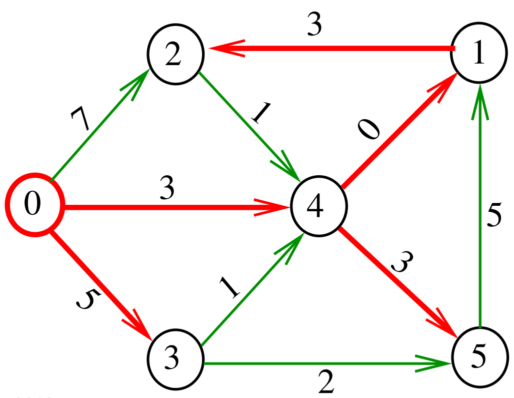
Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

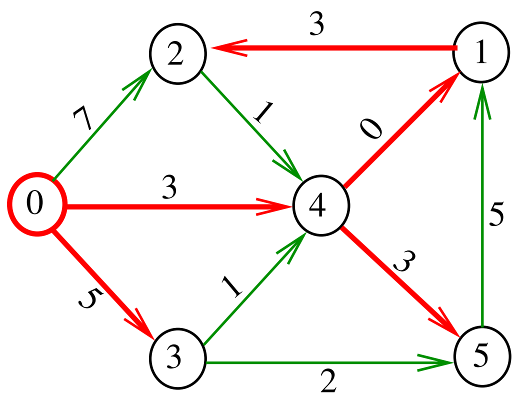
> *o único caminho de s a t na arborescência é um caminho simples mínimo*



Problema

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema da SPT:

> *Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s*



`dijkstra`

Recebe digrafo G com custos não-negativos nos arcos e um vértice s

Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz s.

A arborescência é armazenada no vetor parnt

As distâncias em relação a s são armazenadas no vetor cst

```
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
      Vertex parnt[], double cst[]);
```


Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V + A)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	`PQinit` e `PQfree`,
$O(V)$	execuções de	`PQinsert`,
$O(V)$	execuções de	`PQempty`,
$O(V)$	execuções de	`PQdelmin`, e
$O(A)$	execuções de	`PQdec`.

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
PQinsert	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
PQdelmin	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
PQdec	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
dijkstra	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` implementada com um min-heap é $O(A \lg V)$.

