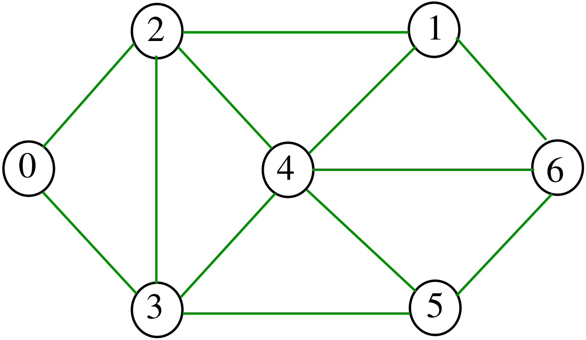
Árvores geradoras de grafos

Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um grafo é qualquer subárvore que contenha **todos** os vértices

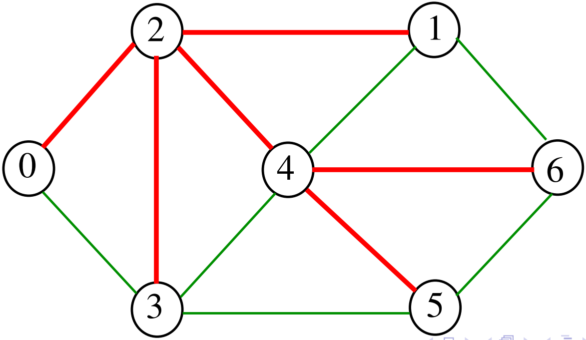
Exemplo:



Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um grafo é qualquer subárvore que contenha **todos** os vértices

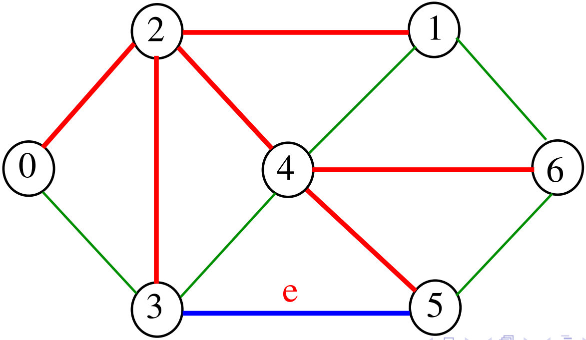
Exemplo: as arestas em vermelho formam uma árvore geradora



Primeira propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta e de G que não esteja em T, T+e tem um **único ciclo** não-trivial, o **ciclo fundamental** $C(\mathtt{T}, \mathtt{e})$.

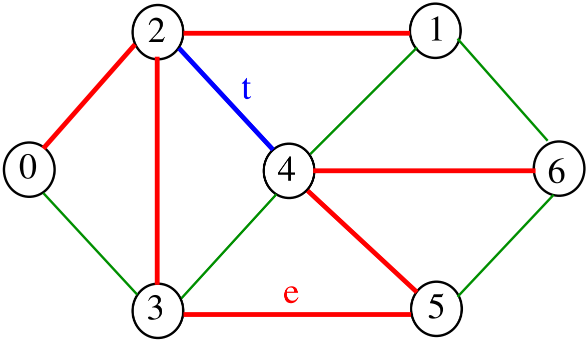
Exemplo: T+e



Primeira propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G. Para qualquer aresta $t \in C(T, e)$, T+e-t é uma **árvore geradora**

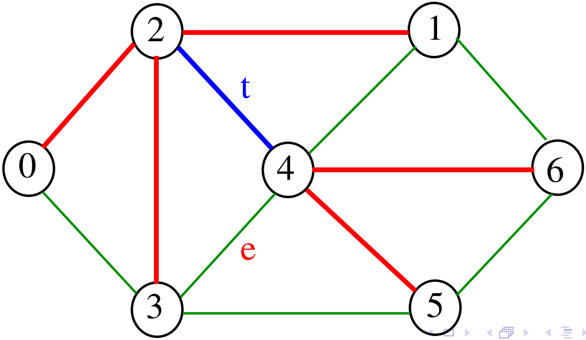
Exemplo: T+e-t



Segunda propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta t de T, T-t tem duas componentes. O corte em G que separa essas componentes é o **corte fundamental** $D(\mathtt{T}, \mathtt{t})$.

