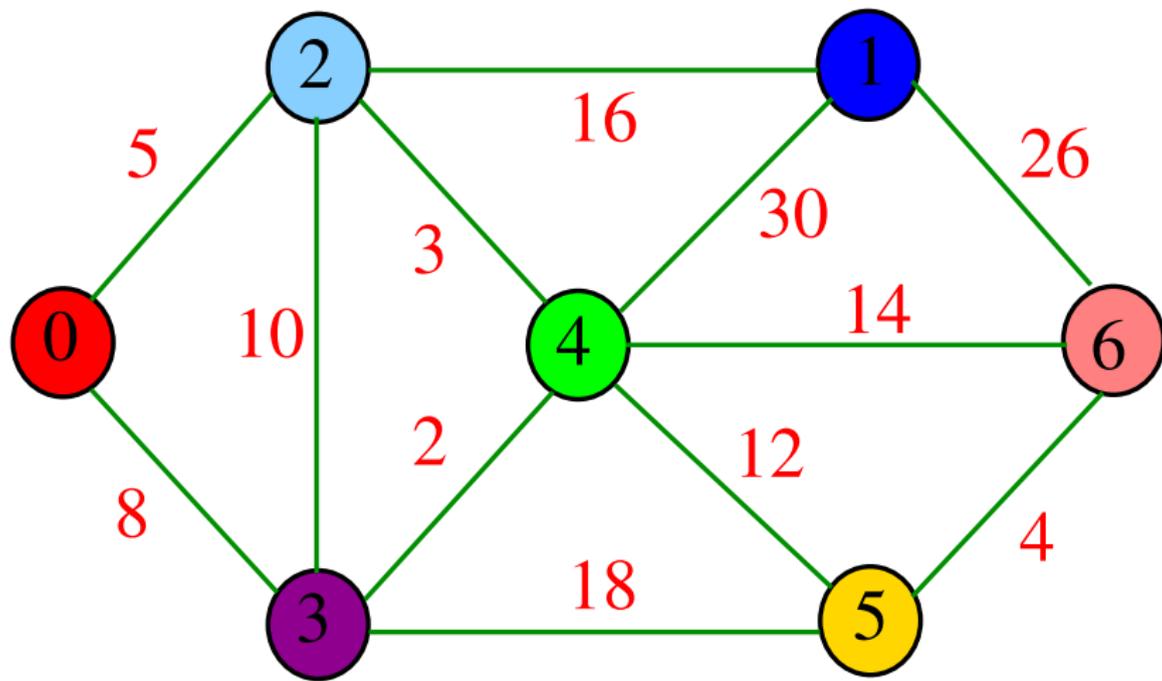
Algoritmo de Kruskal

S 20.3

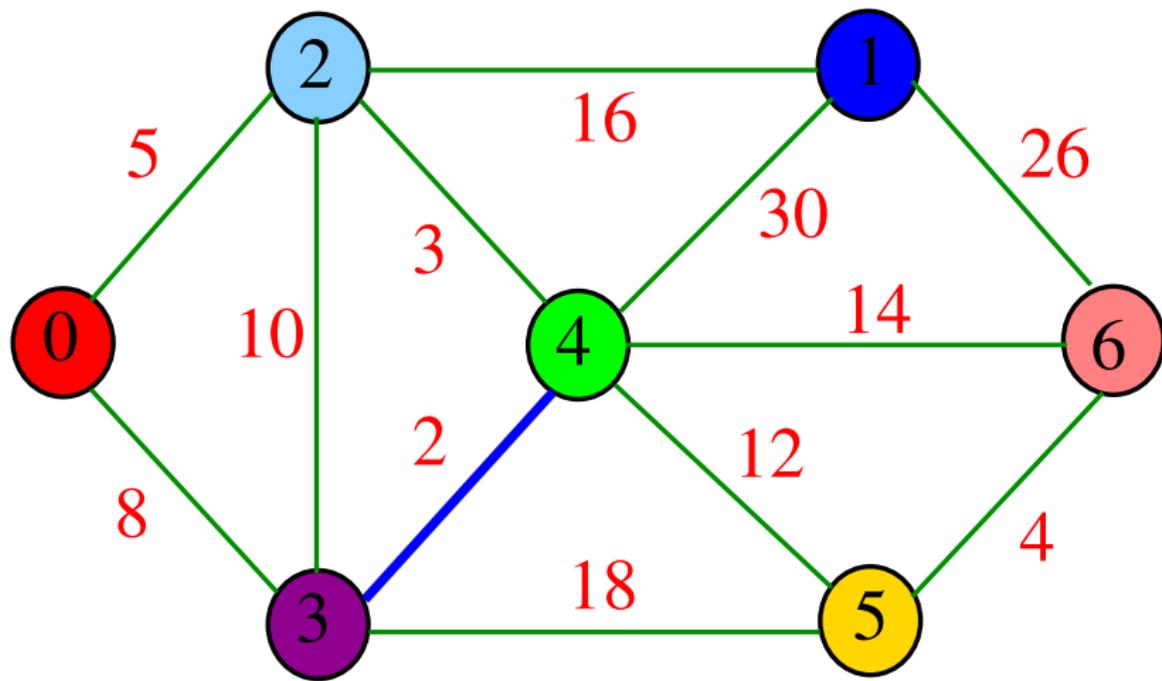
Algoritmo de Kruskal



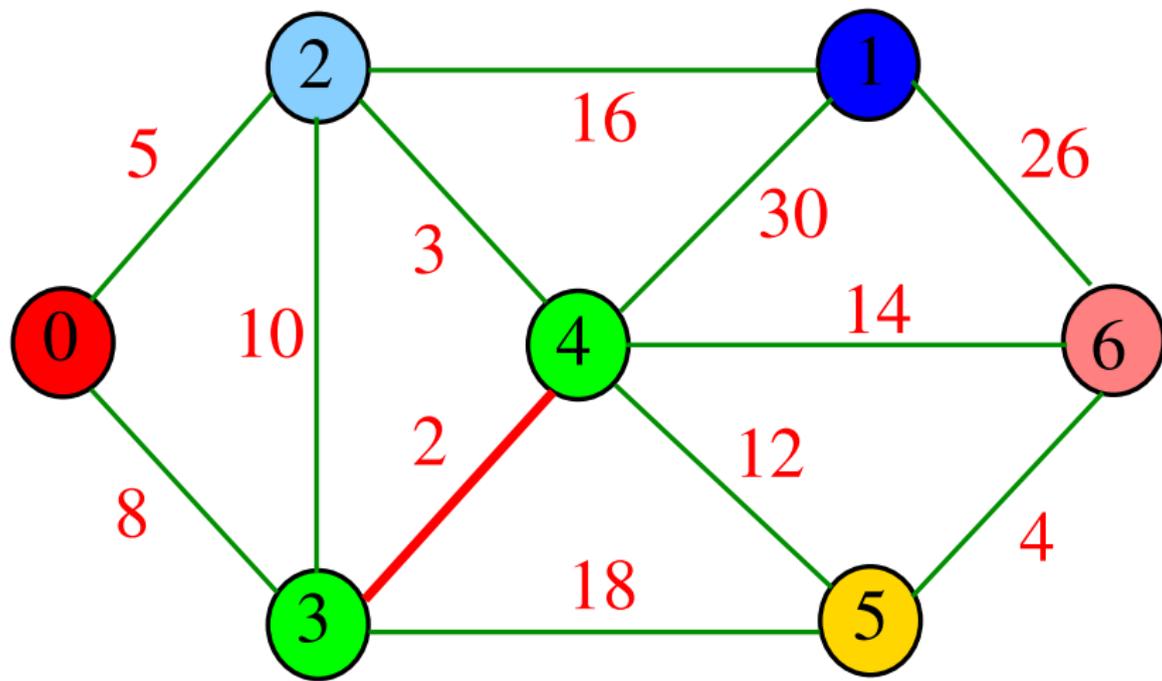
Algoritmo de Kruskal



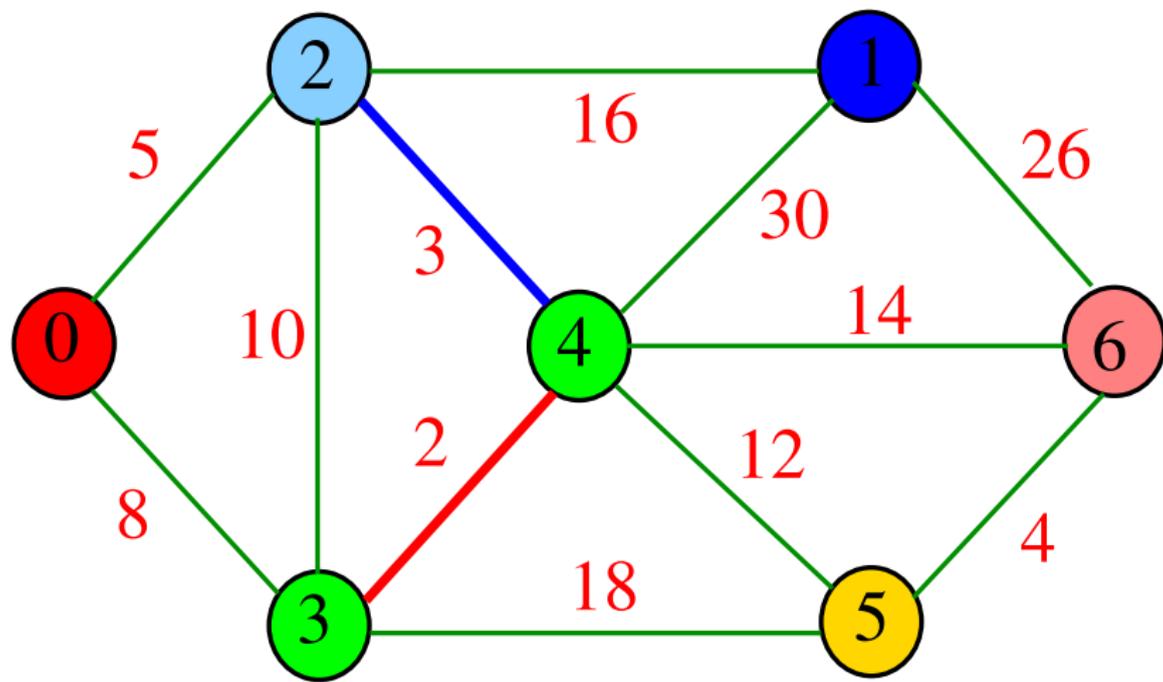
Algoritmo de Kruskal



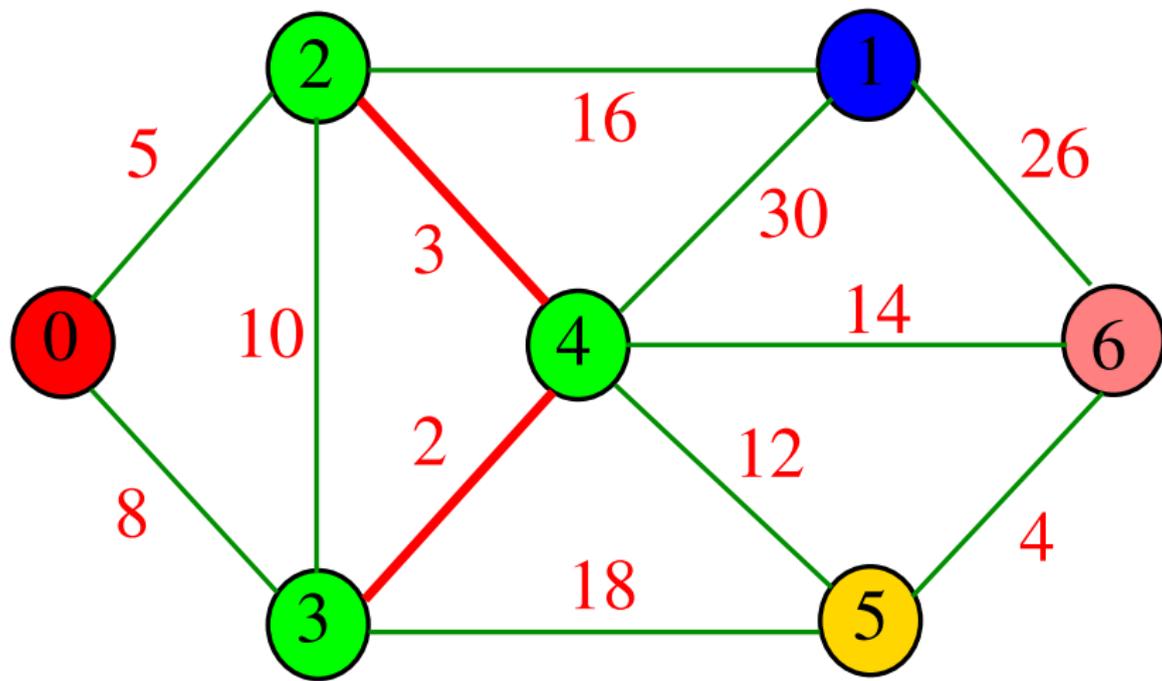
Algoritmo de Kruskal



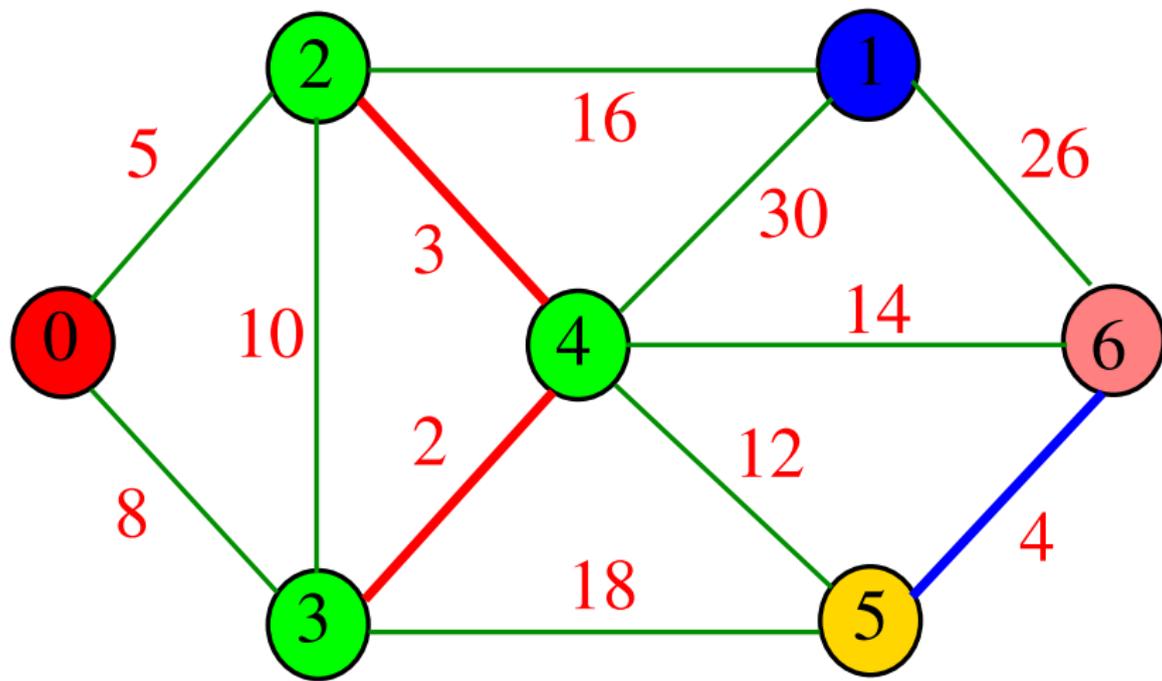
Algoritmo de Kruskal



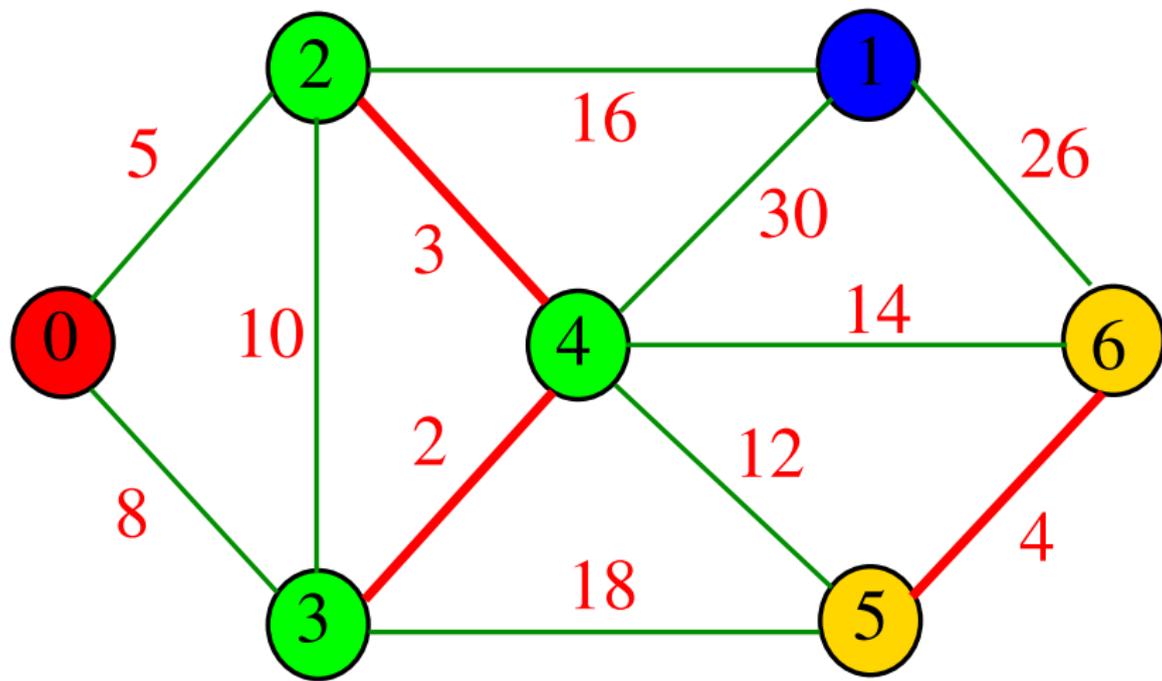
Algoritmo de Kruskal



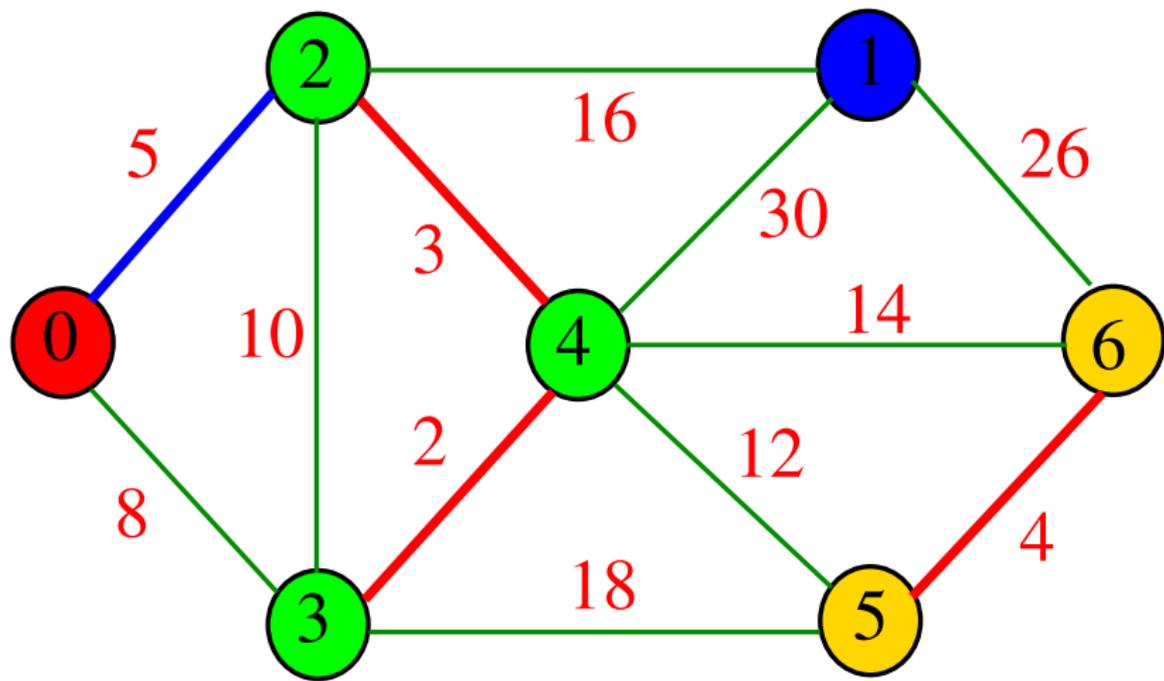
Algoritmo de Kruskal