Mais algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

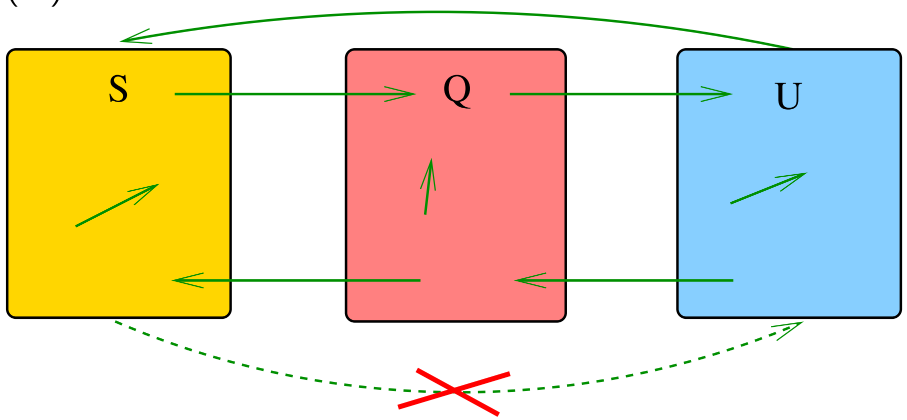
Relações invariantes

S = vértices examinados

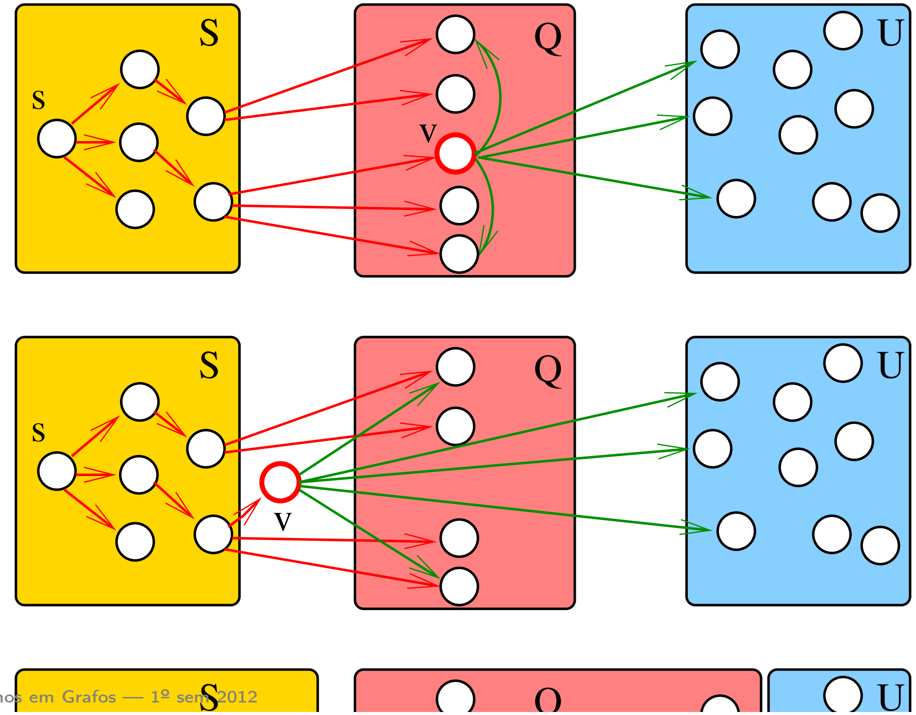
Q = vértices visitados = vértices na fila

U = vértices ainda não visitados

(i0) não existe arco v-w com v em S e w em U



Iteração



Outra implementação para digrafos densos

```
#define INFINITO maxCST

void
DIGRAPHsptD1 (Digraph G, Vertex s,
          Vertex parnt[], double cst[]) {
   Vertex w, w0, fr[maxV];
   for (w = 0; w < G->V; w++) {
      parnt[w] = -1;
      cst[w] = INFINITO;
   }
   fr[s] = s;
   cst[s] = 0;
```



```
 while (1) {
   double mincst = INFINITO;
   for (w = 0; w < G->V; w++)
      if (parnt[w]==-1 && mincst>cst[w])
         mincst = cst[w0=w];
   if (mincst == INFINITO) break;
   parnt[w0] = fr[w0];
   for (w = 0; w < G->V; w++)
      if(cst[w]>cst[w0]+G->adj[w0][w]) {

         cst[w] = cst[w0]+G->adj[w0][w];
         fr[w] = w0;
      }
   }
}
```


Caminhos mínimos em DAGs

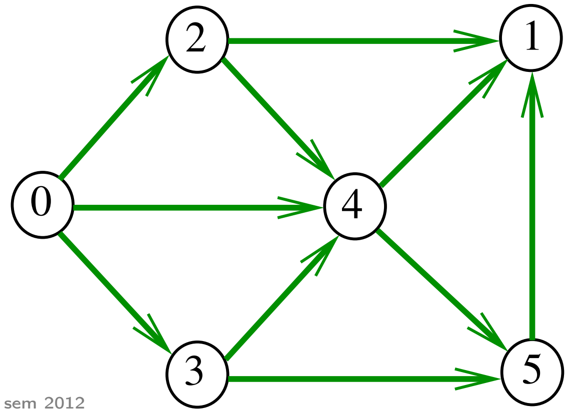
S 19.6

DAGs

Relembrando: Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo acíclico



Problema

Problema:

Dado um vértice s de um DAG com custos ***possivelmente negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho simples mínimo de s a t*

Problema:

Dado um vértice s de um DAG com custos possivelmente negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