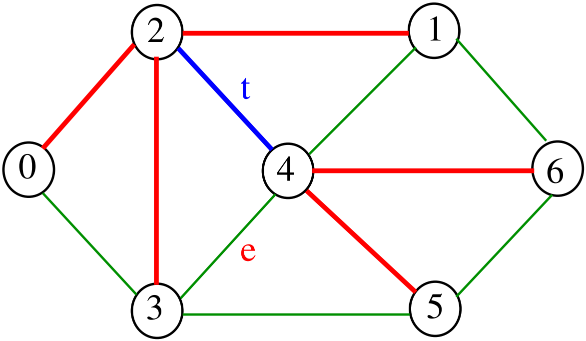
Exemplo: T-t $\{0, 1, 2, 3\} \xrightarrow{D(\mathtt{T},\mathtt{t})} \{4, 5, 6\}$



Segunda propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta t de T, se $e \in D(T, t)$ então $T - t + e$ é uma árvore geradora.

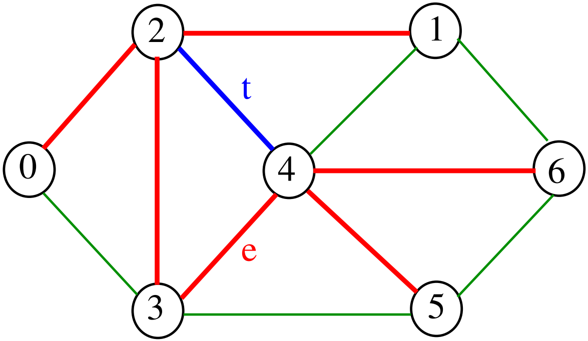
Exemplo: T-t



Segunda propriedade da troca de arestas

Seja $\mathtt{T}$ uma árvore geradora de um grafo $\mathtt{G}$
Para qualquer aresta $\mathtt{t}$ de $\mathtt{T}$, se $\mathtt{e} \in D(\mathtt{T}, \mathtt{t})$ então $\mathtt{T} - \mathtt{t} + \mathtt{e}$ é uma árvore geradora.

Exemplo: T-t+e



Propriedade fundamental

Se `T` é árvore geradora de `G`, `t` é uma aresta de `T` e `e` é uma aresta fora de `T`, então

Propriedade fundamental

Se $\mathtt{T}$ é árvore geradora de $\mathtt{G}$, $\mathtt{t}$ é uma aresta de $\mathtt{T}$ e $\mathtt{e}$ é uma aresta fora de $\mathtt{T}$, então

$$\mathtt{t} \in C(\mathtt{T}, \mathtt{e}) \iff \mathtt{e} \in D(\mathtt{T}, \mathtt{t}).$$

Propriedade fundamental

Se $\mathtt{T}$ é árvore geradora de $\mathtt{G}$, $\mathtt{t}$ é uma aresta de $\mathtt{T}$ e $\mathtt{e}$ é uma aresta fora de $\mathtt{T}$, então

$$\mathtt{t} \in C(\mathtt{T}, \mathtt{e}) \iff \mathtt{e} \in D(\mathtt{T}, \mathtt{t}).$$

Dem: São equivalentes

- $\mathtt{t} \in C(\mathtt{T}, \mathtt{e})$
- $\mathtt{t}$ está no caminho em $\mathtt{T}$ que liga as pontas de $\mathtt{e}$
- $\mathtt{T} - \mathtt{t}$ não tem caminho entre as pontas de $\mathtt{e}$
- $\mathtt{e} \in D(\mathtt{T}, \mathtt{t})$.

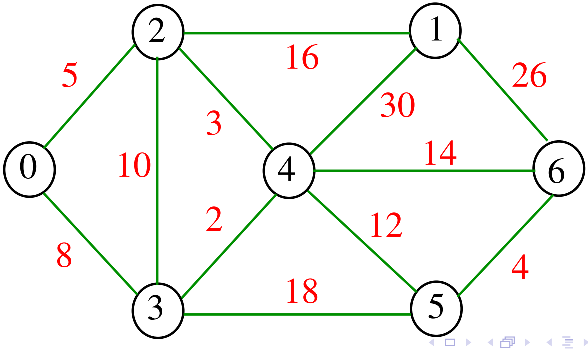
Árvores geradoras de custo mínimo

S 20.1 e 20.2

Árvores geradoras mínimas

Uma **árvore geradora mínima** (= *minimum spanning tree*), ou MST, de um grafo com custos nas arestas é qualquer árvore geradora do grafo que tenha custo mínimo