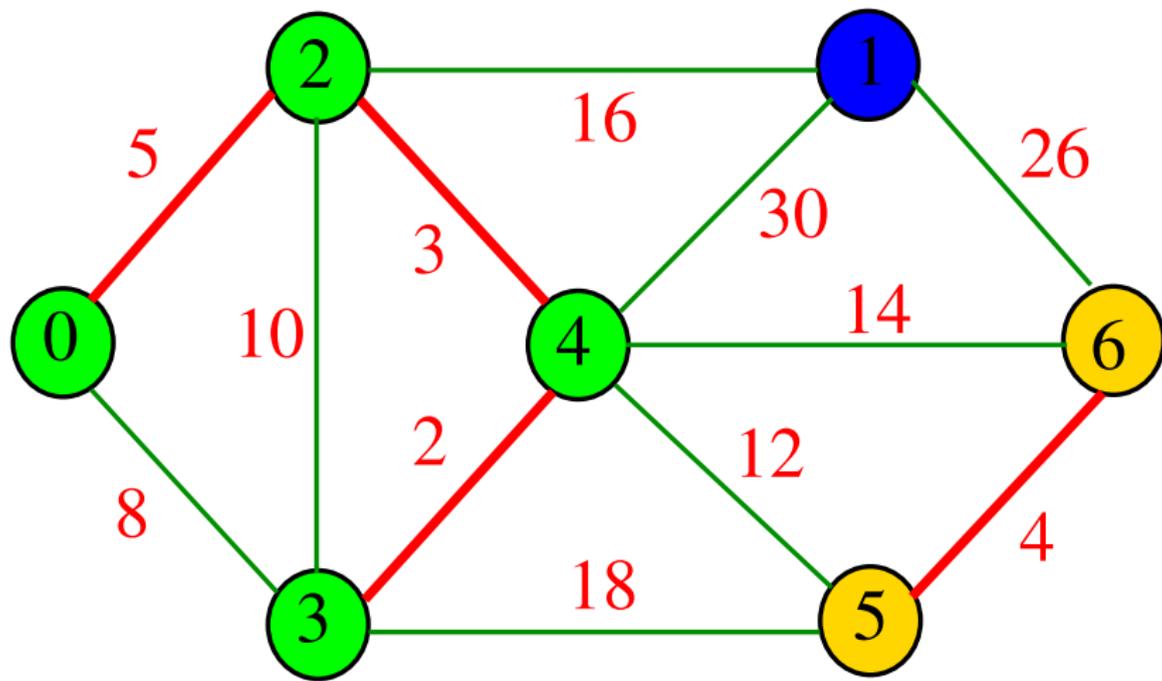
Algoritmo de Kruskal



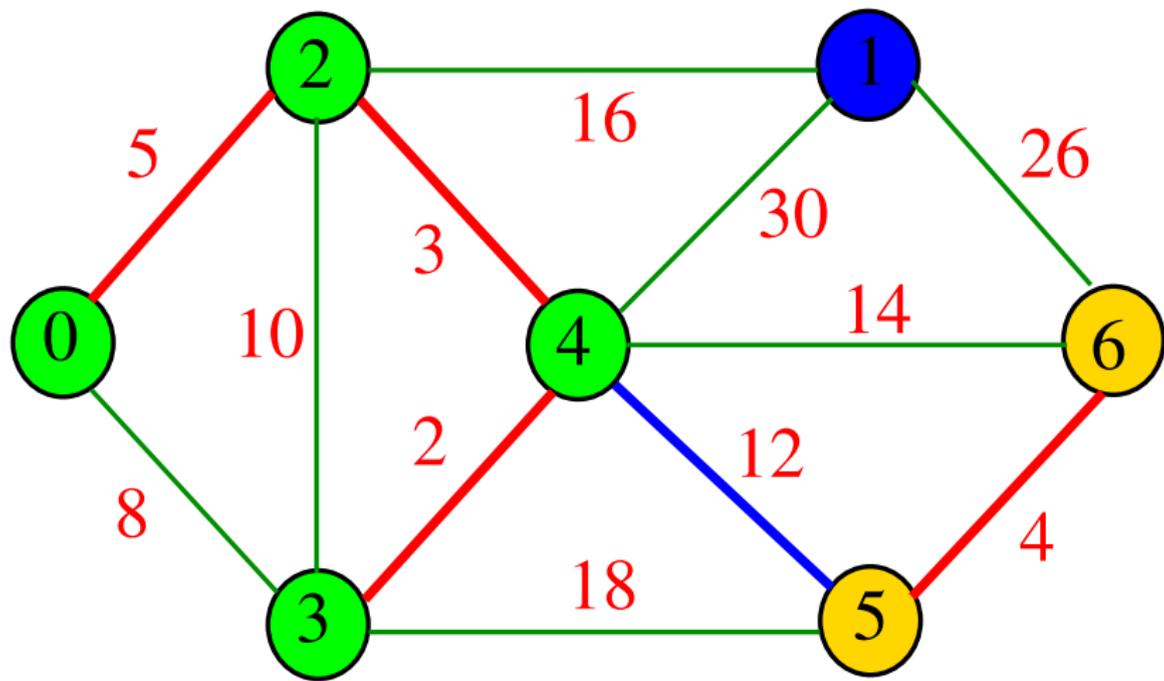
Algoritmo de Kruskal



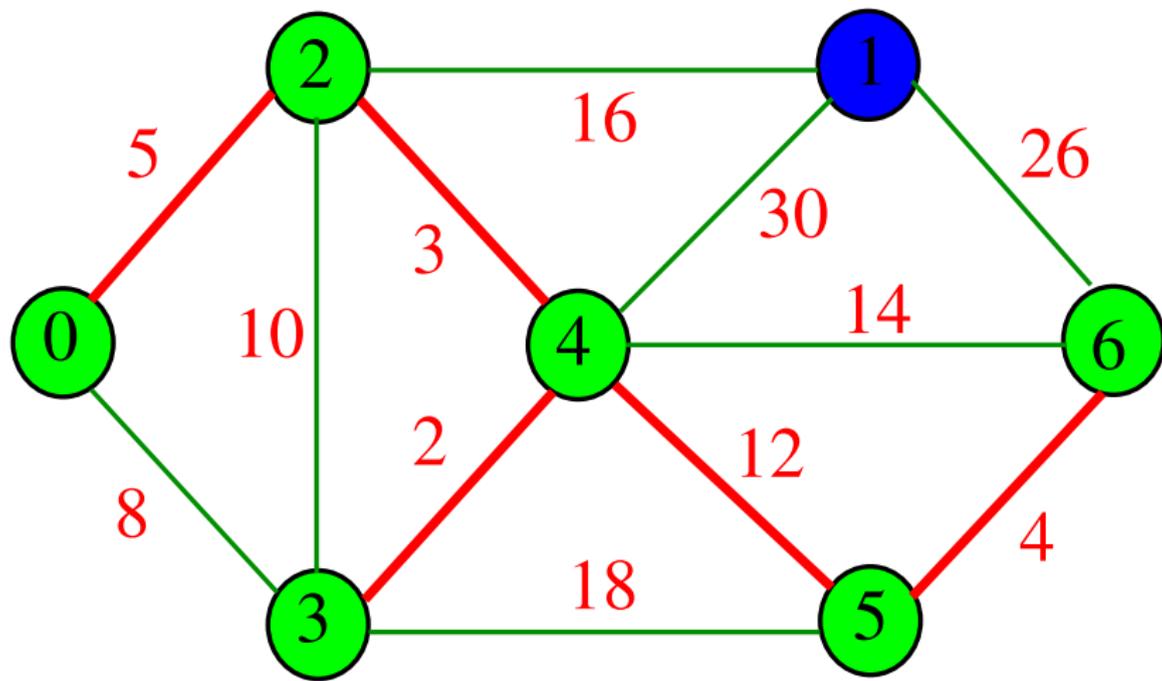
Algoritmo de Kruskal



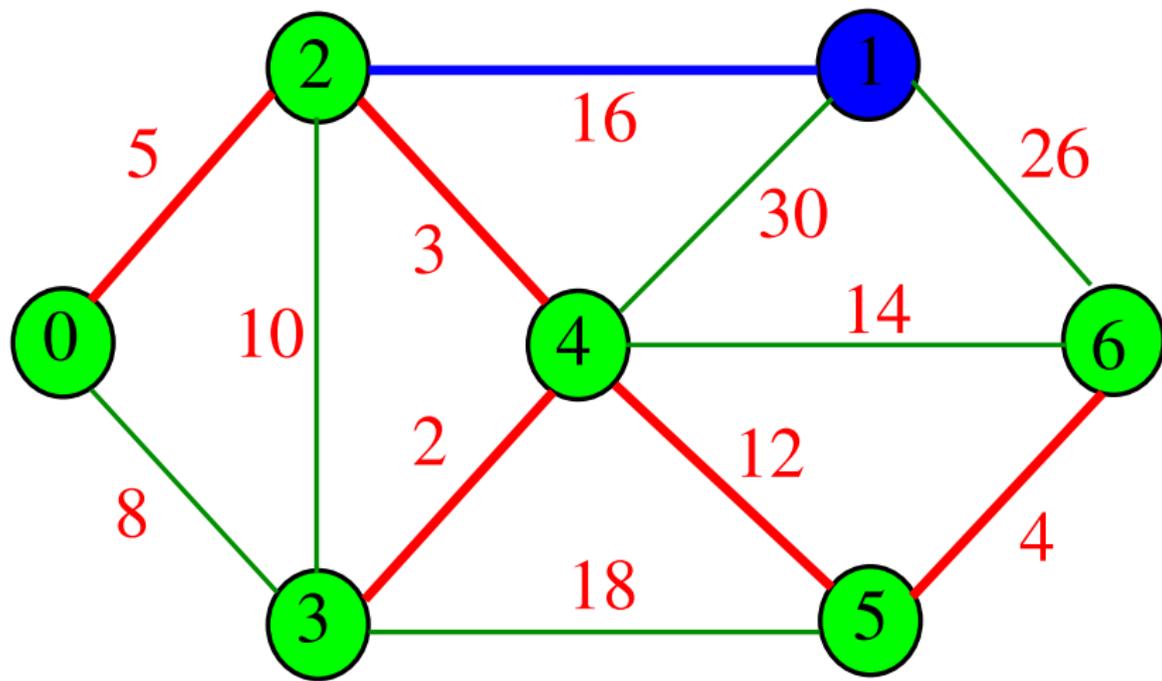
Algoritmo de Kruskal



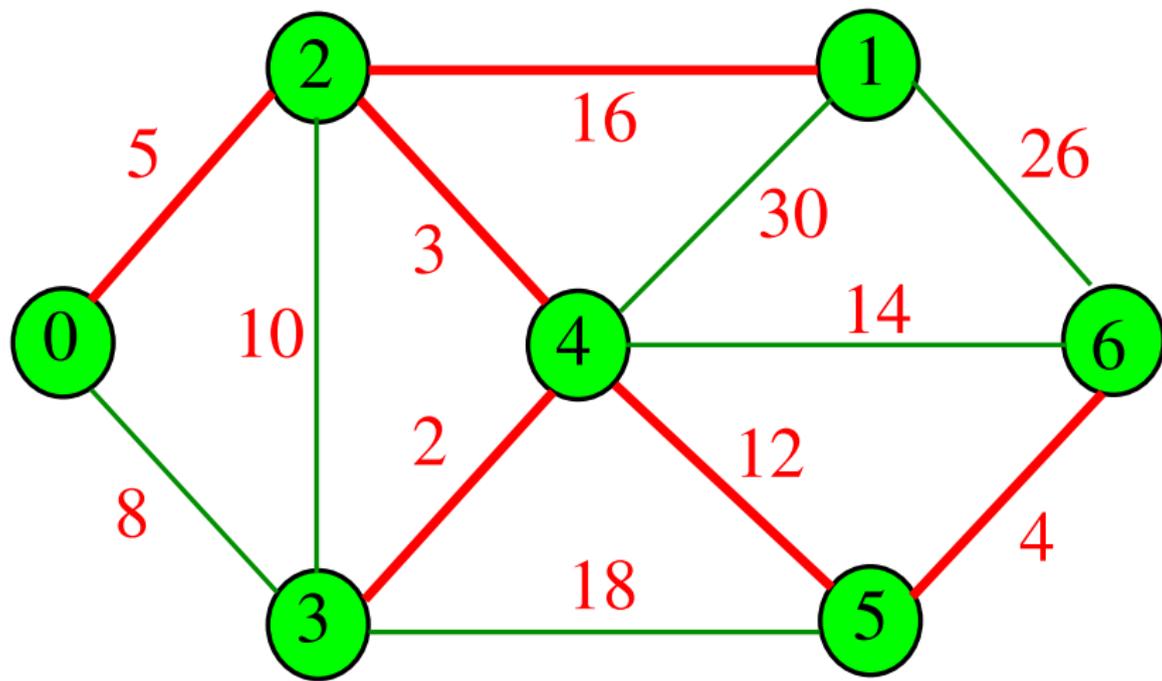
Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



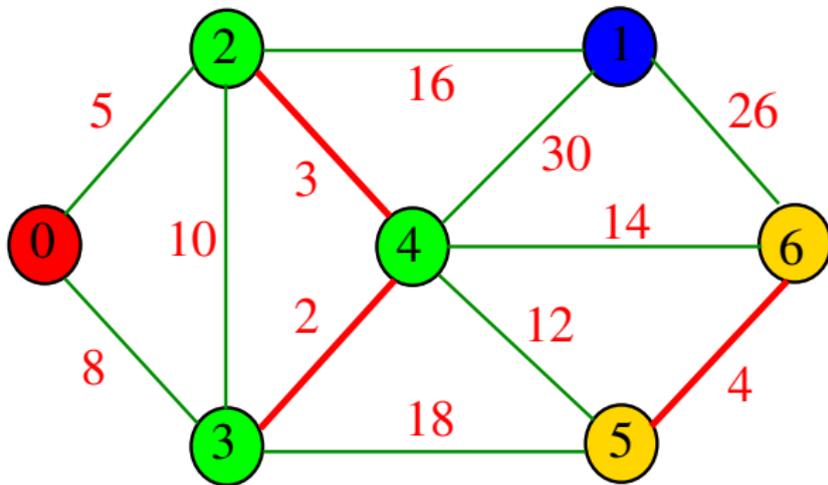
Algoritmo de Kruskal



Subfloresta

Uma **subfloresta** de G é qualquer floresta F que seja subgrafo de G .