`ts[0], ts[1], ..., ts[V-1]`

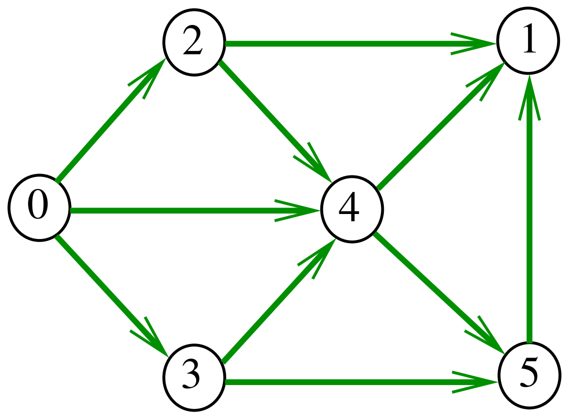
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

`ts[i]-ts[j]` com `i < j`

`ts[0]` é necessariamente uma **fonte**
`ts[V-1]` é necessariamente um **sorvedouro**

Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



Fato

> Para todo digrafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:
>
> - G possui um ciclo
> - G é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica

Existem algoritmos $O(V + A)$ que encontram ordenação topológica ou ciclo.

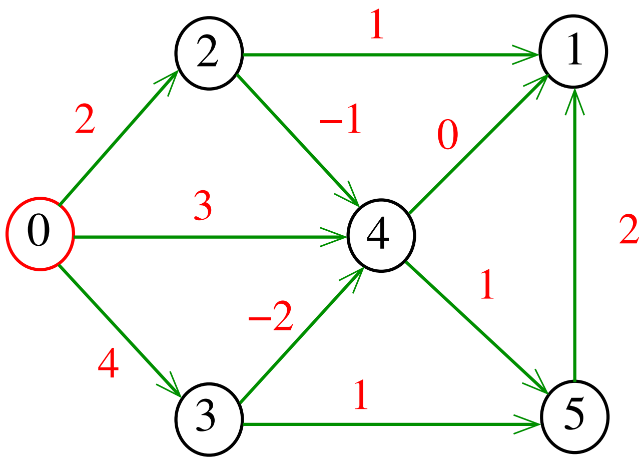
Problema

Problema:
Dado um vértice s de um DAG com custos ***possivelmente negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho simples mínimo de s a t*

Problema:
Dado um vértice s de um DAG com custos possivelmente negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



DAGmin

A função DAGmin recebe um DAG G com custos possivelmente negativos e uma ordenação topológica ts de G. Recebe também um vértice s.
Para cada vértice t, a função calcula o custo de um caminho de custo mínimo de sa t. Esse número é depositado em cst[t].

```
void
DAGmin (Digraph G, Vertex ts[], Vertex s,
double cst[])
```