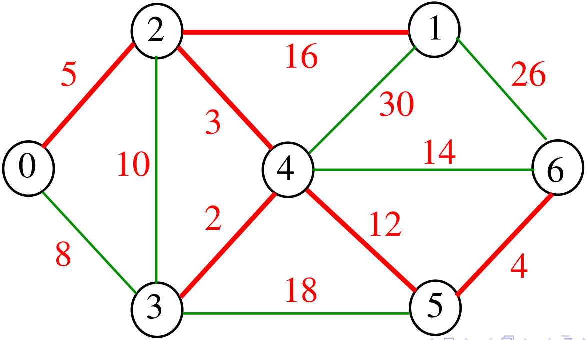
Exemplo: um grafo com custos nas arestas



Árvores geradoras mínimas

Uma **árvore geradora mínima** (= *minimum spanning tree*), ou MST, de um grafo com custos nas arestas é qualquer árvore geradora do grafo que tenha custo mínimo

Exemplo: MST de custo 42

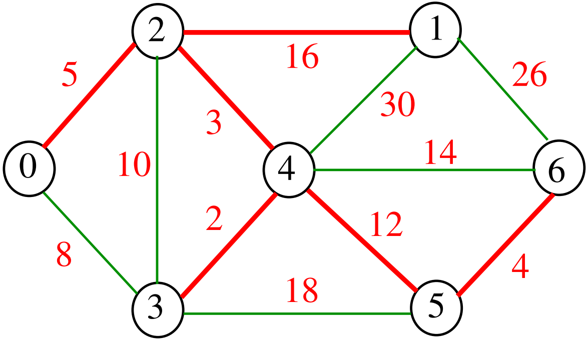


Problema MST

Problema: Encontrar uma MST de um grafo G com custos nas arestas

O problema tem solução se e somente se o grafo G é conexo

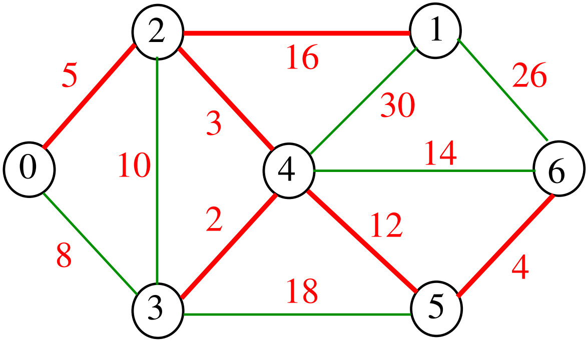
Exemplo: MST de custo 42



Propriedade dos ciclos

Condição de Otimalidade: Se `T` é uma MST então toda aresta `e` fora de `T` tem custo máximo dentre as arestas do cilo fundamental `T`, `e`.

Exemplo: MST de custo 42



Demonstração da recíproca

Seja T uma árvore geradora satisfazendo a condição de otimalidade.

Vamos mostrar que T é uma MST.

Seja M uma MST tal que o número de arestas comuns entre T e M seja máximo.

Se $T = M$ não há o que demonstrar.

Suponha que $T \neq M$ e seja e uma aresta de custo mínimo dentre as arestas que estão em M mas não estão em T.

Seja d uma aresta qualquer que **não está** em M mas **está** no ciclo fundamental $C(T, e)$.

Demonstração da recíproca

Seja $\mathtt{T}$ uma árvore geradora satisfazendo a condição de otimalidade.

Vamos mostrar que $\mathtt{T}$ é uma MST.

Seja $\mathtt{M}$ uma MST tal que o número de arestas comuns entre $\mathtt{T}$ e $\mathtt{M}$ seja máximo.

Se $\mathtt{T} = \mathtt{M}$ não há o que demonstrar.

Suponha que $\mathtt{T} \neq \mathtt{M}$ e seja $\mathtt{e}$ uma aresta de custo mínimo dentre as arestas que estão em $\mathtt{M}$ mas não estão em $\mathtt{T}$.

Seja $\mathtt{d}$ uma aresta qualquer que **não está** em $\mathtt{M}$ mas **está** no ciclo fundamental $C(\mathtt{T}, \mathtt{e})$.