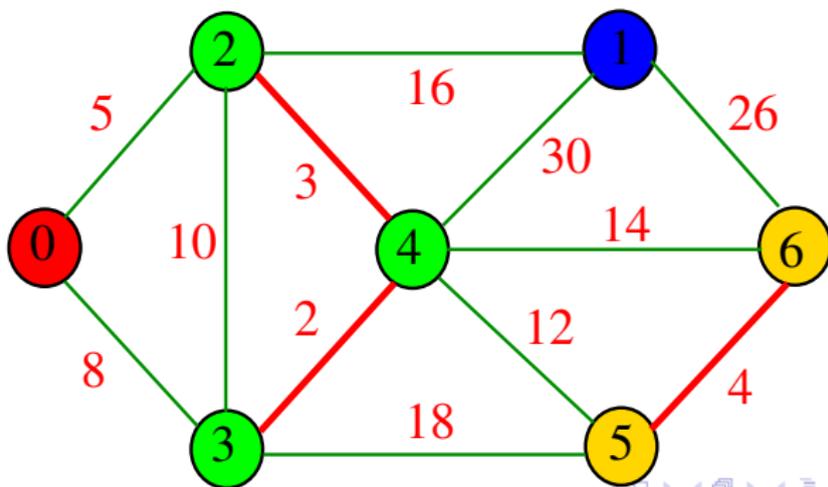
Exemplo: As arestas **vermelhas** que ligam os vértices verdes e amarelos e formam uma subfloresta



Floresta geradora

Uma **floresta geradora** de G é qualquer subfloresta de G que tenha o mesmo conjunto de vértices que G .

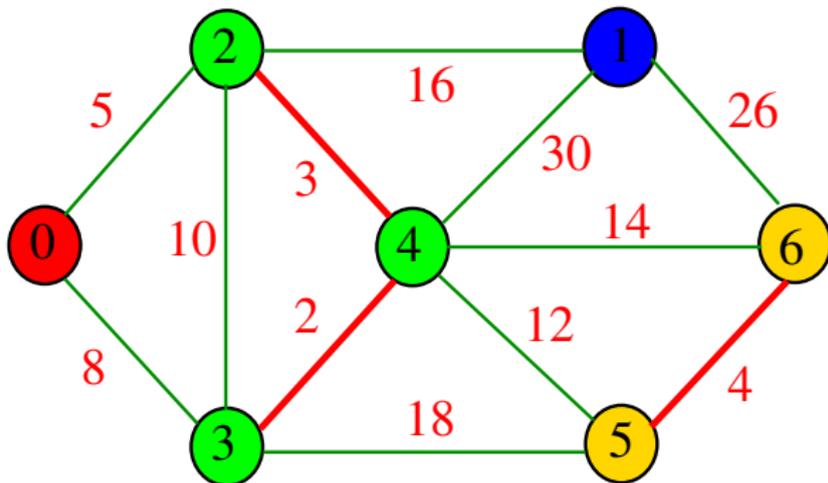
Exemplo: Arestas **vermelhas** ligando os vértices verdes e amarelos, junto com os vértices azul e vermelho, forma uma floresta geradora



Arestas externas

Uma aresta de G é **externa** em relação a uma subfloresta F de G se tem pontas em árvores distintas de F .

Exemplo: As aresta 0-1, 2-1, 4-6 ... são externas



Algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal iterativo.

Cada iteração começa com uma floresta geradora F .

No início da primeira iteração cada árvore de F tem apenas 1 vértice.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: não existe aresta externa a F
Devolva F e pare.

Caso 2: existe aresta externa a F
Seja e uma aresta externa a F de custo mínimo
Atualize: $F \leftarrow F + e$

Otimidade

Duas demonstrações:

- Usando um invariante, igualzinho à prova do Prim:
a cada iteração, existe uma MST contendo F .
- Usando o critério já provado que caracteriza MST:
toda aresta $e \notin F$ tem custo máximo em $C(F, e)$.

Otimidade

Duas demonstrações:

- Usando um invariante, igualzinho à prova do Prim:
a cada iteração, existe uma MST contendo F .
- Usando o critério já provado que caracteriza MST:
toda aresta $e \notin F$ tem custo máximo em $C(F, e)$.

Arcos

Um objeto do tipo **Arc** representa um arco com ponta inicial **v** e ponta final **w**.

```
typedef struct {  
    Vertex v;  
    Vertex w;  
    double cst;  
} Arc;
```

Arestas

Um objeto do tipo `Edge` representa uma aresta com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

```
#define Edge Arc
```

Implementação grosseira

Na função abaixo para decidir se uma aresta $v-w$ é externa a uma floresta geradora temos que

- (1) em cada componente da floresta geradora, é eleito um dos vértices para ser o representante da componente;
- (2) é mantido um vetor $cor[0..V-1]$ de representantes, sendo $cor[v]$ o representante da componente que contém o vértice v ;
- (3) $v-w$ é externa se e somente se $cor[v]$ é diferente de $cor[w]$.

Kruskal na força bruta

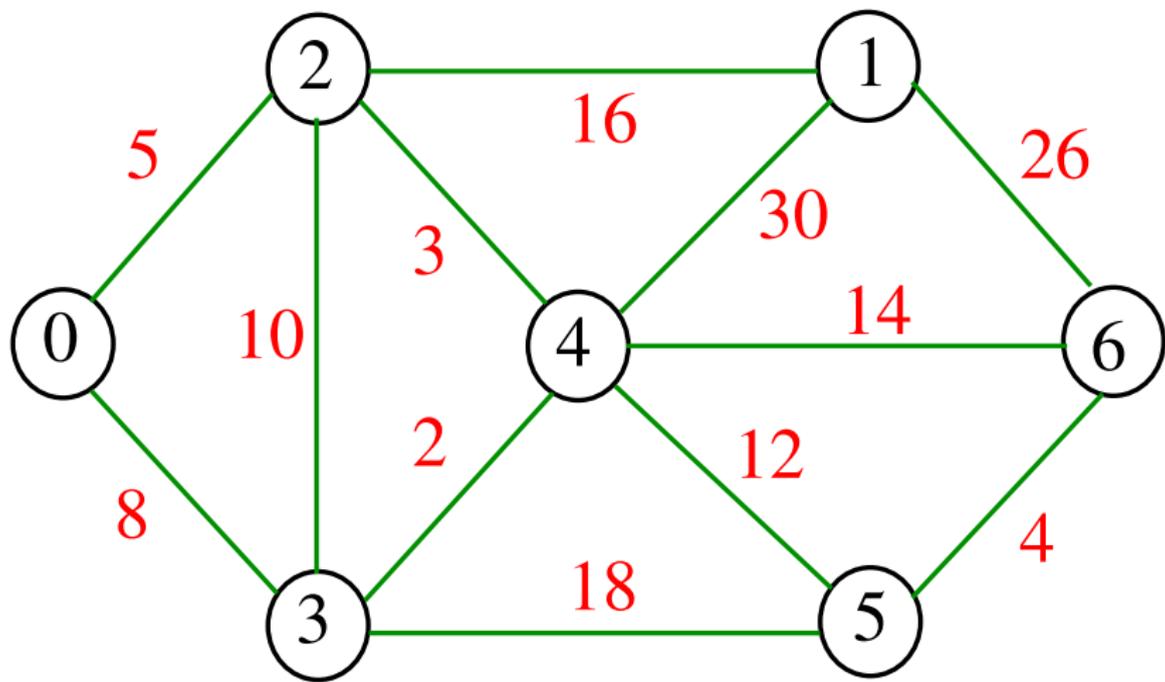
A função armazena as arestas das MSTs no vetor `mst[0..k-1]` e devolve `k`.

```
int bruteforceKruskal(Graph G, Edge mst[])
{
    0  Vertex cor[maxV], v, w, v0, w0;
    0  int k=0;
    1  for (v=0; v < G->V; v++)
    3      cor[v] = v;
```

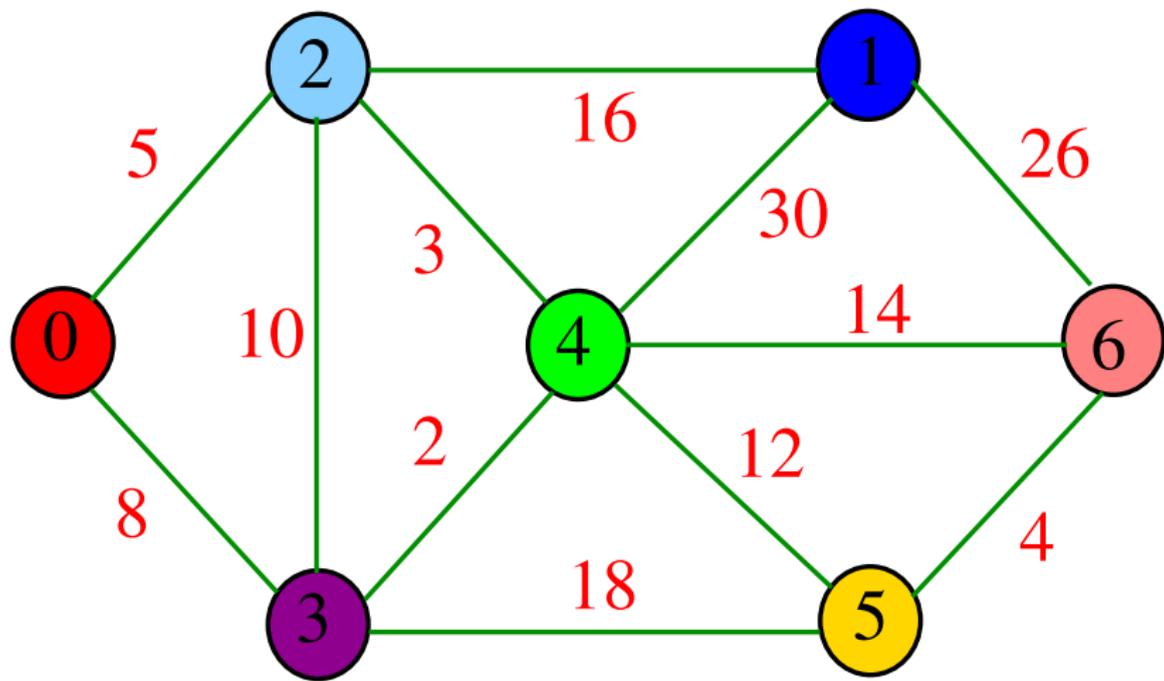
Implementação grosseira

```
4  while(1) {
5  double mincst = INFINITO;
6  for (v = 0; v < G->V; v++)
7      for (w = 0; w < G->V; w++)
8          if (cor[v] != cor[w]
9              && mincst > G->adj[v][w])
11             mincst = G->adj[v0=v][w0=w];
12  if (mincst == INFINITO) break;
13  mst[k].v = v0;  mst[k].w = w0;  k++;
14  for (v = 0; v < G->V; v++)
15      if (cor[v] == cor[w0]) cor[v] = cor[v0];
16  }
return k; }
```

