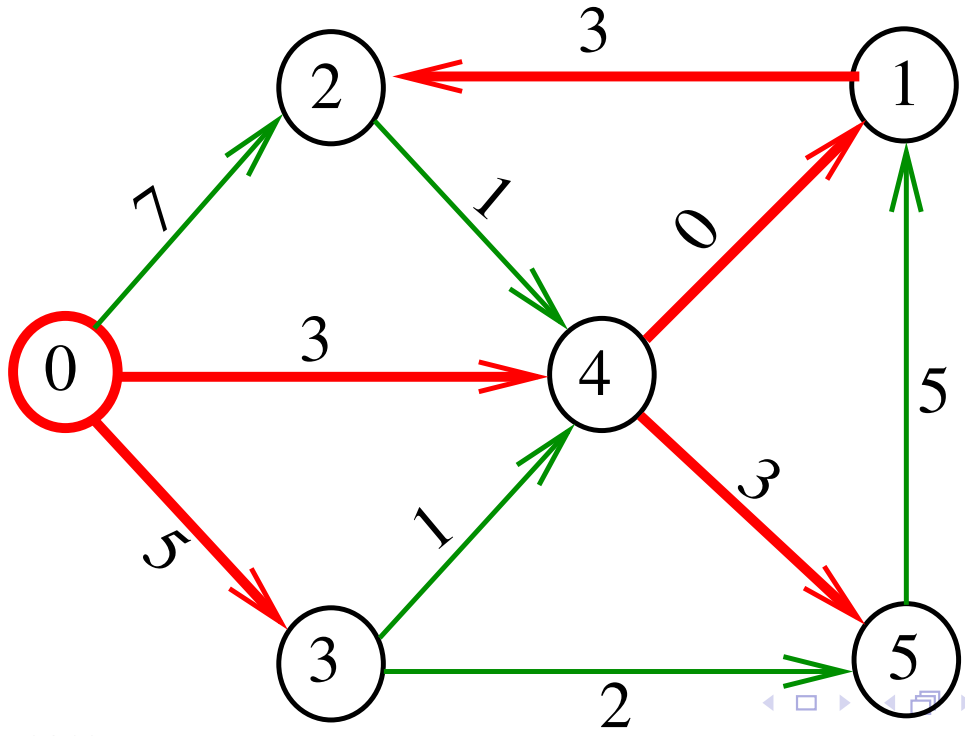
Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

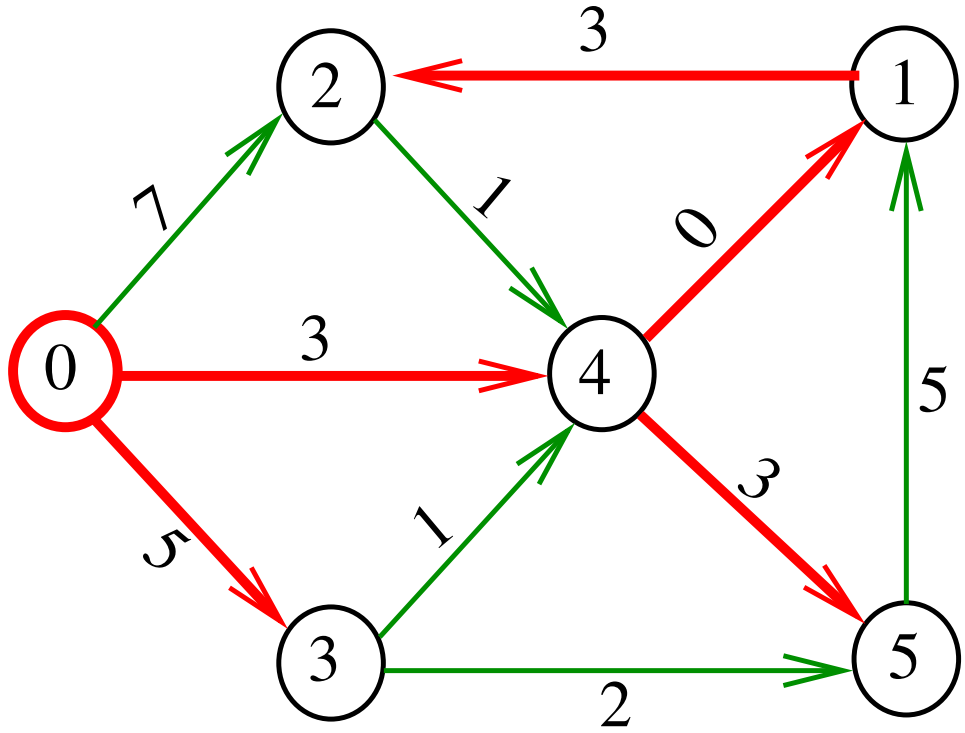
> *o único caminho de s a t na arborescência é um caminho simples mínimo*