Continuação

Logo, $\texttt{custo}(\texttt{d}) \leq \texttt{custo}(\texttt{e}) \quad (1).$

Seja $\texttt{f}$ uma aresta qualquer em $C(\texttt{M}, \texttt{d}) - \texttt{T}$.

Como $\texttt{M}$ é uma MST, $\texttt{custo}(\texttt{f}) \leq \texttt{custo}(\texttt{d}) \quad (2).$

Pela escolha de $\texttt{e}$, $\texttt{custo}(\texttt{e}) \leq \texttt{custo}(\texttt{f}) \quad (3).$

Juntando (1), (2) e (3), vem que

$$\texttt{custo}(\texttt{d}) = \texttt{custo}(\texttt{f}) = \texttt{custo}(\texttt{e})$$

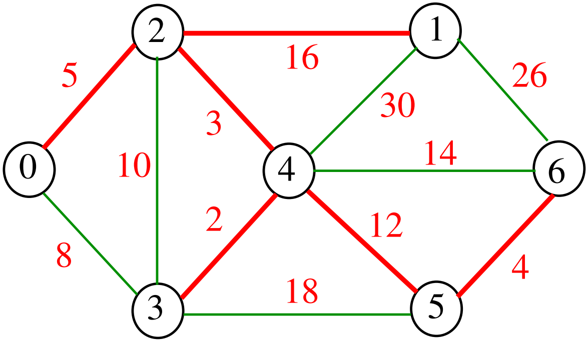
Mas então, $\texttt{M}-\texttt{f}+\texttt{d}$ é uma MST que tem o mesmo custo que $\texttt{M}$, logo é mínima. Por outro lado, tem uma aresta a mais em comum com $\texttt{T}$ do que $\texttt{M}$. Isso contradiz a escolha de $\texttt{M}$.

Portanto, $\texttt{T} = \texttt{M}$, o que mostra que $\texttt{T}$ é uma MST.

Propriedade dos cortes

Condição de Otimalidade: T é uma MST se e somente se cada aresta t de T é uma aresta mínima no corte fundamental T, t.