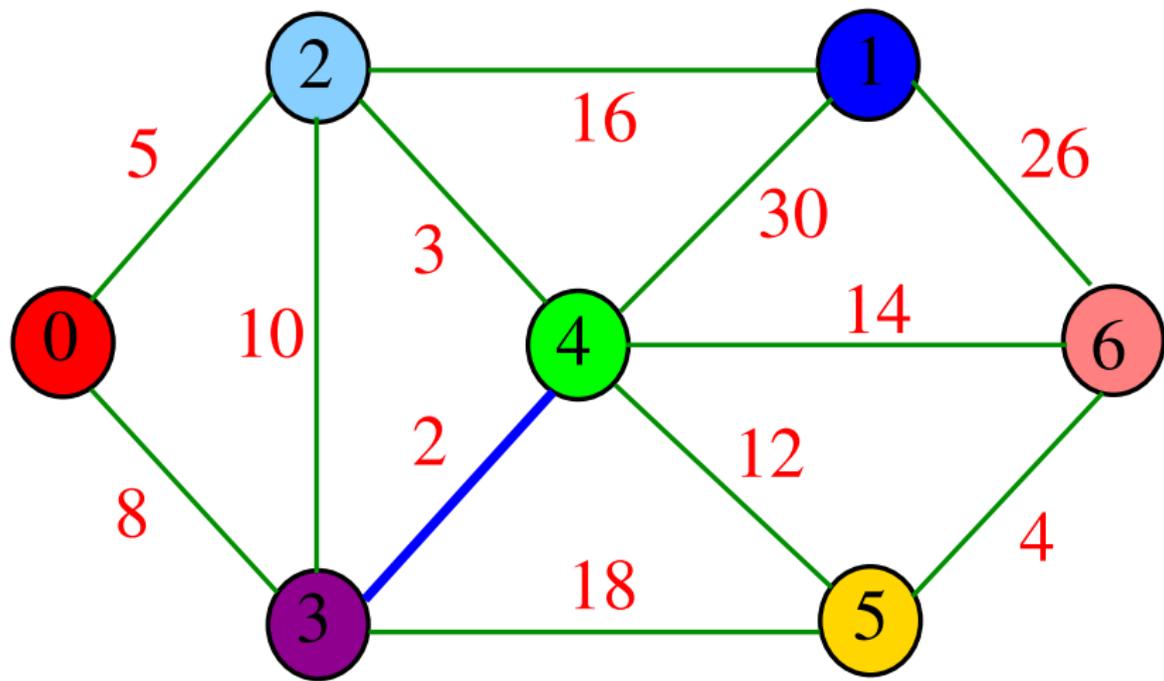
Algoritmo de Kruskal



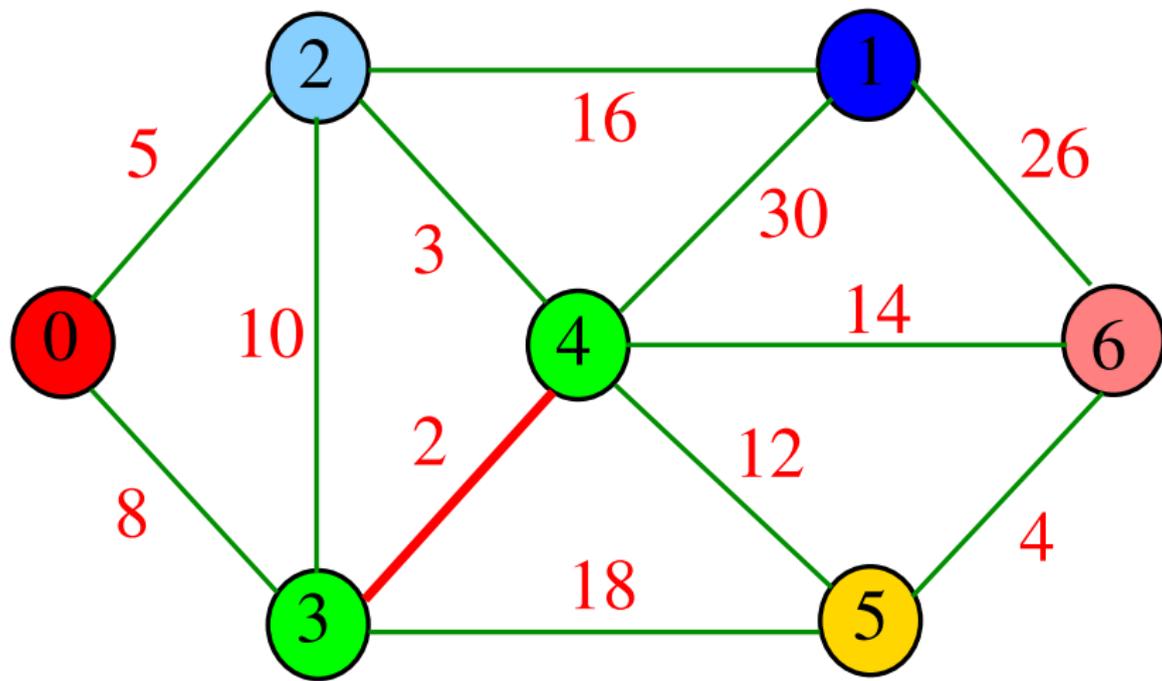
Algoritmo de Kruskal



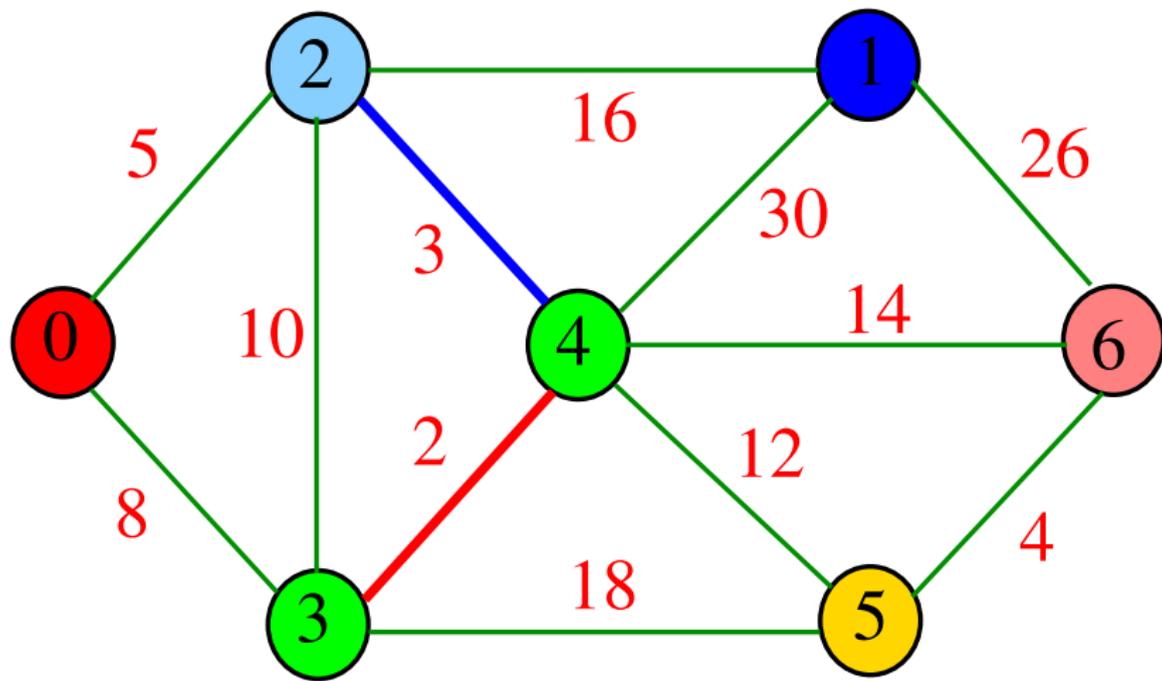
Algoritmo de Kruskal



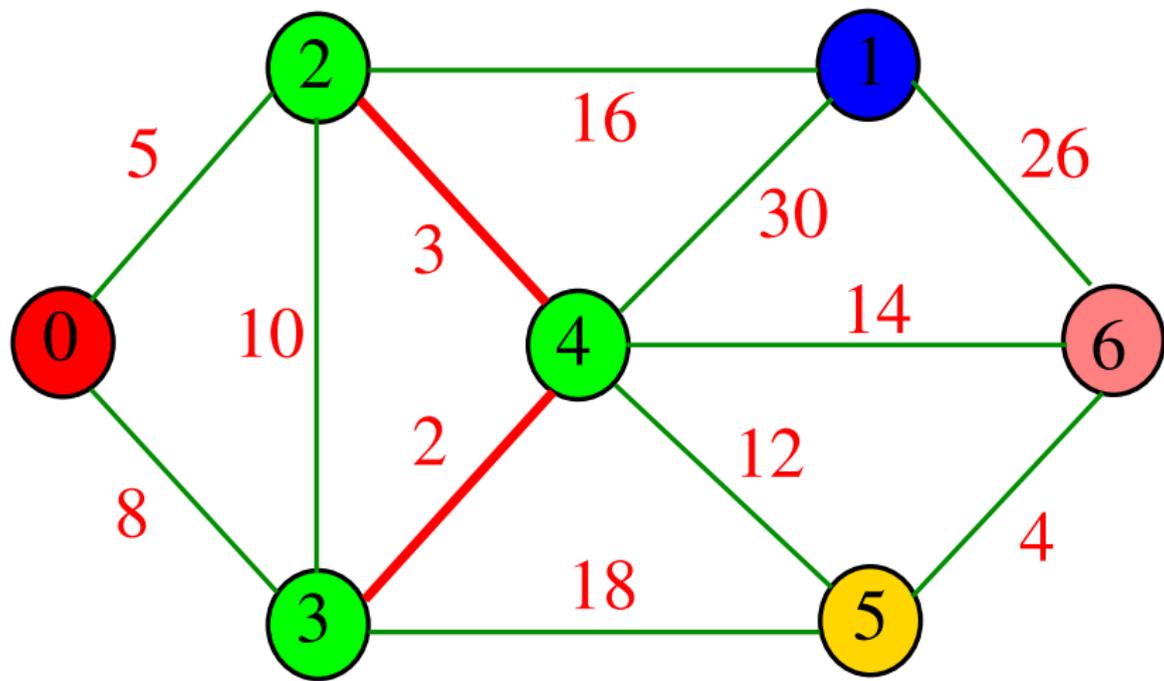
Algoritmo de Kruskal



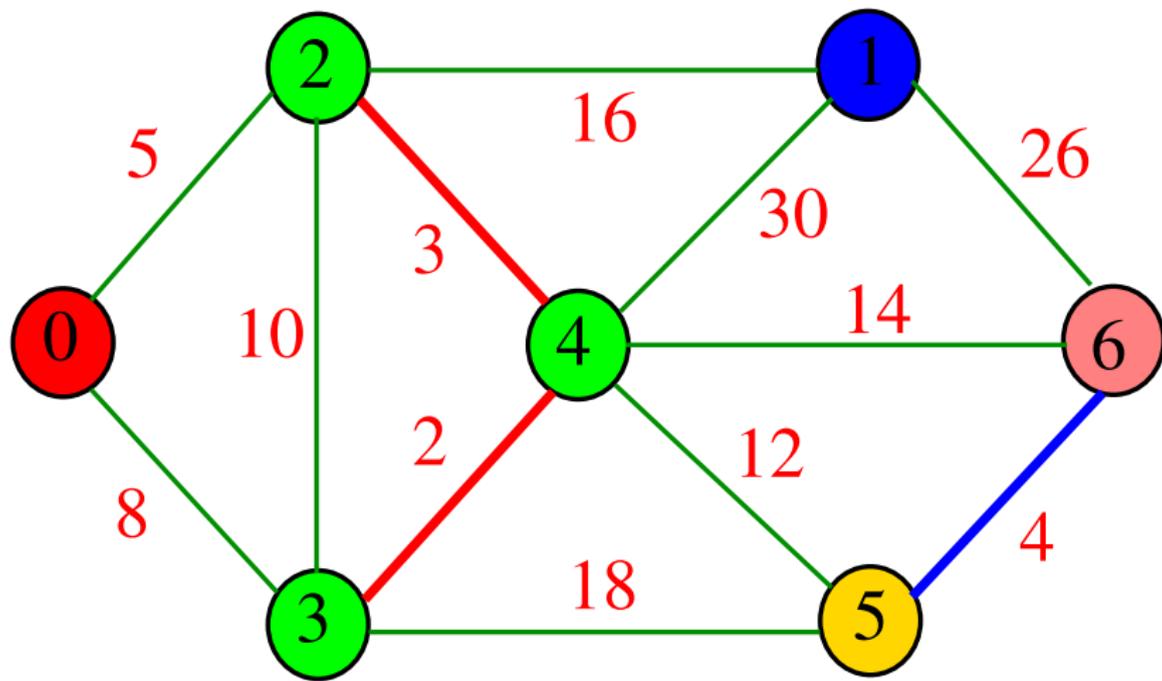
Algoritmo de Kruskal



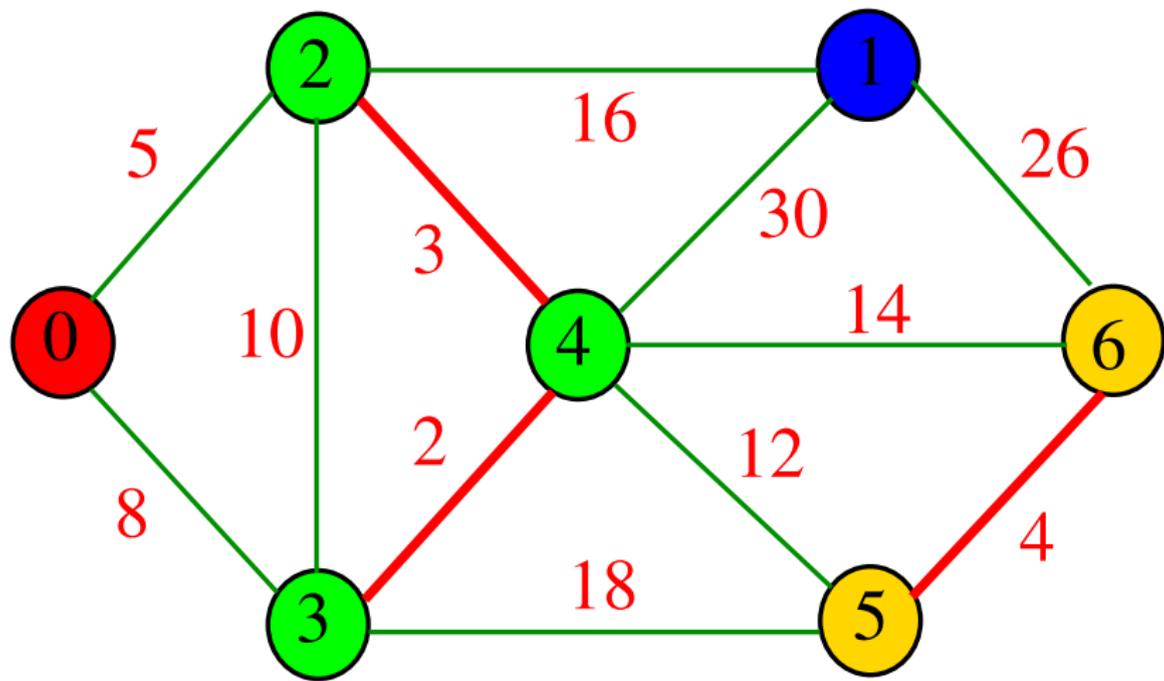
Algoritmo de Kruskal



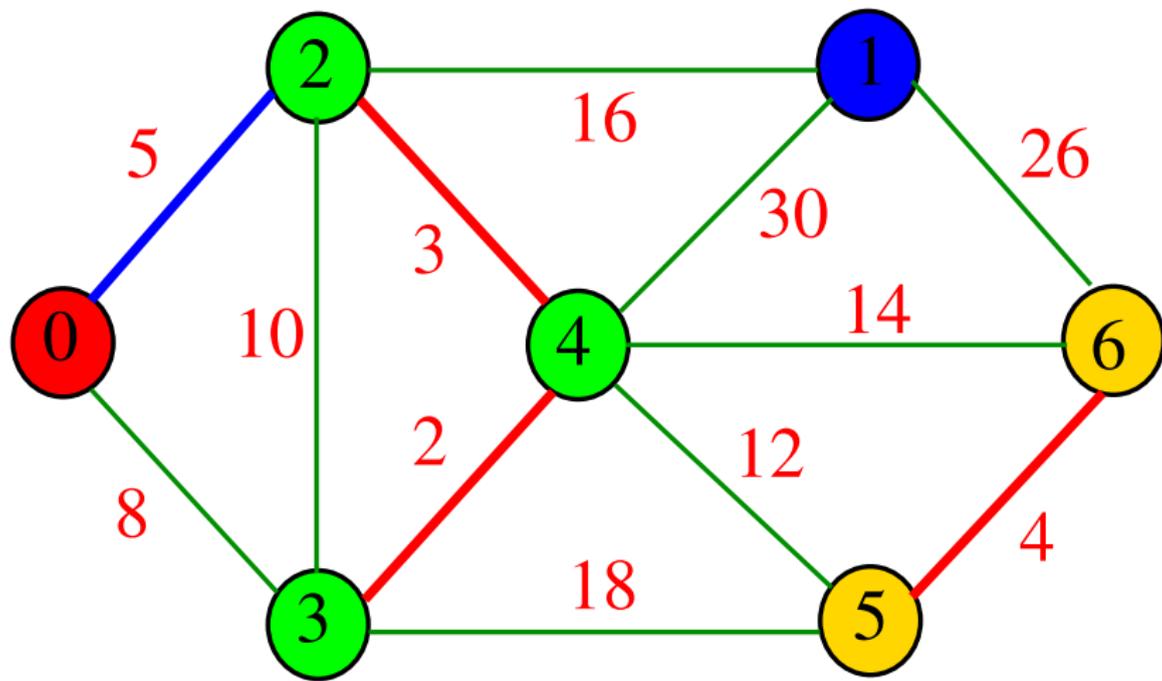
Algoritmo de Kruskal



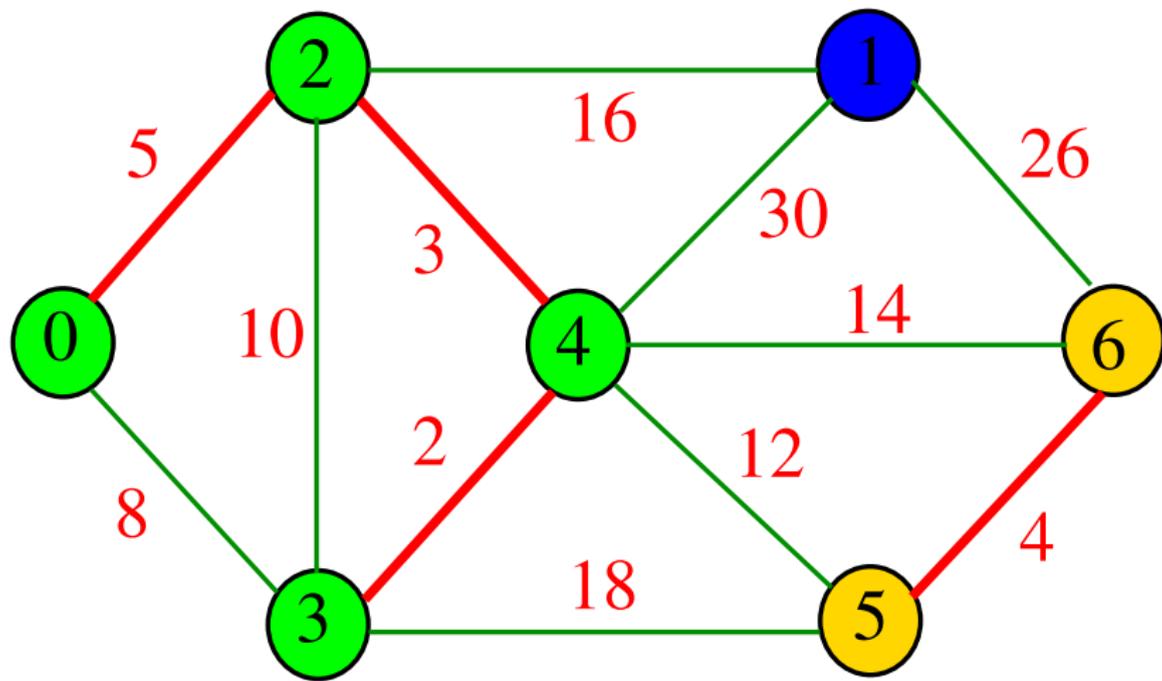
Algoritmo de Kruskal



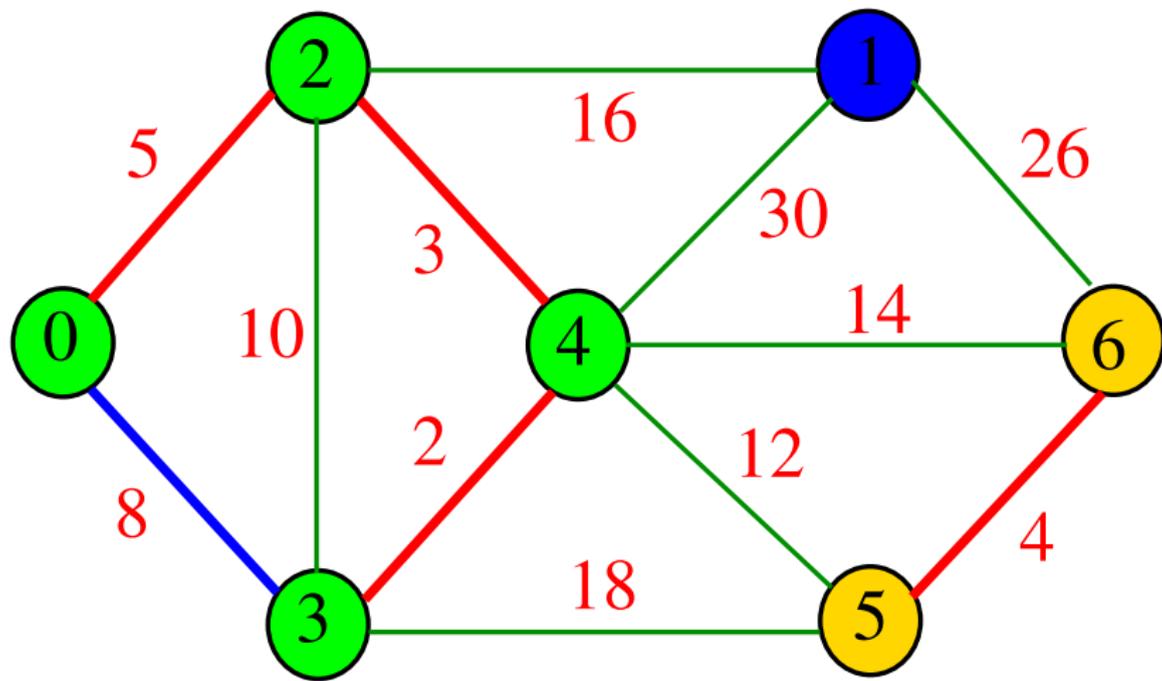
Algoritmo de Kruskal



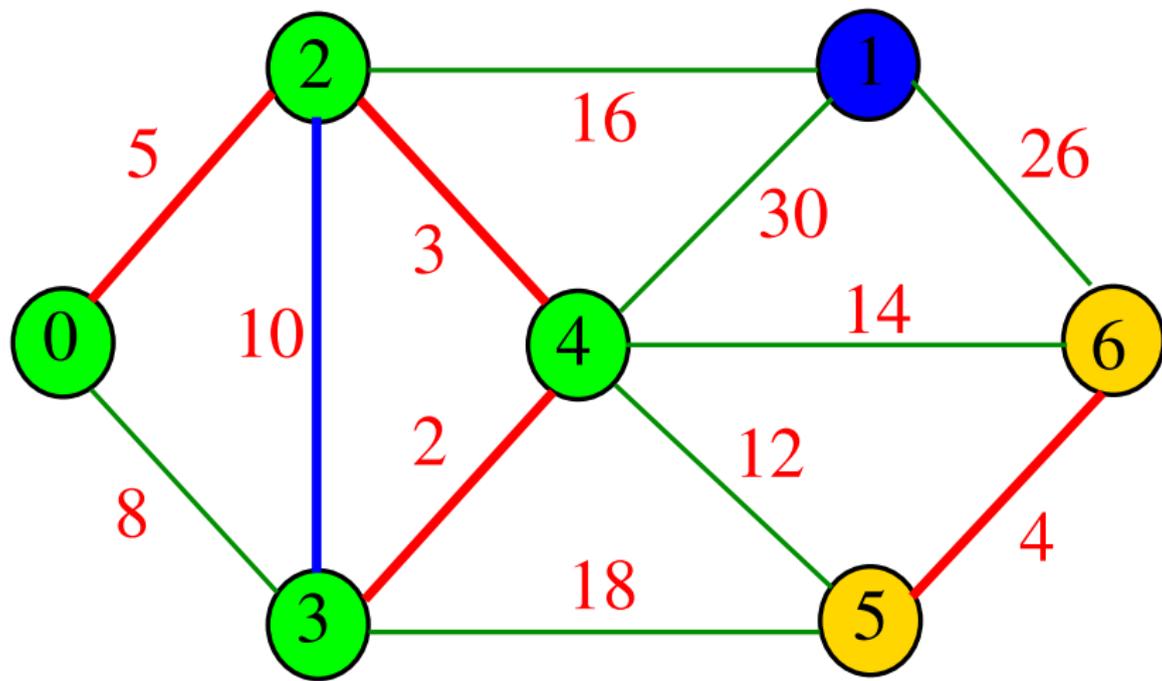
Algoritmo de Kruskal



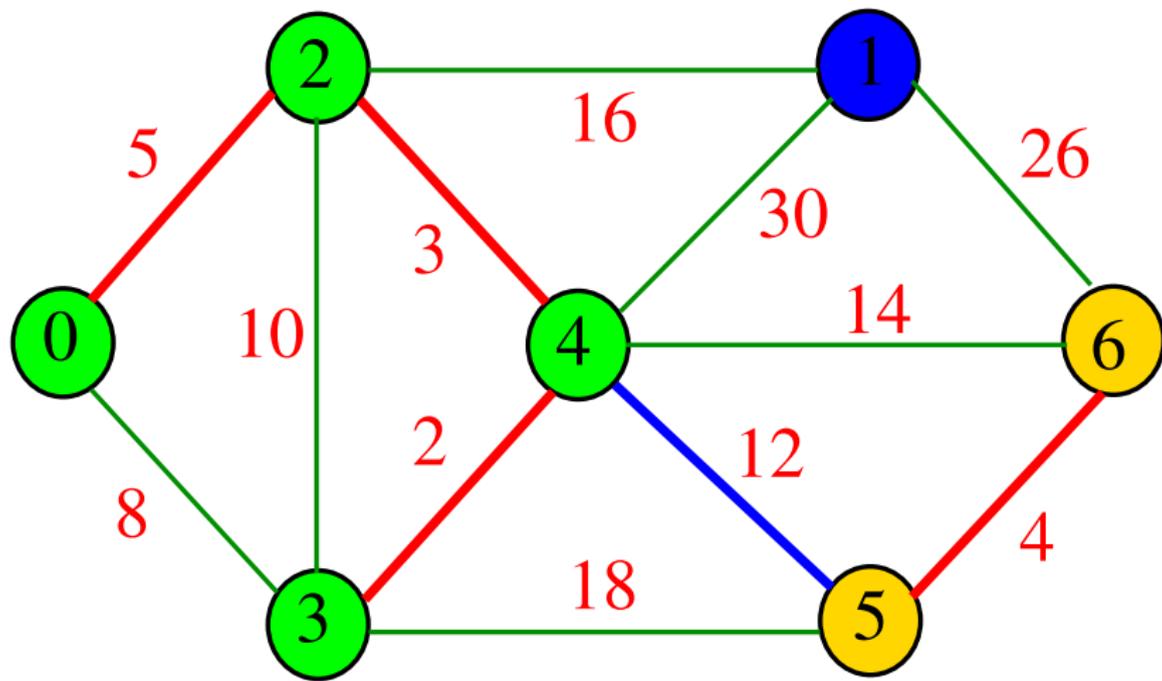
Algoritmo de Kruskal



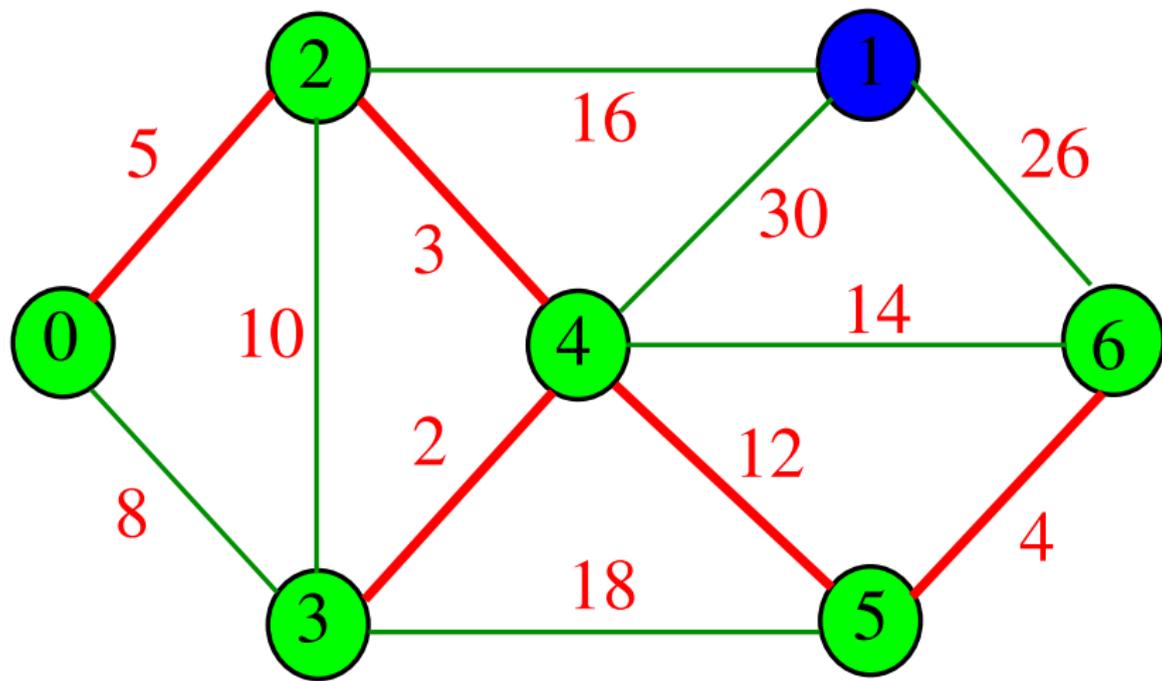
Algoritmo de Kruskal



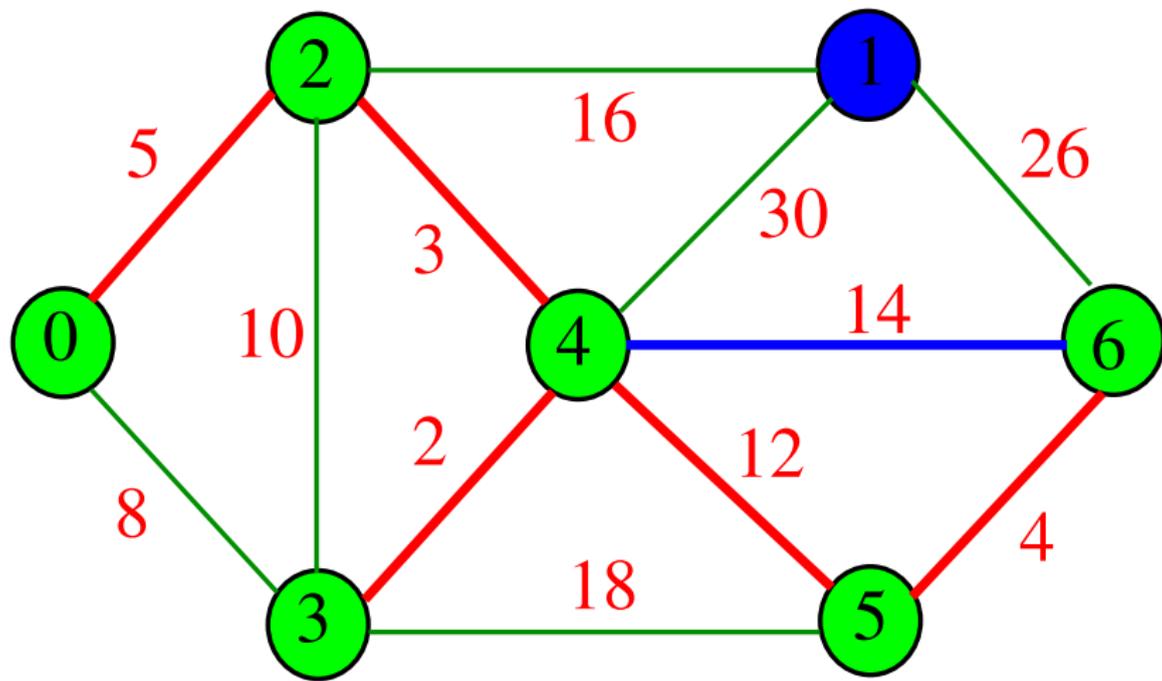
Algoritmo de Kruskal



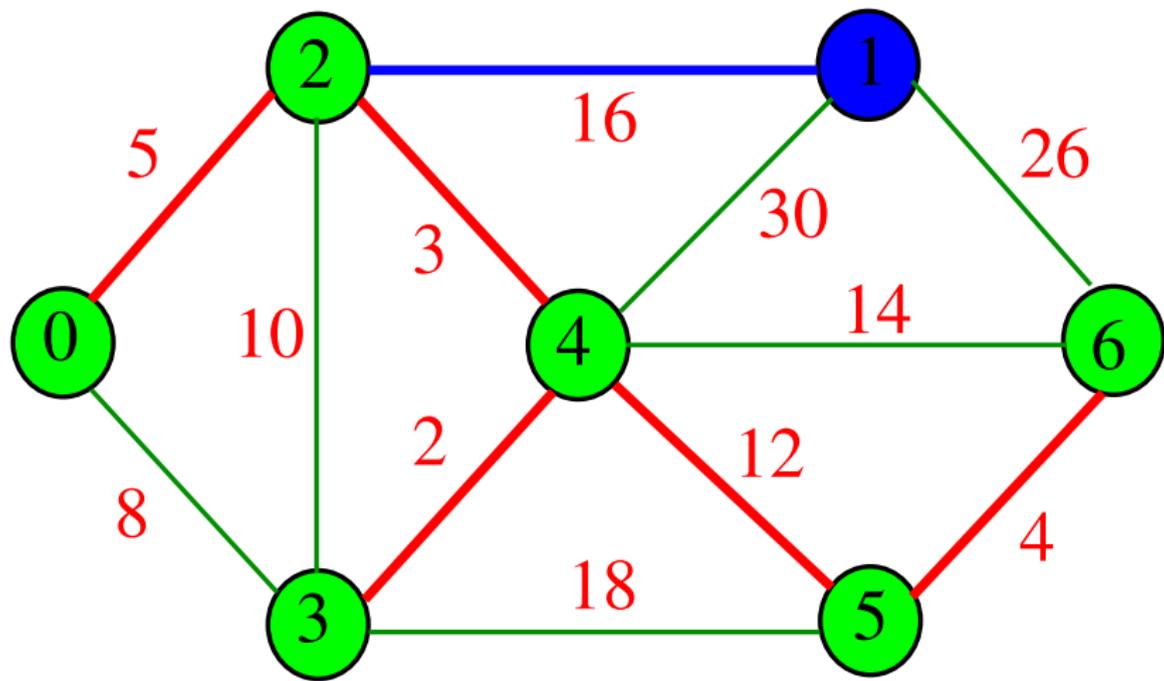
Algoritmo de Kruskal



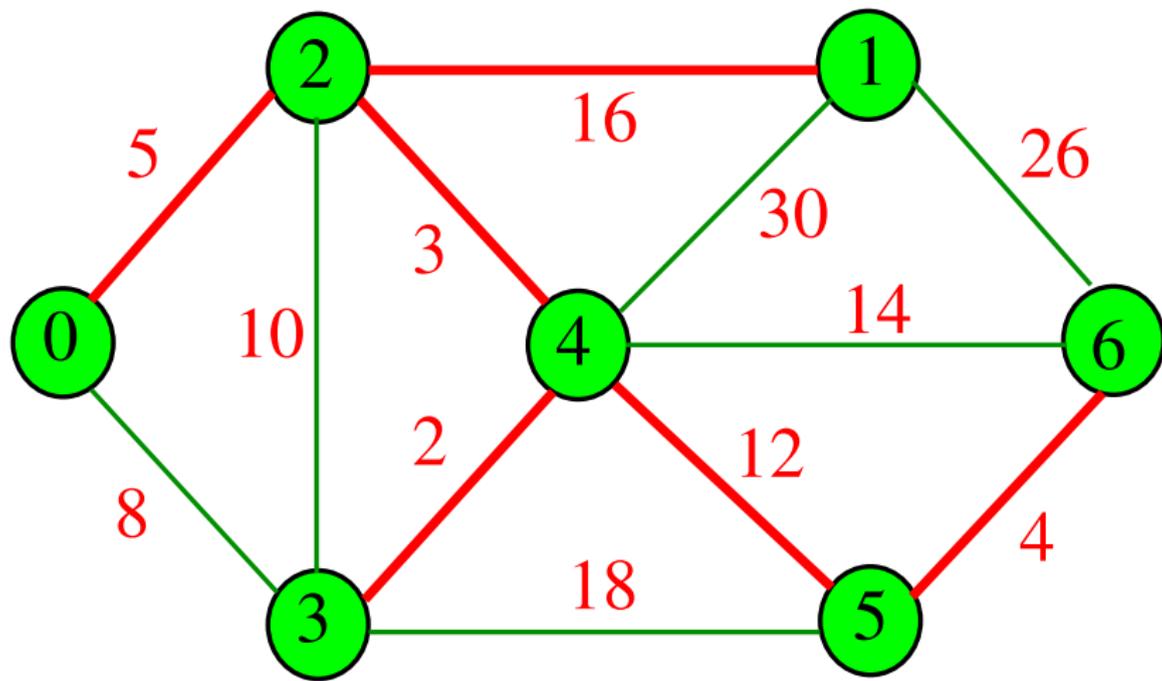
Algoritmo de Kruskal



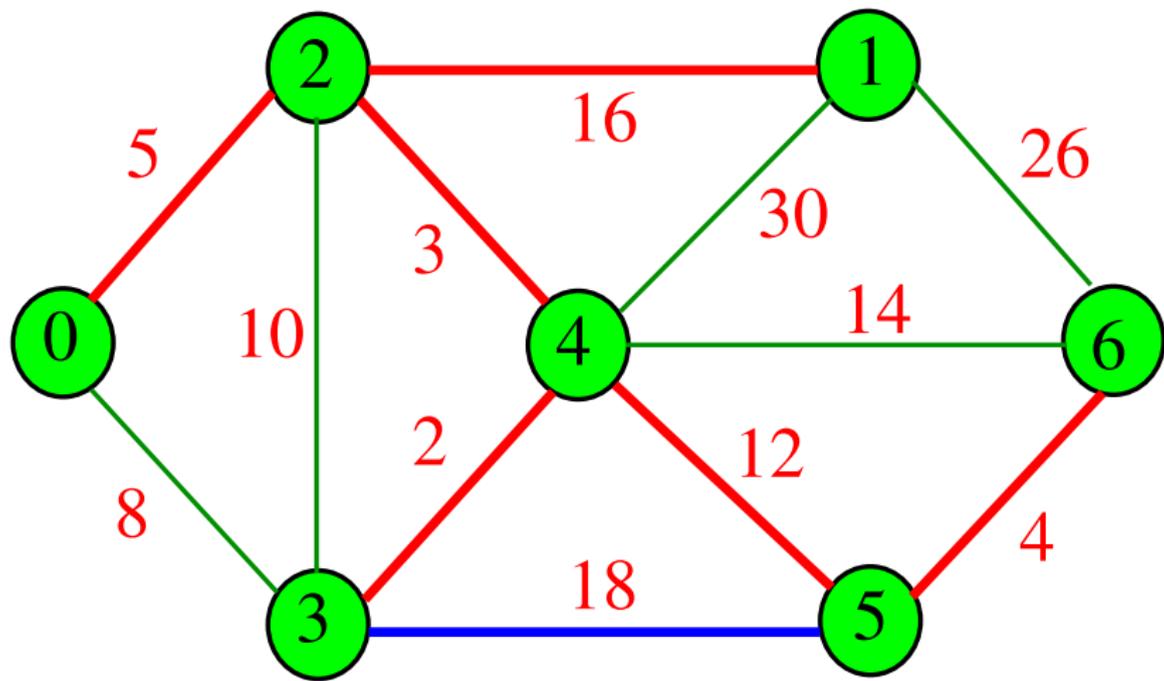
Algoritmo de Kruskal



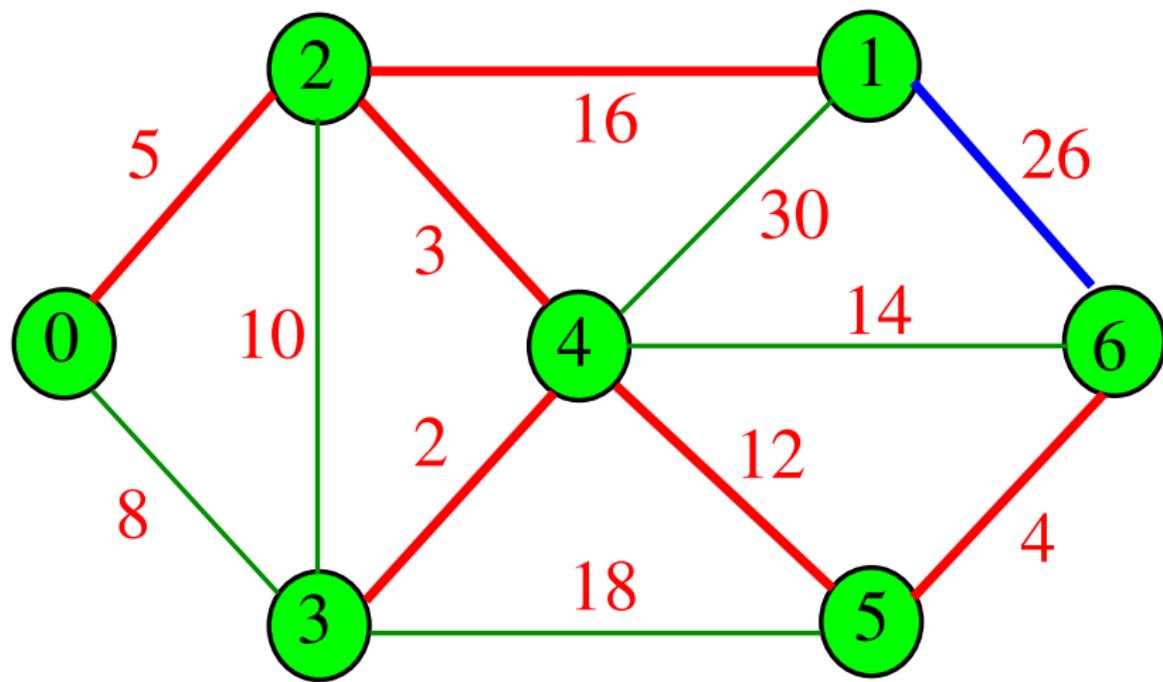