Problema

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema da SPT:

Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s



dijkstra

Recebe digrafo G com custos não-negativos nos arcos e um vértice s
Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz s.
A arborescência é armazenada no vetor parnt
As distâncias em relação a s são armazenadas no vetor cst

void

```
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
         Vertex parnt[], double cst[]);
```

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V + A)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	`PQinit` e `PQfree`,
$O(V)$	execuções de	`PQinsert`,
$O(V)$	execuções de	`PQempty`,
$O(V)$	execuções de	`PQdelmin`, e
$O(A)$	execuções de	`PQdec`.

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
`PQinsert`	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
`PQdelmin`	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
`PQdec`	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
`dijkstra`	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` implementada com um min-heap é $O(A \lg V)$.

Mais algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

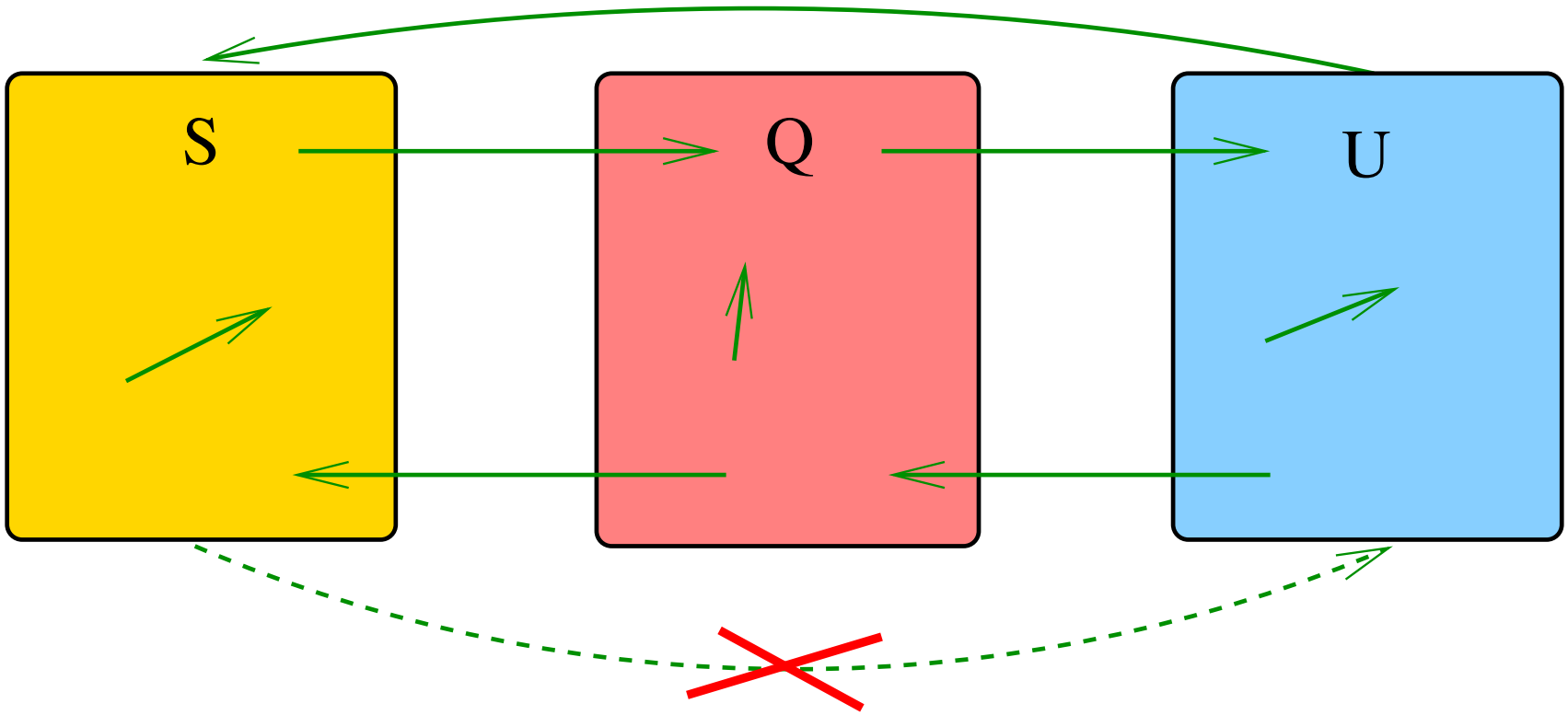
Relações invariantes

S = vértices examinados

Q = vértices visitados = vértices na fila

U = vértices ainda não visitados

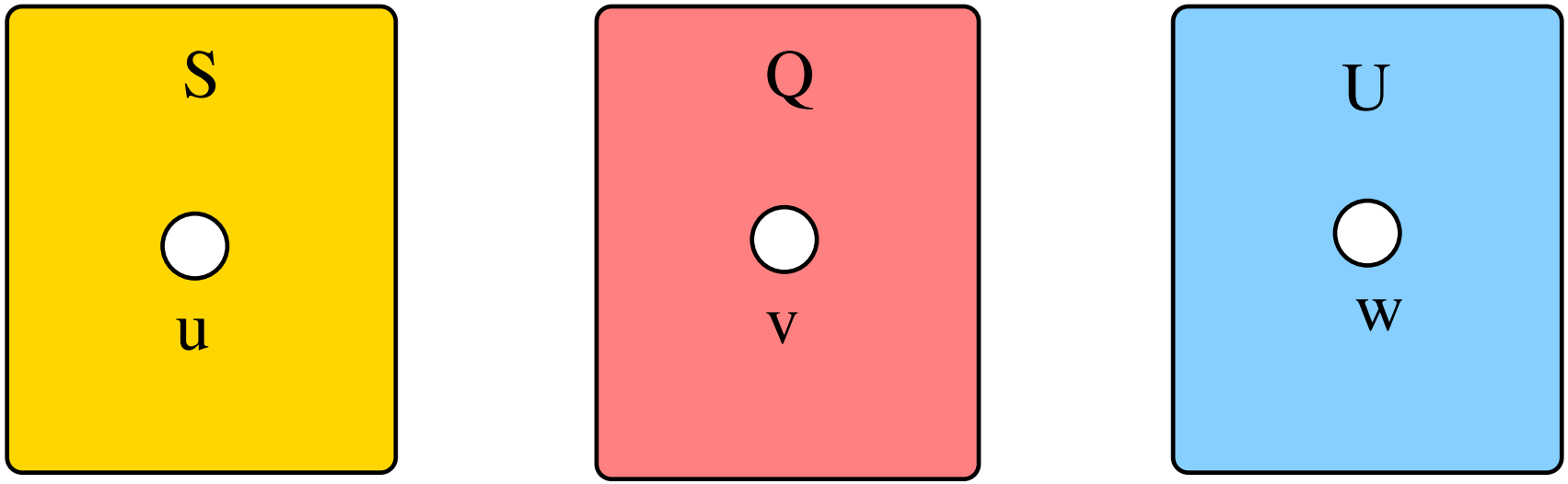
(i0) não existe arco v-w com v em S e w em U