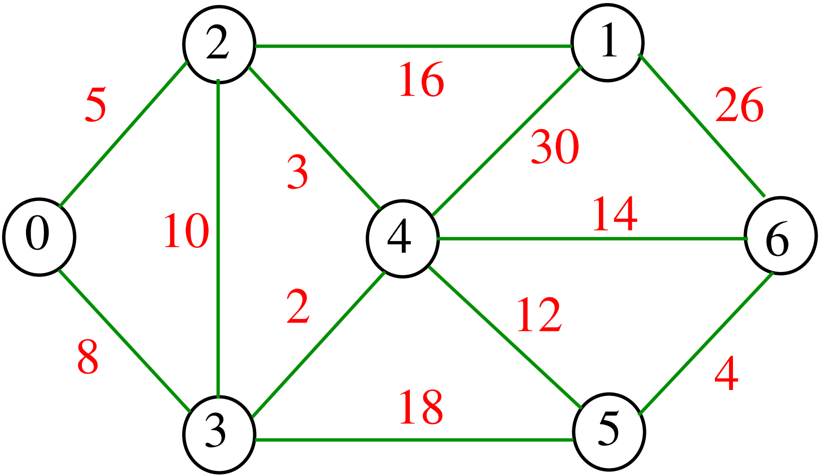
Exemplo: MST de custo 42



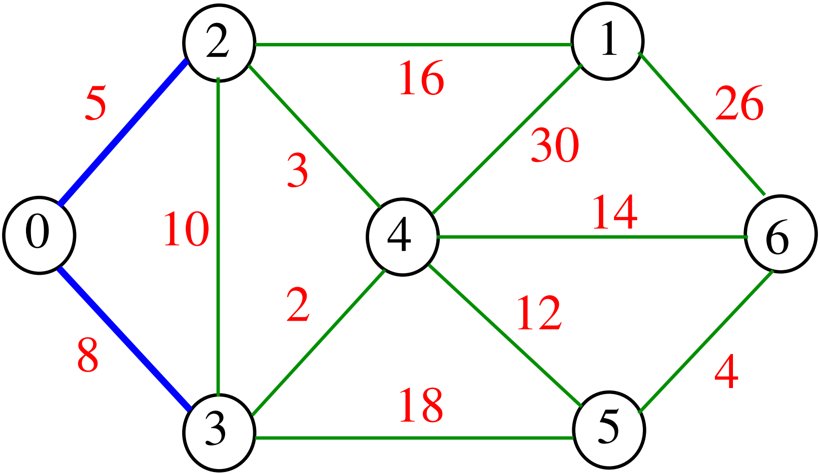
Algoritmo de Prim

S 20.3

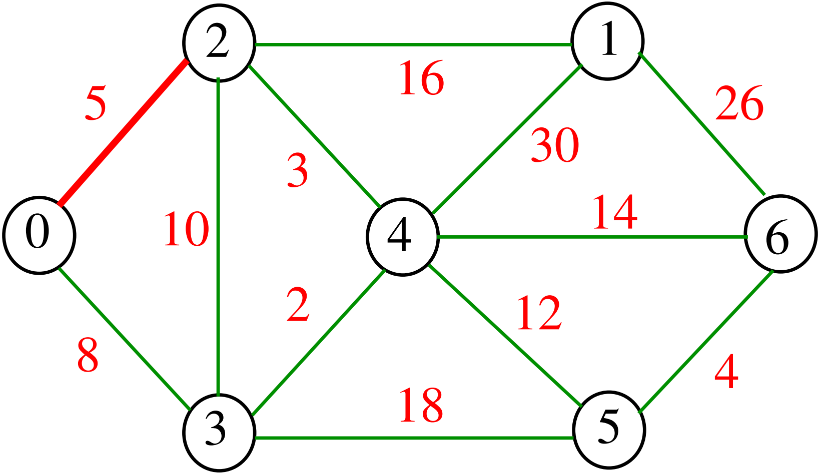
Simulação



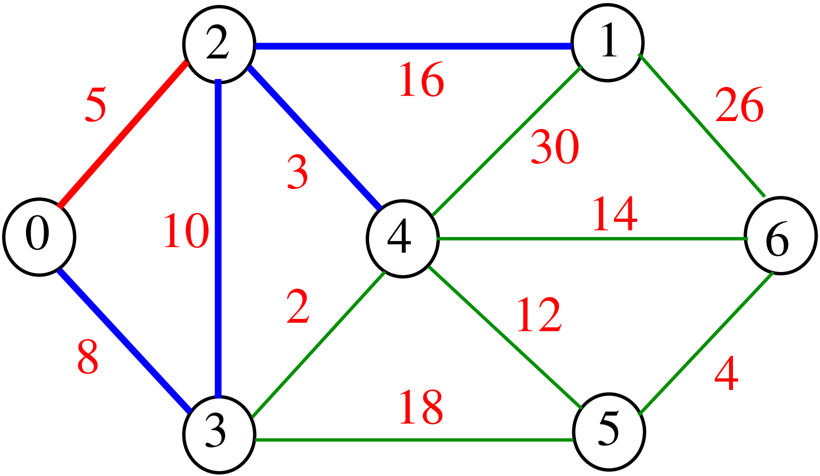
Simulação



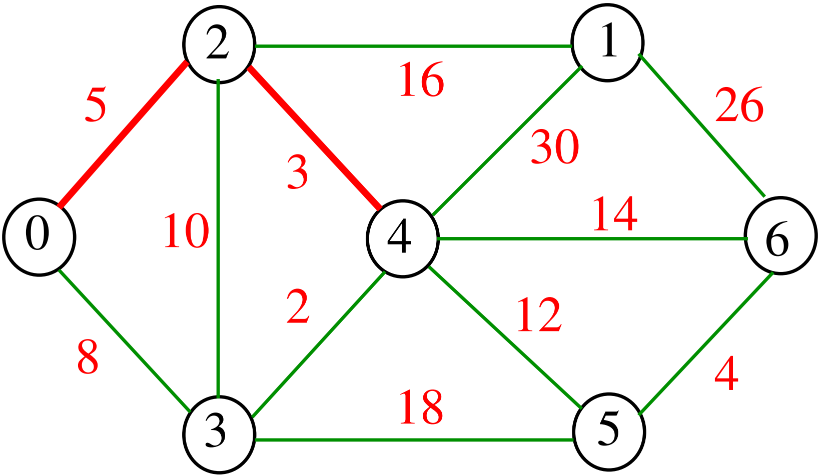
Simulação



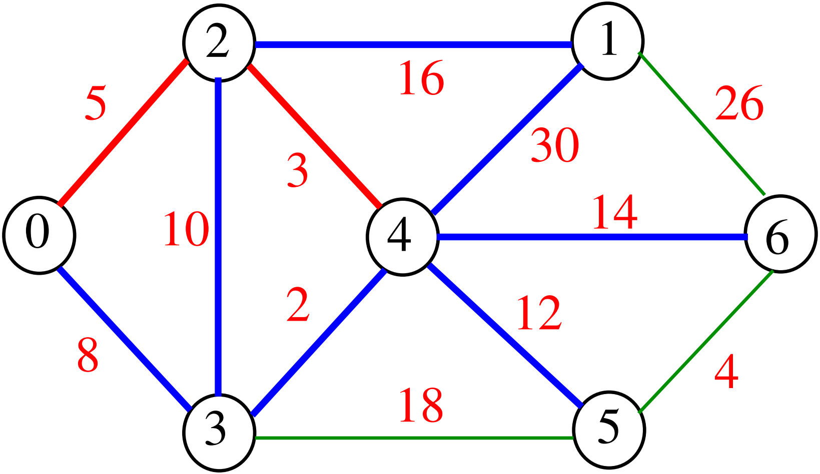
Simulação



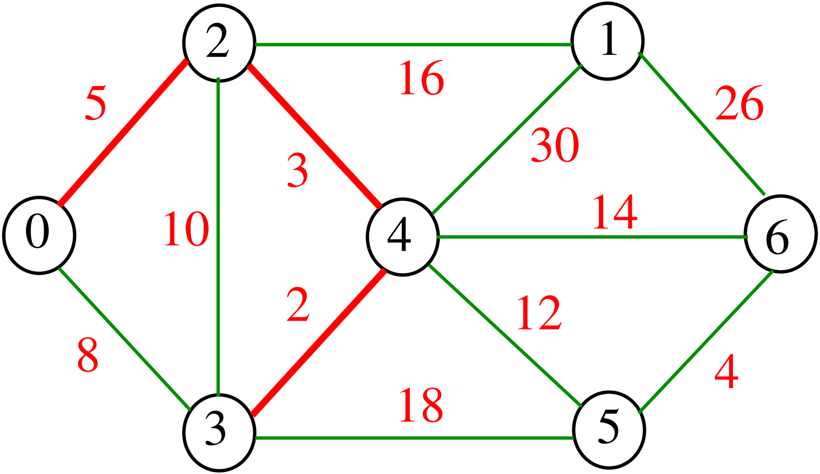
Simulação



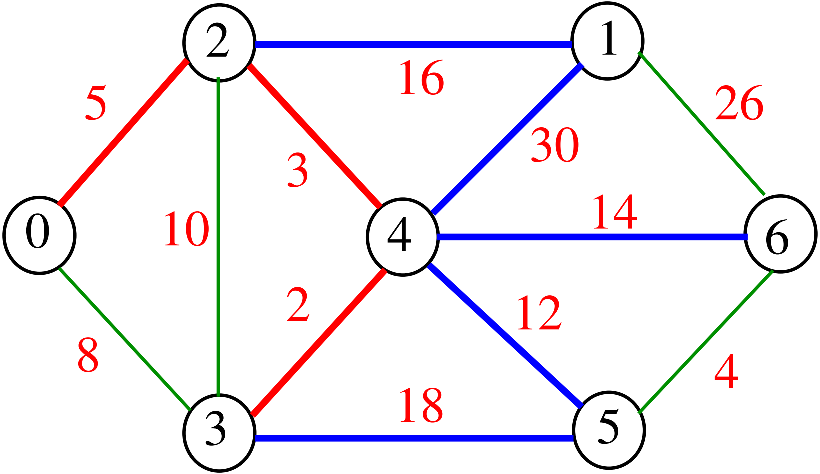
Simulação



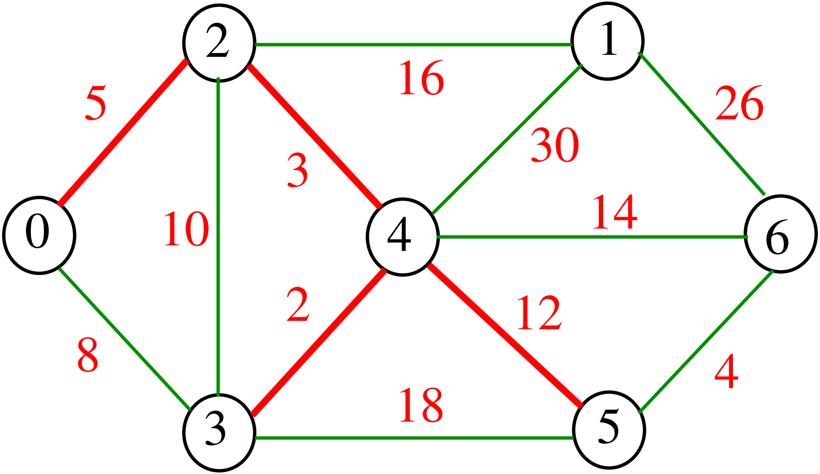
Simulação



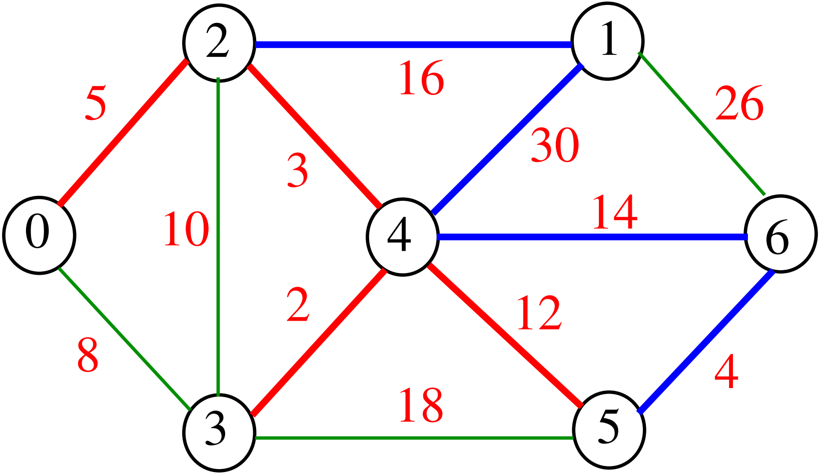
Simulação



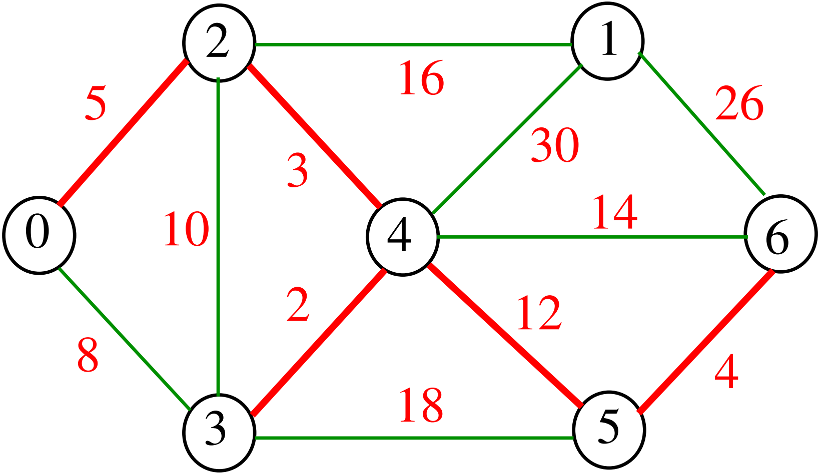
Simulação



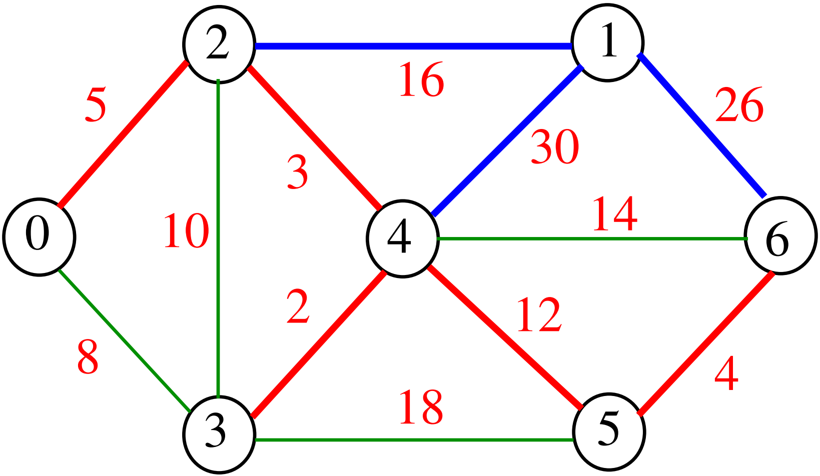