DAGmin

```
void DAGmin (Digraph G, Vertex ts[], Vertex s,
             double cst[]) {
    int i; Vertex v; link p;
    for (v= 0; v < G->V; v++)
        cst[v] = INFINITO;
    cst[s] = 0;
    for (v = ts[i = 0]; i < G->V; v = ts[i++]){
        if (cst[v] == INFINITO) continue;
        for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
            if (cst[p->w] > cst[v] + p->cst)
                cst[p->w] = cst[v] + p->cst;
    }
}
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função DAGmin é $O(V + A)$.

Caminhos máximos em DAGs

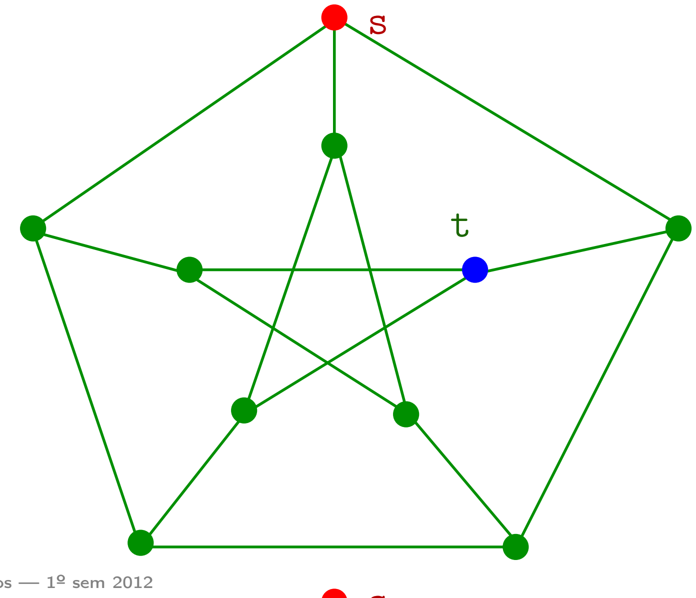
Do ponto de vista computacional, o problema de encontrar um caminho simples de custo máximo num digrafos com custos nos arcos é difícil.

Mais precisamente, problema é **NP-difícil** como vocês verão no final de Análise de Algoritmos.

O problema torna-se fácil, entretanto, quando restrito a DAGs.

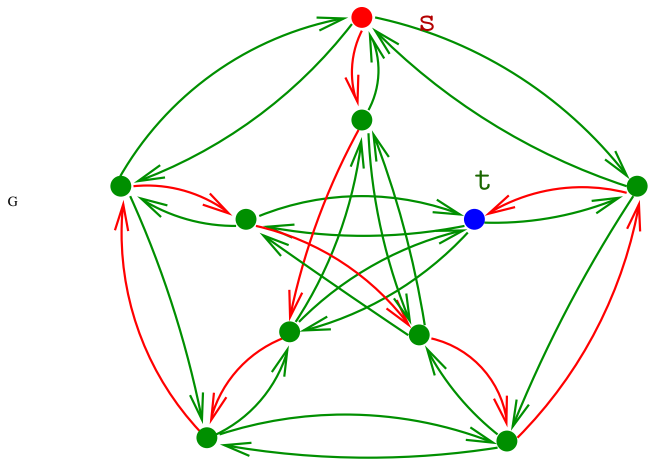
Caminhos hamiltonianos

Problema: Dados vértices s e t de um grafo encontrar um caminho hamiltoniano de s e t



Redução polinomial

todos custos $= -1$



G possui um st-caminho hamiltoniano $\Leftrightarrow$

G possui um st-caminho **simples** de custo $-(\mathtt{V}-1)$.

Conclusão

É sabido que:

> O problema do caminho hamiltoniano é NP-difícil.

Assim, como problema do caminho simples mínimo com custos negativos é tão difícil quanto o problema do caminho hamiltoniano.

> O problema do caminho simples de custo mínimo é NP-difícil.

Complexidade computacional

> O problema do caminho simples de custo mínimo é NP-difícil.

NP-difícil = **não se conhece** algoritmo de consumo de 'tempo polinomial'

Em outras palavras: ninguém conhece um algoritmo eficiente para o problema ...

Se alguém conhece, não contou para ninguém ...

DAGmax