Relações invariantes

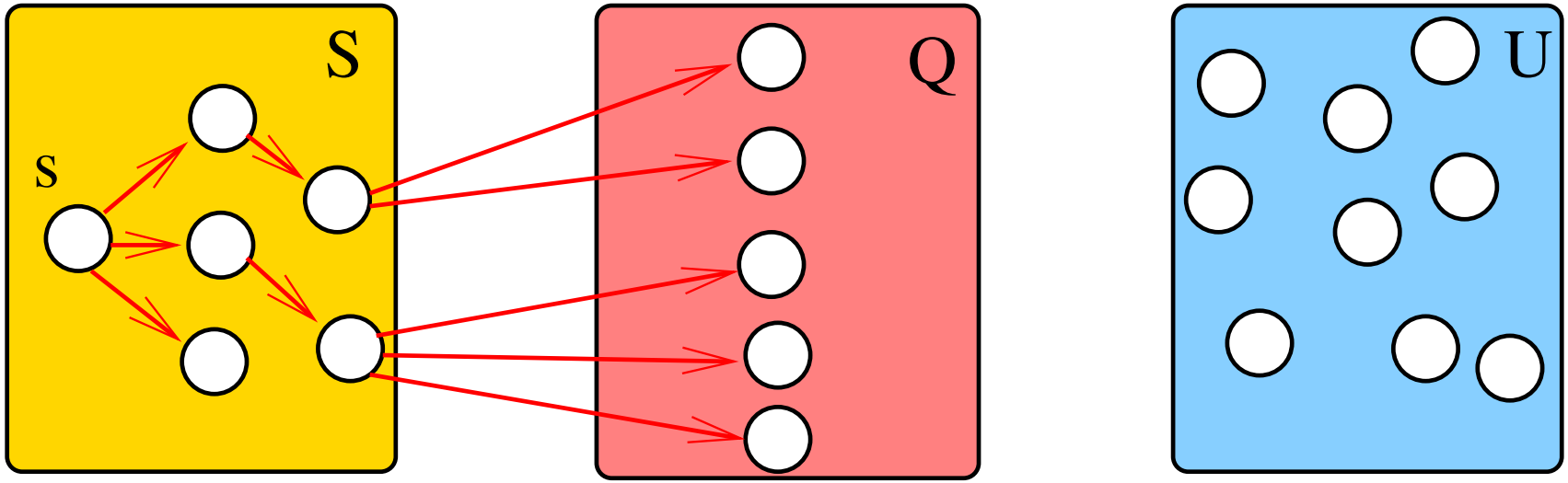
(i1) para cada u em S, v em Q e w em U

$$\texttt{cst}[\texttt{u}] \leq \texttt{cst}[\texttt{v}] \leq \texttt{cst}[\texttt{w}]$$



Relações invariantes

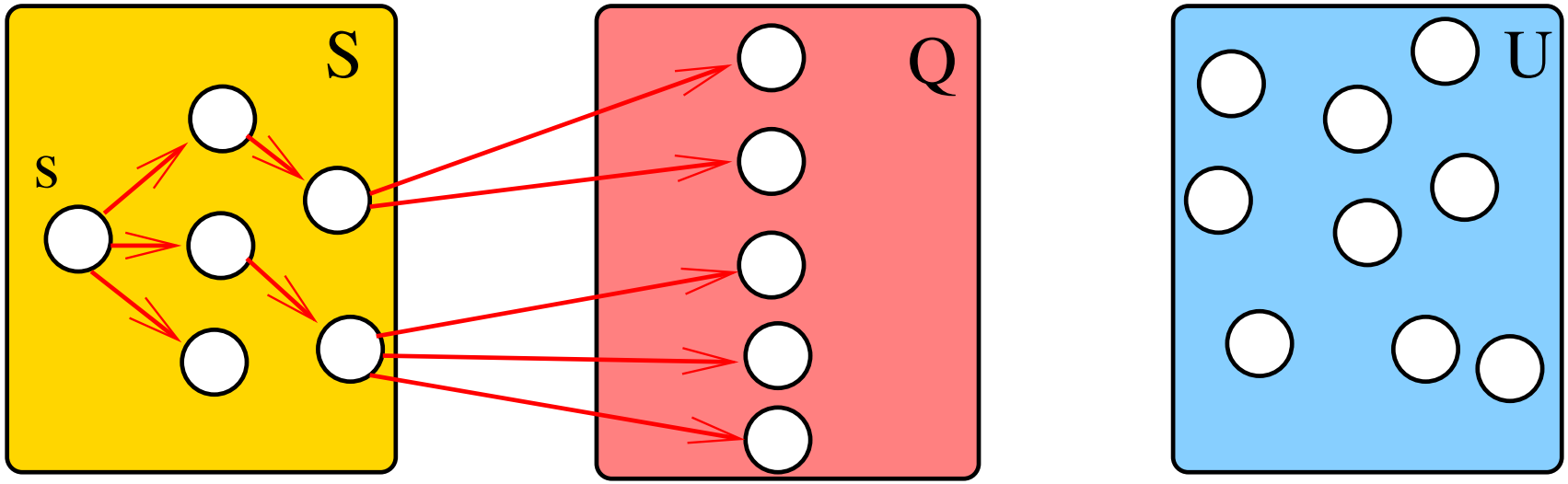
(i2) O vetor `parnt` restrito aos vértices de S e Q determina um árborescência com raiz s