Simulação



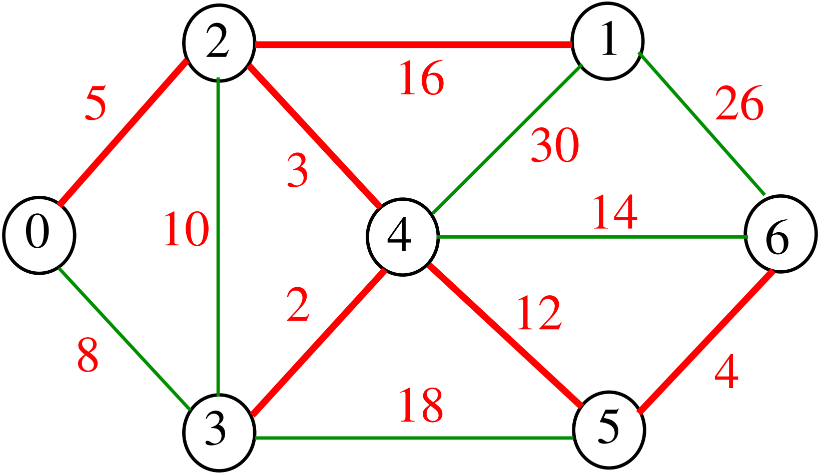
Simulação



Simulação



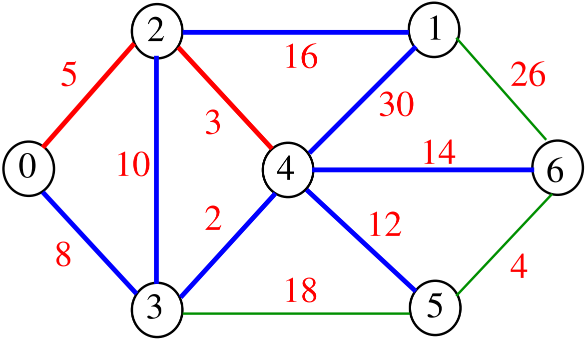
Simulação



Franja

A **franja** (= *fringe*) de uma subárvore `T` é o conjunto de todas as arestas que têm uma ponta em `T` e outra ponta fora

Exemplo: As arestas em azul formam a franja de `T`



Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim é iterativo.

Cada iteração começa com uma subárvore $\texttt{T}$ de $\texttt{G}$.

No início da primeira iteração $\texttt{T}$ é um árvore com apenas 1 vértice.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: franja de $\texttt{T}$ é vazia
Devolva $\texttt{T}$ e pare.