Algoritmo de Kruskal



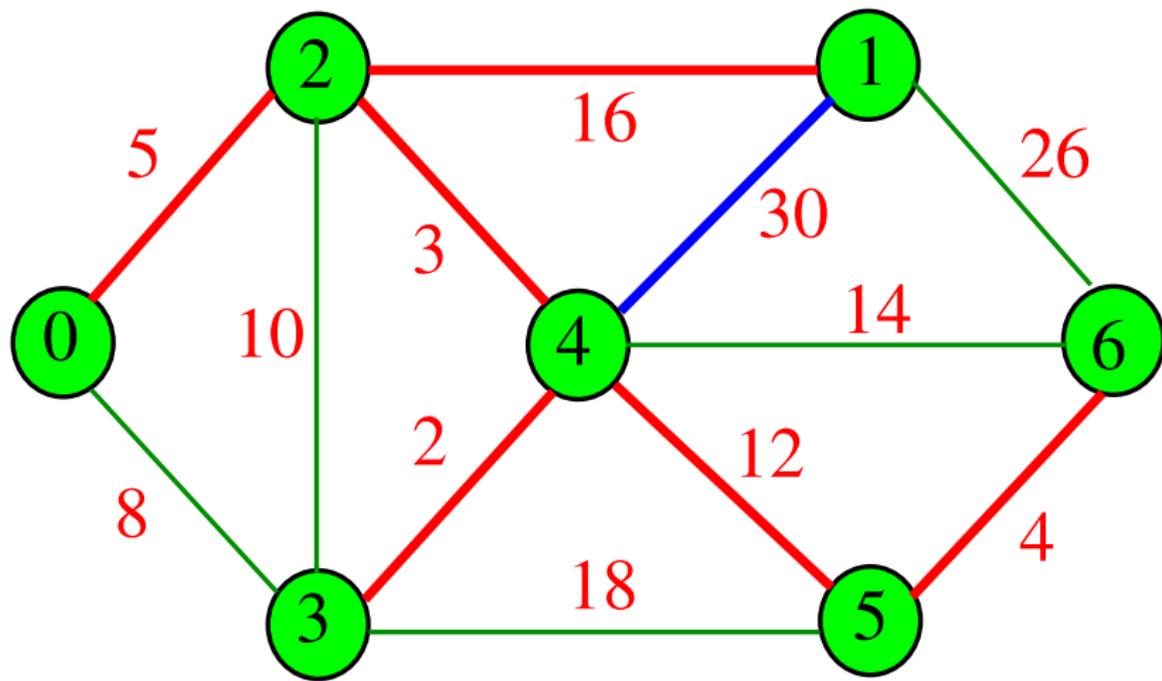
Algoritmo de Kruskal



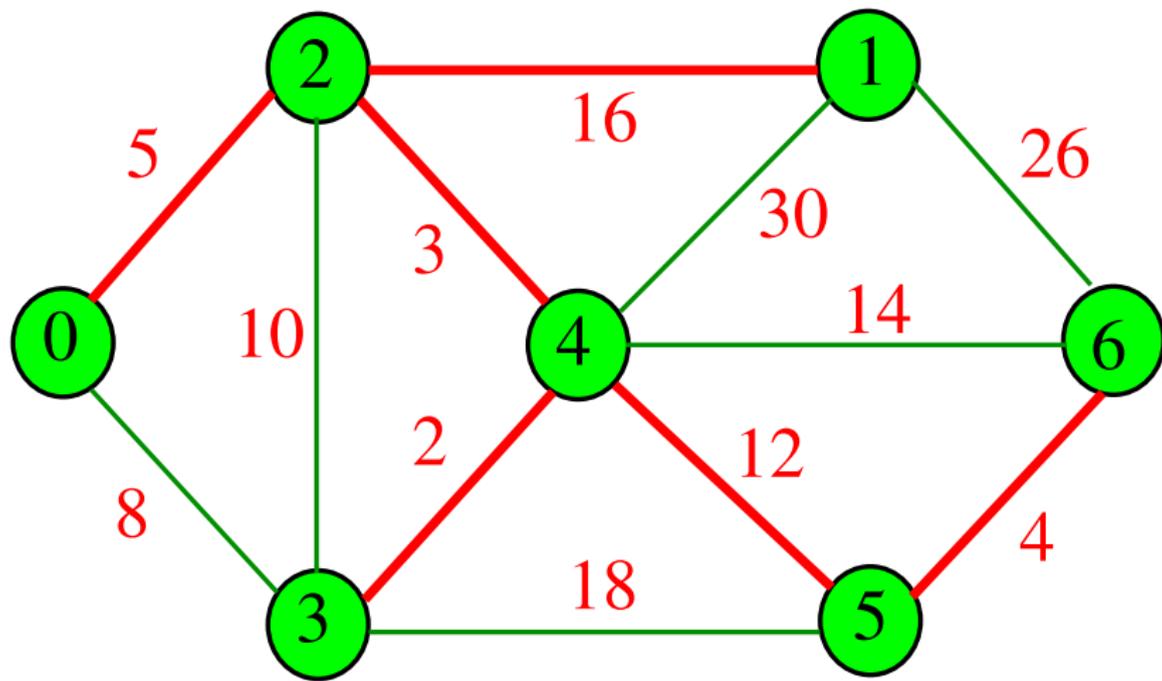
Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Union-Find

As as funções `UFinit`, `UFfind` e `UFunion` têm o seguinte papel:

- `UFinit(V)` inicializa a floresta de conjuntos disjuntos com cada árvore contendo apenas 1 elemento;
- `UFfind(v, w)` tem valor 0 se e somente se `v` e `w` estão em componentes distintas da floresta;
- `UFunion(v, w)` promove a união das componentes que contêm `v` e `w` respectivamente.

Implementações eficientes

A função recebe um grafo G com custos nas arestas e calcula uma MST em cada componente de G .

A função armazena as arestas das MSTs no vetor $mst[0..k-1]$ e devolve k .

```
#define maxE 10000
```

Kruskal

```
int GRAPHmstK (Graph G, Edge mst[]){
0  int i, k, E = G->A/2;
1  Edge a[maxE];
2  GRAPHedges(a, G);
3  sort(a, 0, E-1);
4  UFinit(G->V);
5  for (i = k = 0; i < E && k < G->V-1; i++)
6      if (!UFfind(a[i].v, a[i].w)) {
7          UFunion(a[i].v, a[i].w);
8          mst[k++] = a[i];