```
void DAGmax (Digraph G, Vertex ts[], Vertex s,
                 double cst[]) {
    int i; Vertex v; link p;
    for (v= 0; v < G->V; v++)
          cst[v] = -INFINITO;
    cst[s] = 0;
    for (v = ts[i = 0]; i < G->V; v = ts[++i]){
          if (cst[v] == -INFINITO) continue;
          for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
                if (cst[p->w] < cst[v] + p->cst)
                      cst[p->w] = cst[v] + p->cst;
    }
}
```

Consumo de tempo

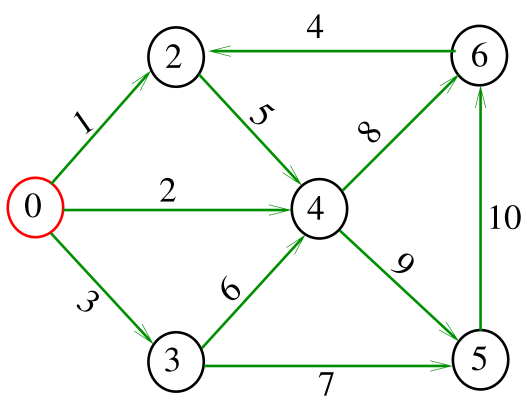
O consumo de tempo da função `DAGmax` é $O(V + A)$.

Dijkstra em digrafos com custos negativos

Problema da SPT

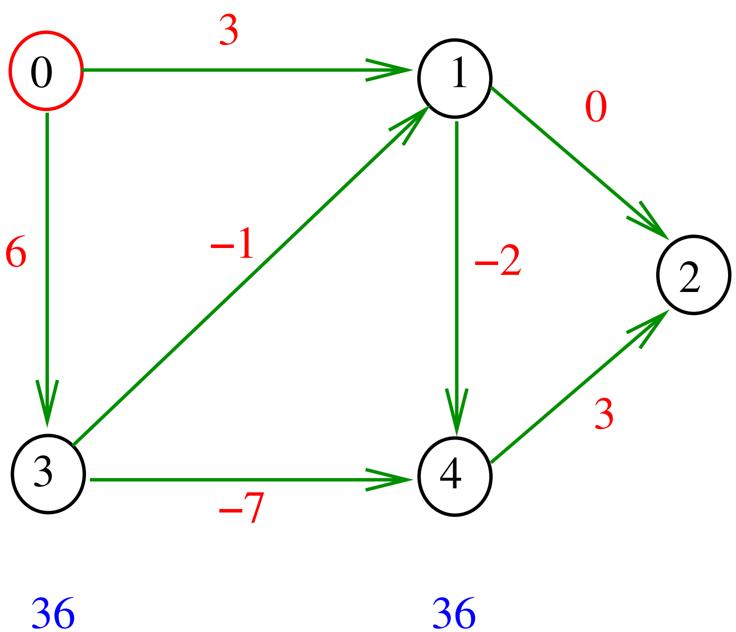
Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **possivelmente negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Entra:

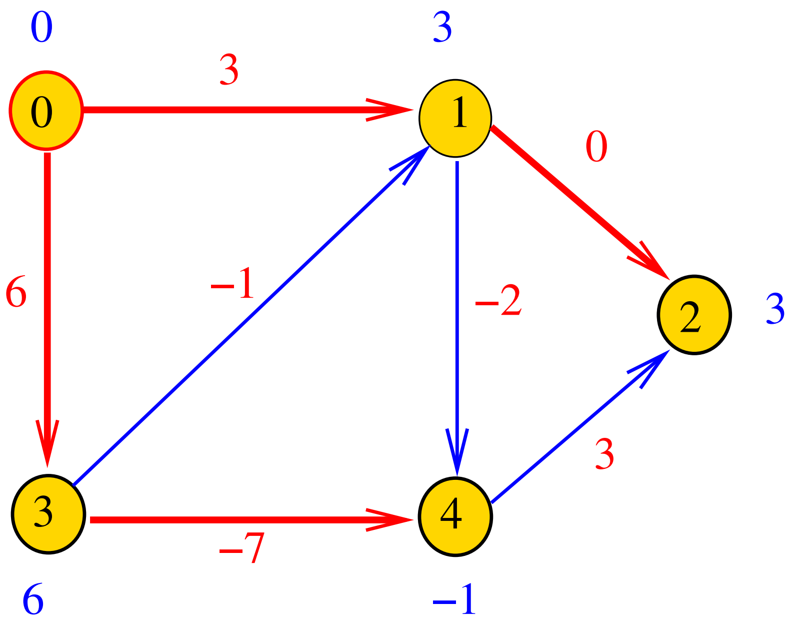


Sai:

Tentando Dijkstra



Opsss



O caminho mínimo de 0 a 2 tem custo 2 e não 3...