Caso 2: franja de $\texttt{T}$ não é vazia
Seja $\texttt{e}$ uma aresta de custo mínimo na franja de $\texttt{T}$
Faça $\texttt{T} \leftarrow \texttt{T} + \texttt{e}$

Relação invariante chave

No início de cada iteração vale que

existe uma MST que contém as arestas em T.

Se a relação vale no **início da última** iteração então é evidente que, se o grafo é conexo, o algoritmo devolve uma **MST**.

Demonstração. Vamos mostrar que se a relação vale no início de uma iteração que não seja a última, então ela vale no fim da iteração com `T+e` no papel de `T`.

A relação invariante certamente vale no início da primeira iteração.

Demonstração

Considere o início de uma iteração qualquer que não seja a última.

Seja $\mathtt{e}$ a aresta escolhida pela iteração no caso 2. Pela relação invariante existe uma MST $\mathtt{M}$ que contém $\mathtt{T}$.

Se $\mathtt{e}$ está em $\mathtt{M}$, então não há o que demonstrar. Suponha, portanto, que $\mathtt{e}$ não está em $\mathtt{M}$.

Seja $\mathtt{t}$ uma aresta que está $C(\mathtt{M}, \mathtt{e})$ que está na franja de $\mathtt{T}$. Pela escolha de $\mathtt{e}$ feita pelo algoritmo, $\mathtt{custo}(\mathtt{e}) \leq \mathtt{custo}(\mathtt{t})$.

Portanto, $\mathtt{M}-\mathtt{t}+\mathtt{e}$ é uma MST que contém $\mathtt{T}+\mathtt{e}$.