9      }
10 return k;
}
```

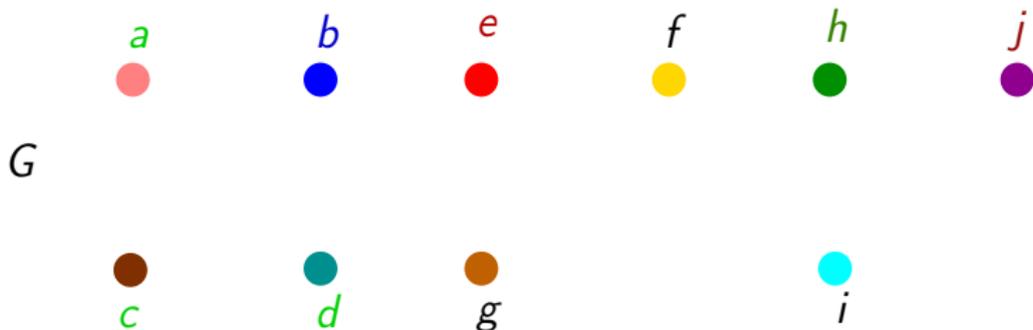
Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

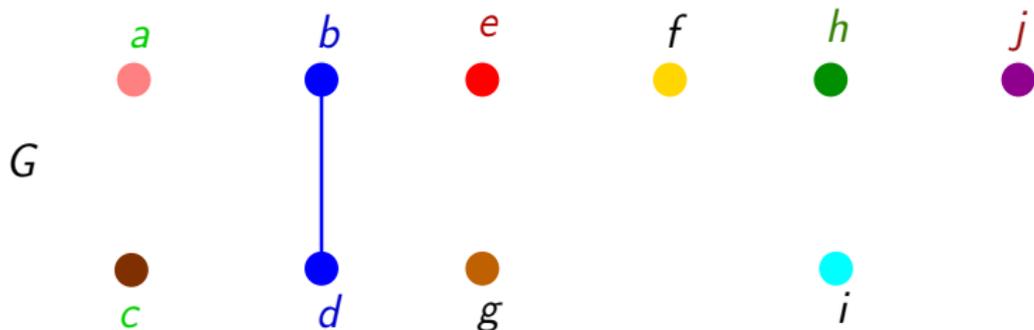
componentes

$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$...

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(b, d)

$\{a\}$

$\{b, d\}$

$\{c\}$

$\{e\}$

$\{f\}$

$\{g\}$

$\{h\}$

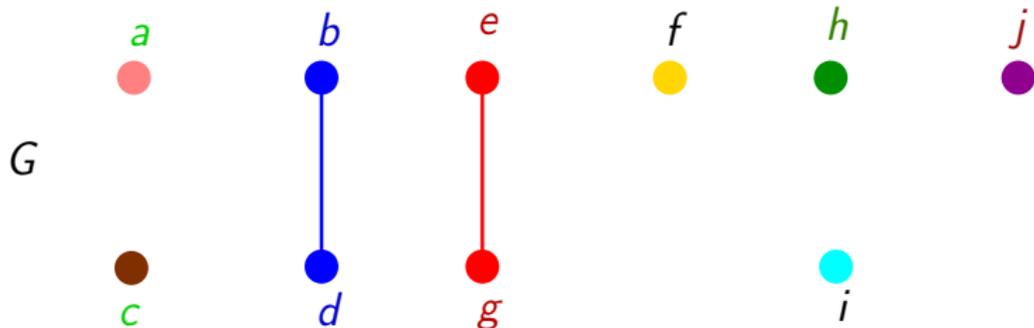
$\{i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

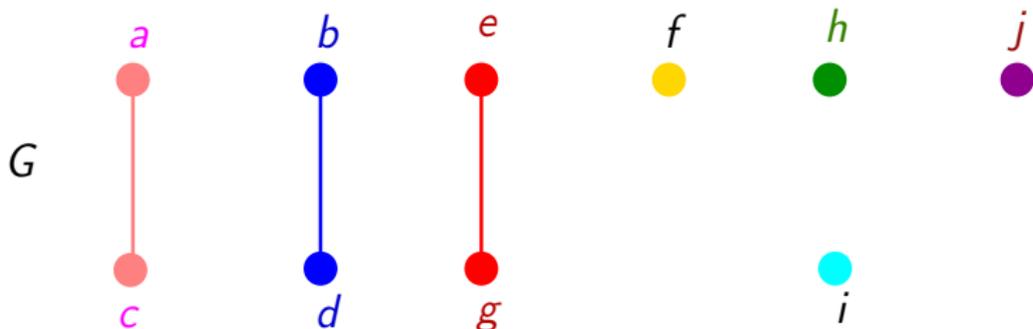
componentes

(e, g) $\{a\}$ $\{b, d\}$ $\{c\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(a, c)

$\{a, c\}$

$\{b, d\}$

$\{e, g\}$

$\{f\}$

$\{h\}$

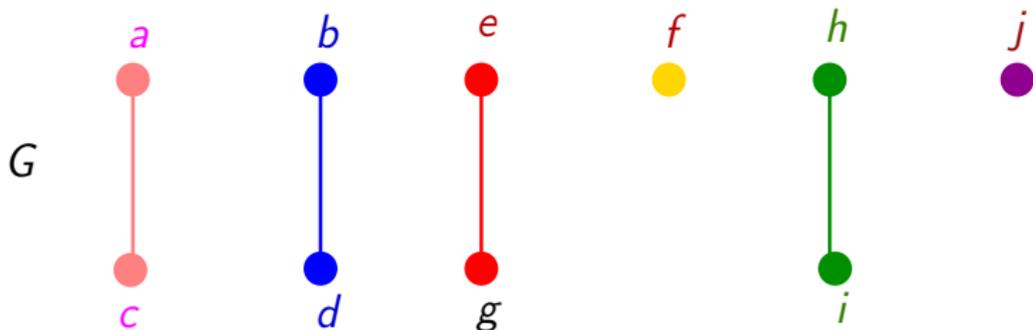
$\{i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(h, i)

$\{a, c\}$

$\{b, d\}$

$\{e, g\}$

$\{f\}$

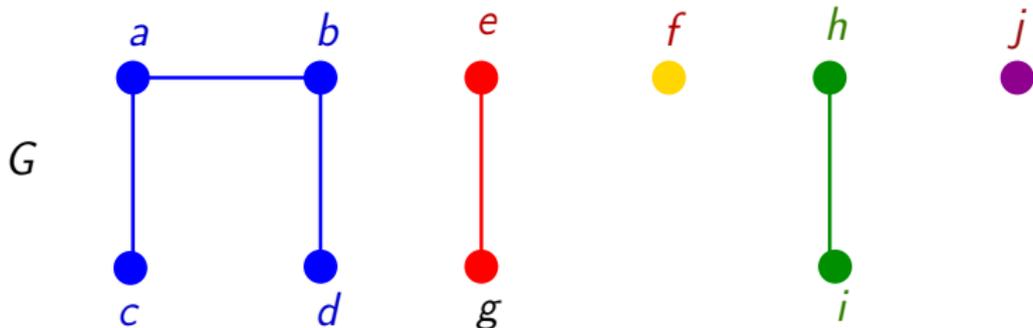
$\{h, i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(a, b)

$\{a, b, c, d\}$

$\{e, g\}$

$\{f\}$

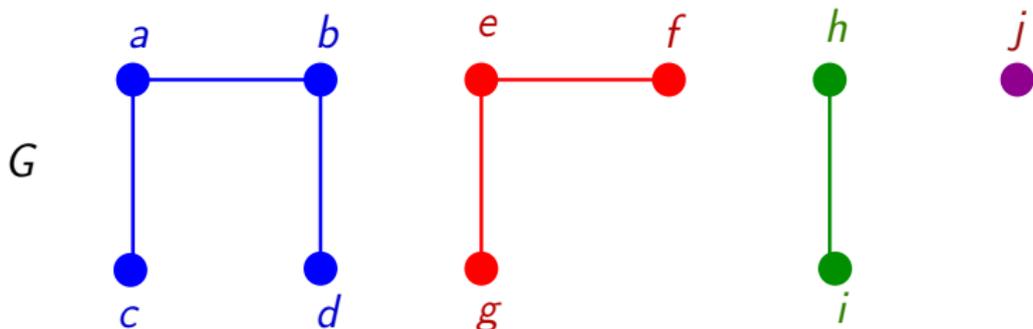
$\{h, i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

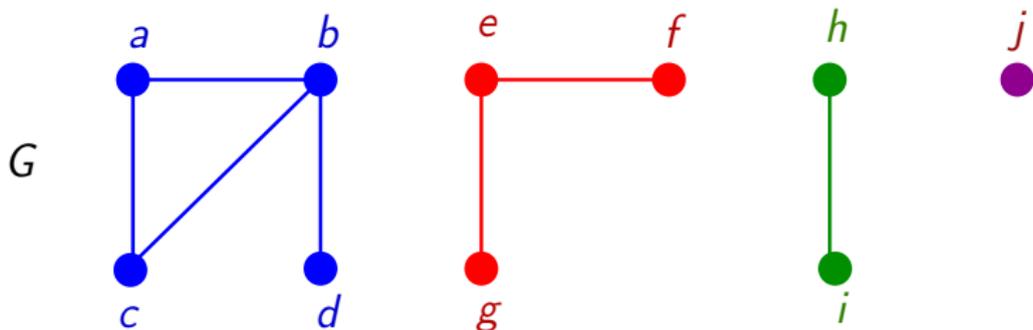
componentes

(e, f) $\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(b, c) $\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Operações básicas

\mathcal{S} coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

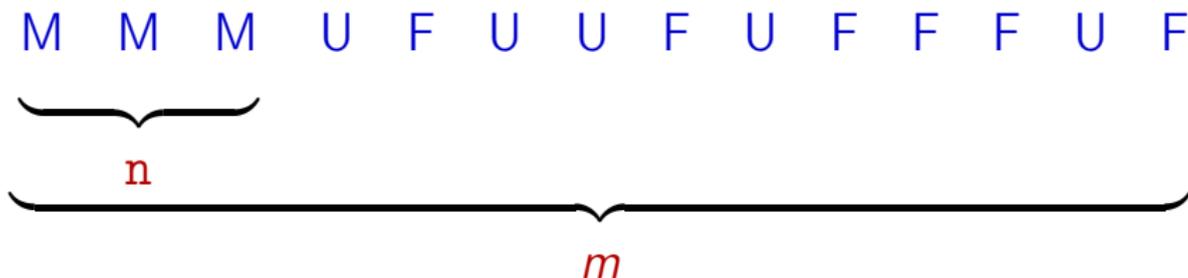
MAKESET: (x): x é elemento novo
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

UNION: (x, y): x e y em conjuntos diferentes
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} - \{S_x, S_y\} \cup \{S_x \cup S_y\}$
 x está em S_x e y está em S_y

FINDSET: (x): devolve representante do conjunto que contém x

Conjuntos disjuntos dinâmicos

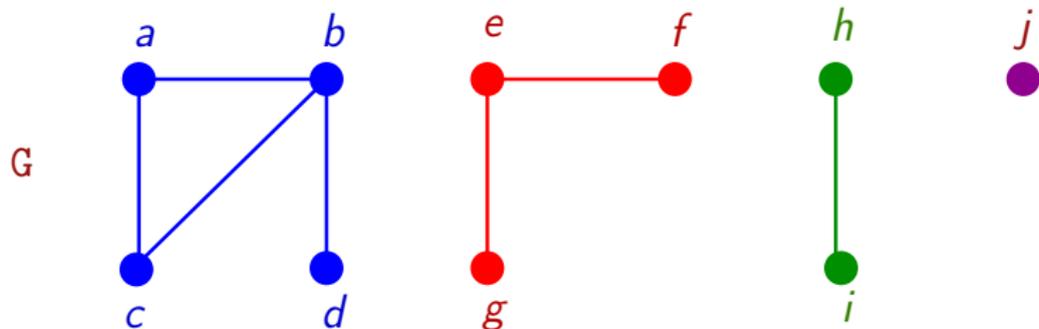
Seqüência de operações MAKESET, UNION, FINDSET



Que estrutura de dados usar?

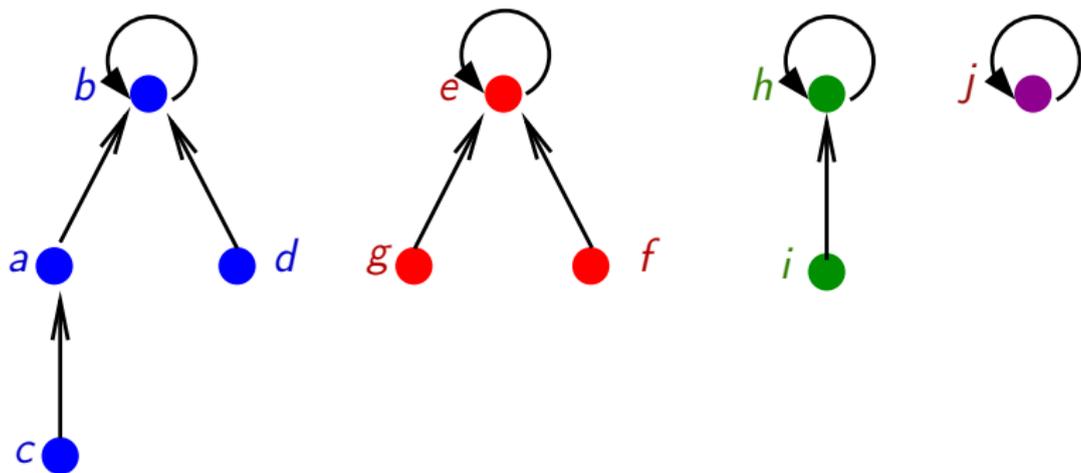
Compromissos (*trade-offs*).

Estrutura *disjoint-set forest*



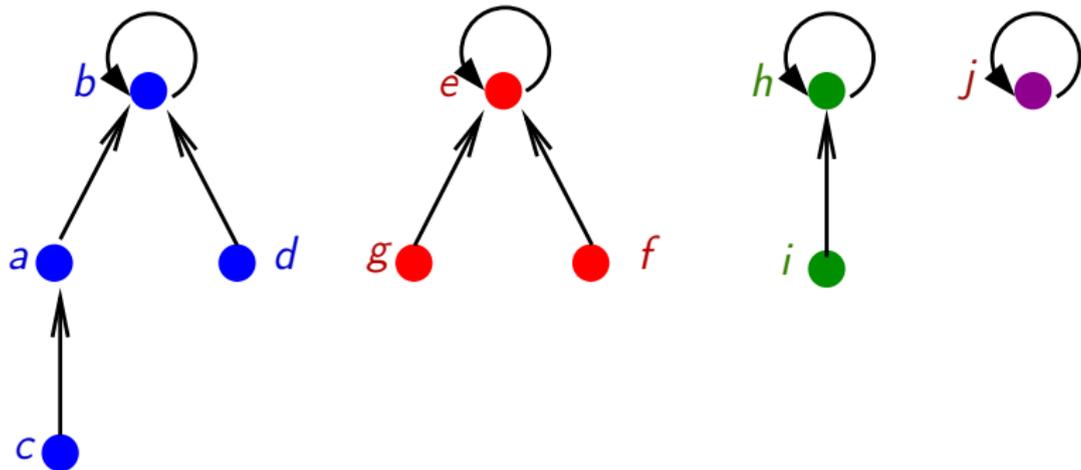
- cada conjunto tem uma *raiz*, que é o seu representante
- cada nó x tem um *pai*
- $\text{pai}[x] = x$ se e só se x é uma raiz

Estrutura *disjoint-set forest*



- cada conjunto tem uma *raiz*
- cada nó x tem um *pai*
- $\text{pai}[x] = x$ se e só se x é uma raiz

MakeSet₀ e FindSet₀



MAKESET₀ (*x*)

1 $\text{pai}[x] \leftarrow x$

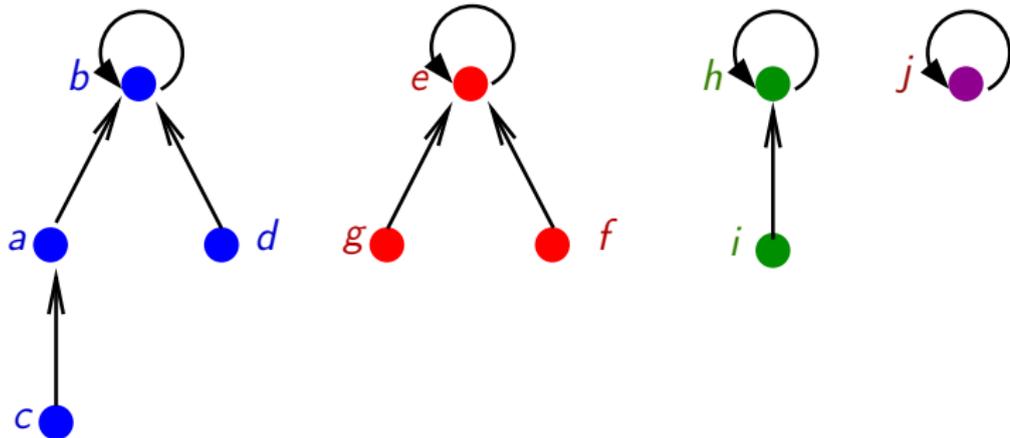
FINDSET₀ (*x*)

1 enquanto $\text{pai}[x] \neq x$ faça

2 $x \leftarrow \text{pai}[x]$

3 devolva *x*

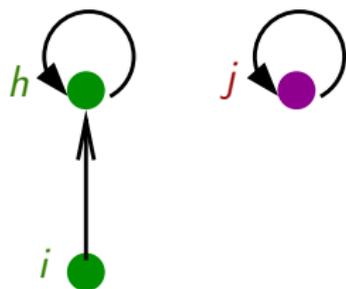
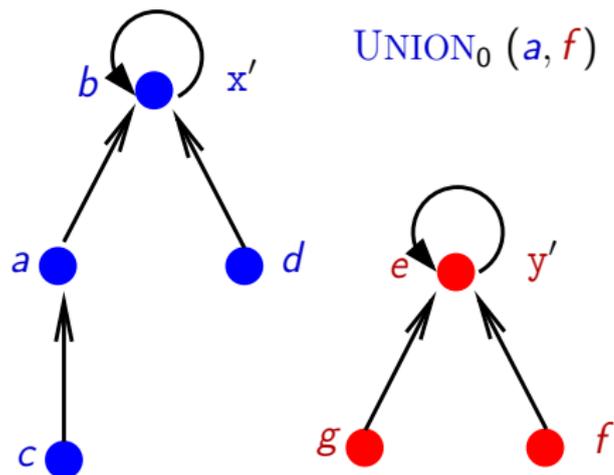
Union₀



UNION₀ (x, y)

- 1 $x' \leftarrow \text{FINDSET}_0(x)$
- 2 $y' \leftarrow \text{FINDSET}_0(y)$
- 3 $\text{pai}[y'] \leftarrow x'$

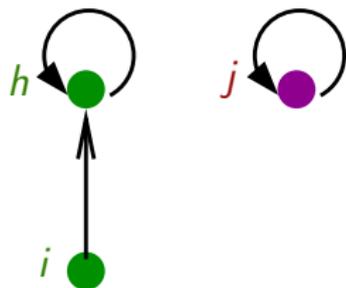
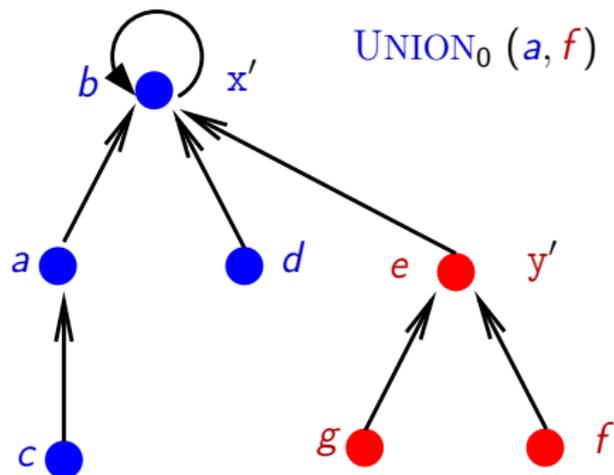
Union₀



$\text{UNION}_0(x, y)$

- 1 $x' \leftarrow \text{FINDSET}_0(x)$
- 2 $y' \leftarrow \text{FINDSET}_0(y)$
- 3 $\text{pai}[y'] \leftarrow x'$

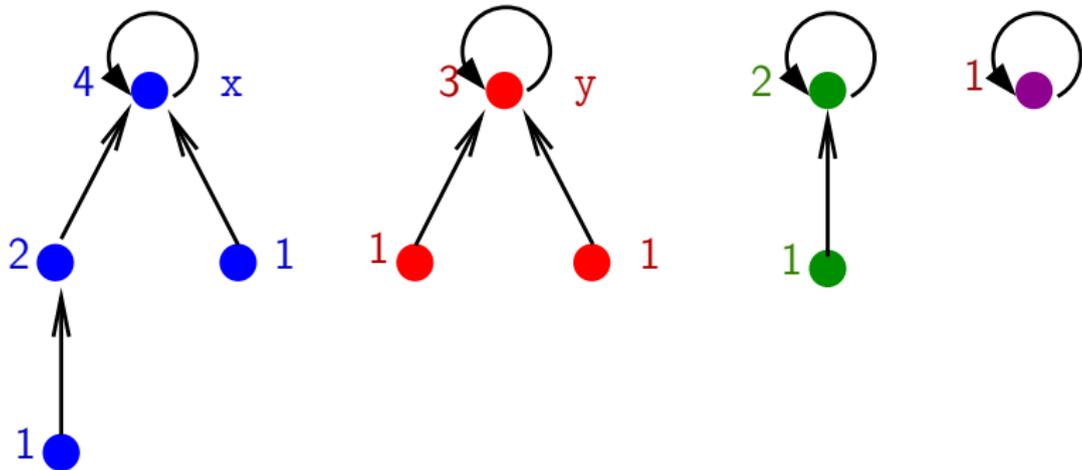
Union₀



UNION₀ (x, y)

- 1 $x' \leftarrow \text{FINDSET}_0(x)$
- 2 $y' \leftarrow \text{FINDSET}_0(y)$
- 3 $\text{pai}[y'] \leftarrow x'$

Melhoramento 1: *union by rank*



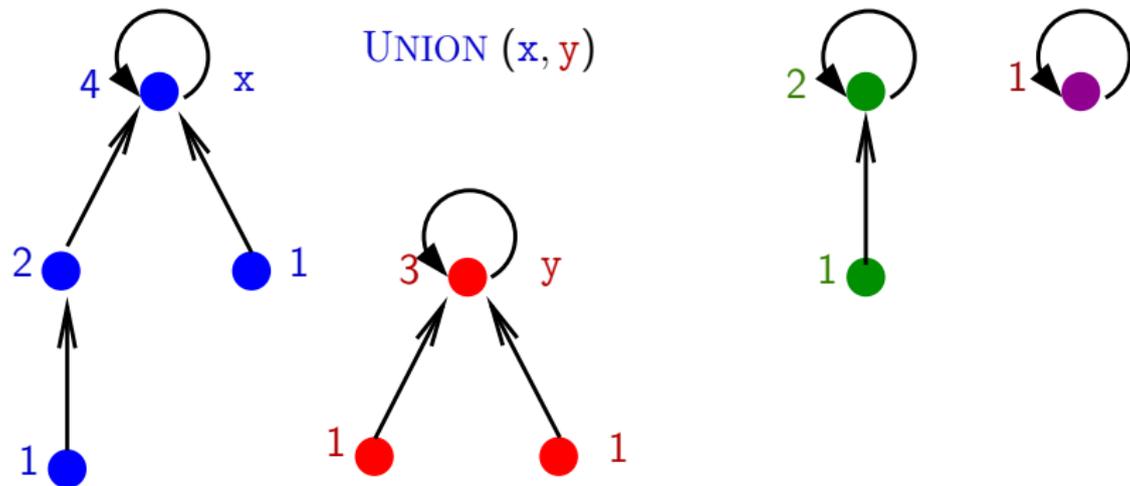
$\text{rank}[x] = \text{no. de nós de } x$

MAKESET (x)

1 $\text{pai}[x] \leftarrow x$

2 $\text{rank}[x] \leftarrow 1$

Melhoramento 1: *union by rank*

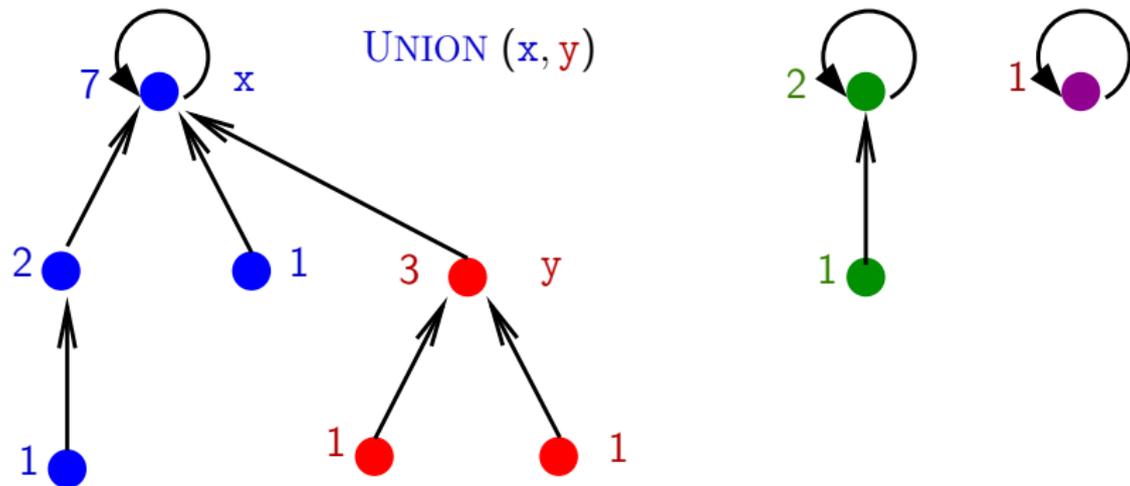


$\text{rank}[x]$ = posto de nós $\text{MAKESET}(x)$
de x

1 $\text{pai}[x] \leftarrow x$

2 $\text{rank}[x] \leftarrow 1$

Melhoramento 1: *union by rank*

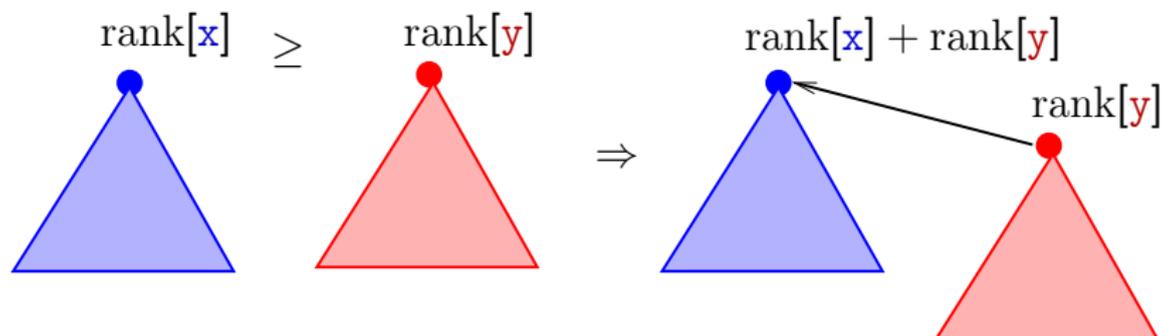


$\text{rank}[x] = \text{posto de nós}$ MAKESET (x)
de x

1 pai[x] \leftarrow x

2 rank[x] \leftarrow 1

Melhoramento 1: *union by rank*



Melhoramento 1: *union by rank*

UNION (x, y) \triangleright com “union by rank”

1 $x' \leftarrow \text{FINDSET}(x)$

2 $y' \leftarrow \text{FINDSET}(y)$ \triangleright supõe que $x' \neq y'$

3 **se** $\text{rank}[x'] > \text{rank}[y']$

4 **então** $\text{pai}[y'] \leftarrow x'$

5 $\text{rank}[y'] \leftarrow \text{rank}[y'] + \text{rank}[x']$

6 **senão** $\text{pai}[x'] \leftarrow y'$

7 $\text{rank}[x'] = \text{rank}[x'] + \text{rank}[y']$

Consumo de tempo

Se conjuntos disjuntos são representados através de *disjoint-set forest* com *union by rank*, então uma seqüência de m operações MAKESET, UNION e FINDSET, sendo que n são MAKESET, consome tempo $O(m \lg n)$.

UFinit e UFfind

```
static Vertex cor[maxV];
static int sz[maxV];
void UFinit (int N) {
    Vertex v;
    for (v = 0; v < N; v++) {
        cor[v] = v;
        sz[v] = 1;
    }
}
int UFfind (Vertex v, Vertex w) {
    return (find(v) == find(w));
}
```

find

```
static Vertex find(Vertex v) {  
    while (v != cor[v])  
        v = cor[v];  
    return v;  
}
```

UFunction

```
void UFunction (Vertex v0, Vertex w0) {  
    Vertex v = find(v0), w = find(w0);  
    if (v == w) return;  
    if (sz[v] < sz[w]) {  
        cor[v] = w;  
        sz[w] += sz[v];  
    }  
    else {  
        cor[w] = v;  
        sz[v] += sz[w];  
    }  
}
```

Consumo de tempo

Graças à maneira com duas *union-find trees* são unidas por `UFunion`, a altura de cada union-find tree é limitada por $\lg V$.

Assim, `UFfind` e `UFunion` consomem tempo $O(\lg V)$.

Podemos supor que a função `sort` consome tempo proporcional a $\Theta(E \lg E)$.

O restante do código de `GRAPHmstK` consome tempo proporcional a $O(E \lg V)$.

Conclusão

O consumo de tempo da função `GRAPHmstK` é $O(E \lg V)$.

Algoritmos

função	consumo de tempo	observação
<code>bruteforcePrim</code>	$O(V^3)$	alg. de Prim
<code>GRAPHmstP1</code>	$O(V^2)$	grafos densos matriz adjacência
<code>GRAPHmstP1</code>	$O(E \lg V)$	grafos esparsos listas de adjacência
<code>bruteforceKruskal</code>	$O(V^3)$	alg. de Kruskal
<code>GRAPHmstK</code>	$O(E \lg V)$	alg. de Kruskal <i>disjoint-set forest</i>

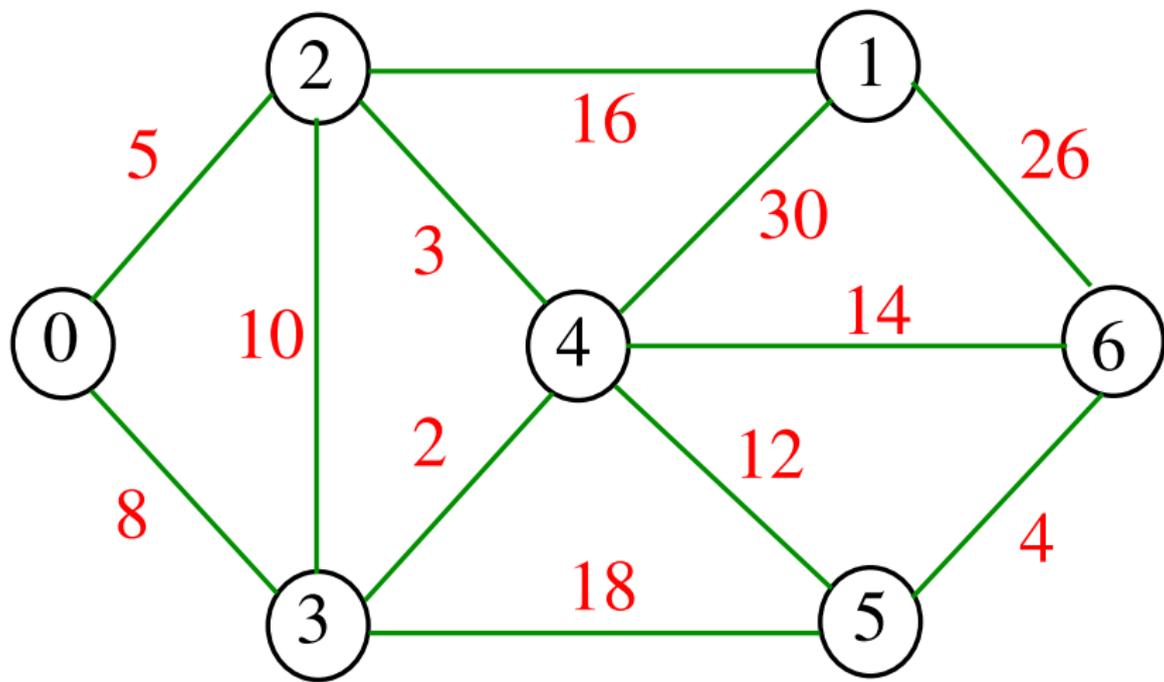
Os algoritmos funcionam para arestas com **custos**

quaisquer, 2012

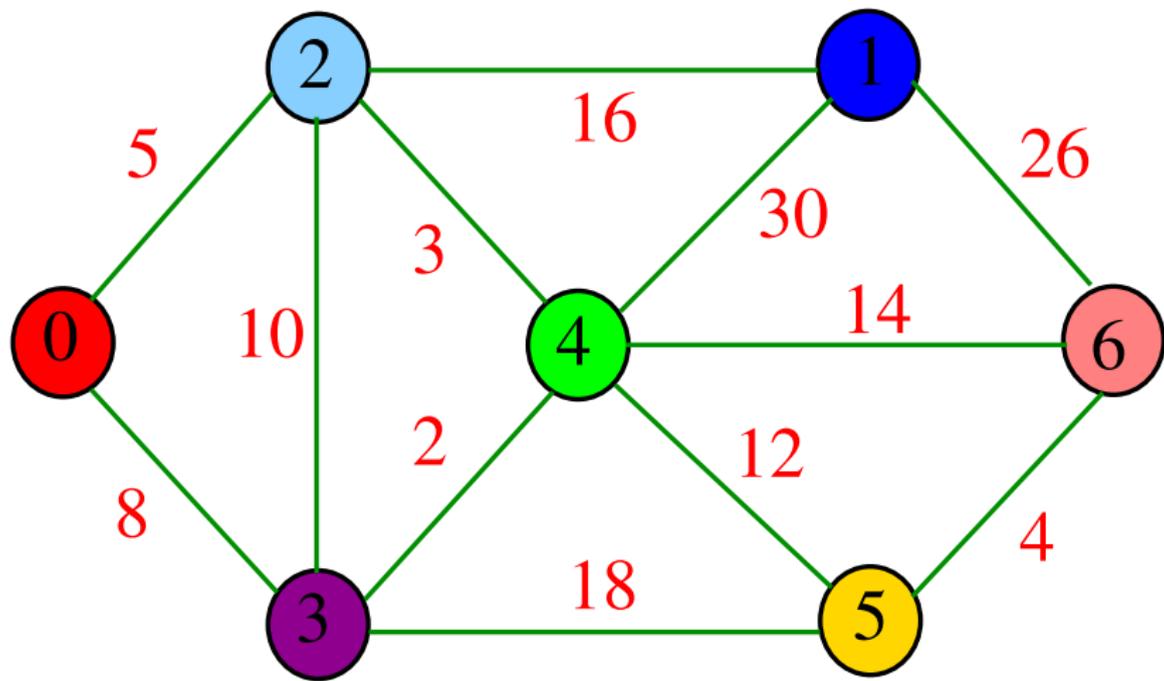
Algoritmo de Boruvka

S 20.3

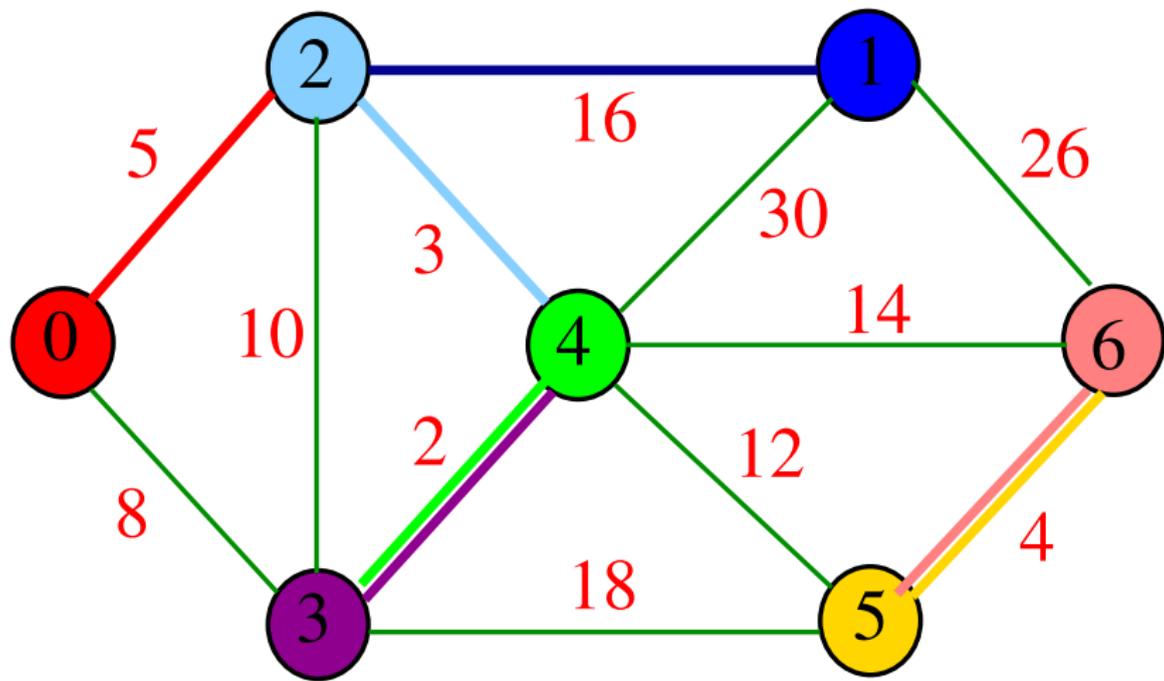
Algoritmo de Boruvka



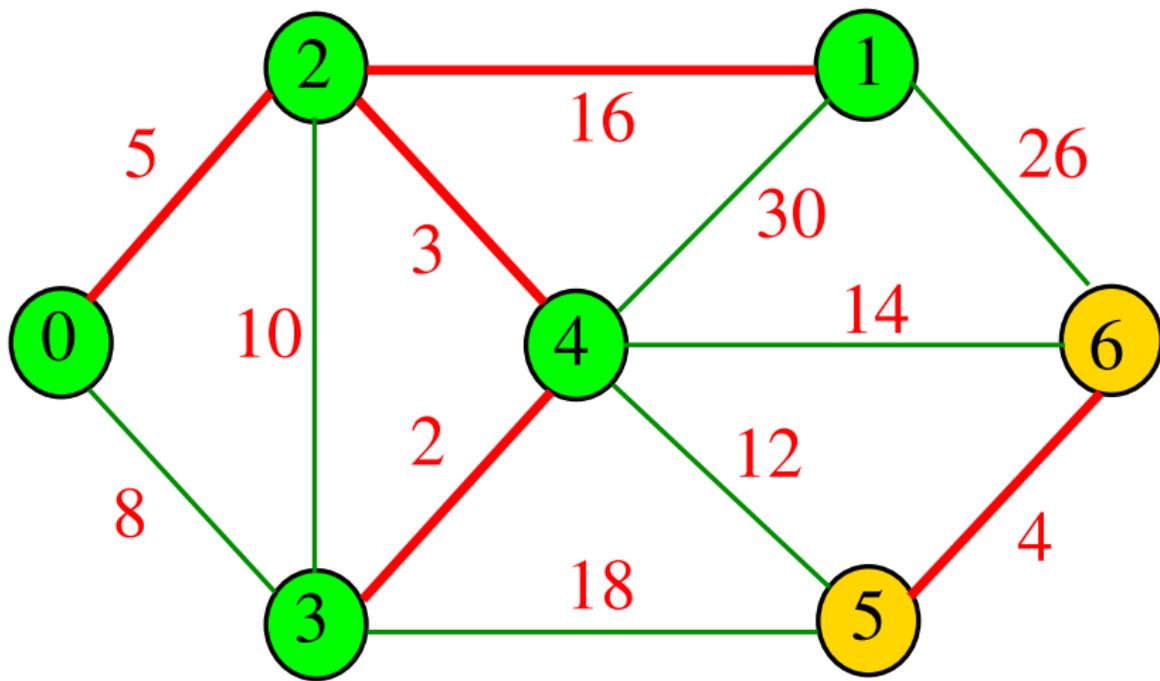
Algoritmo de Boruvka



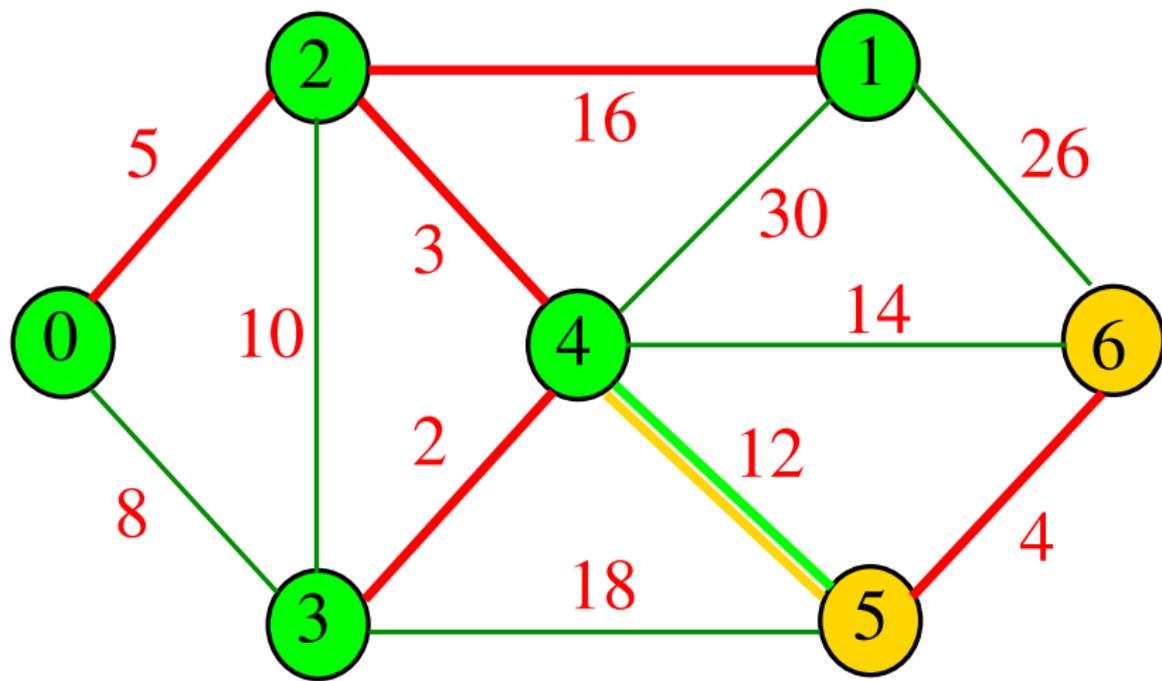
Algoritmo de Boruvka



Algoritmo de Boruvka



Algoritmo de Boruvka



Algoritmo de Boruvka