Relações invariantes

(i3) Para arco v-w na arborescência vale que

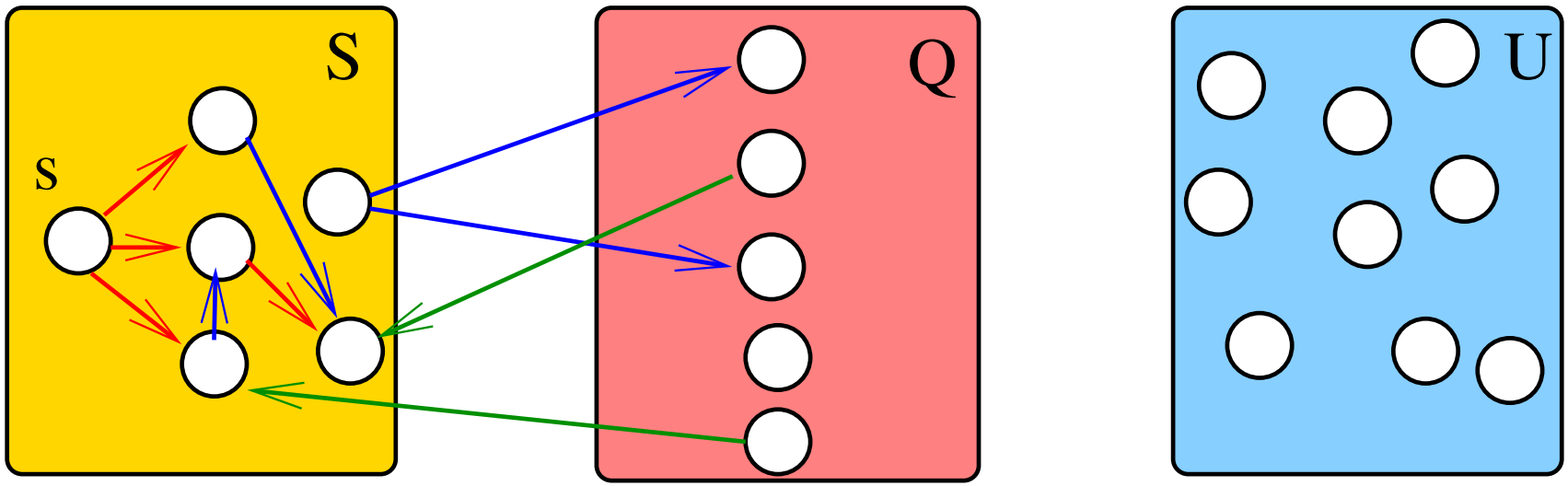
$$\texttt{cst}[\texttt{w}] = \texttt{cst}[\texttt{v}] + \text{custo do arco } \texttt{vw}$$



Relações invariantes

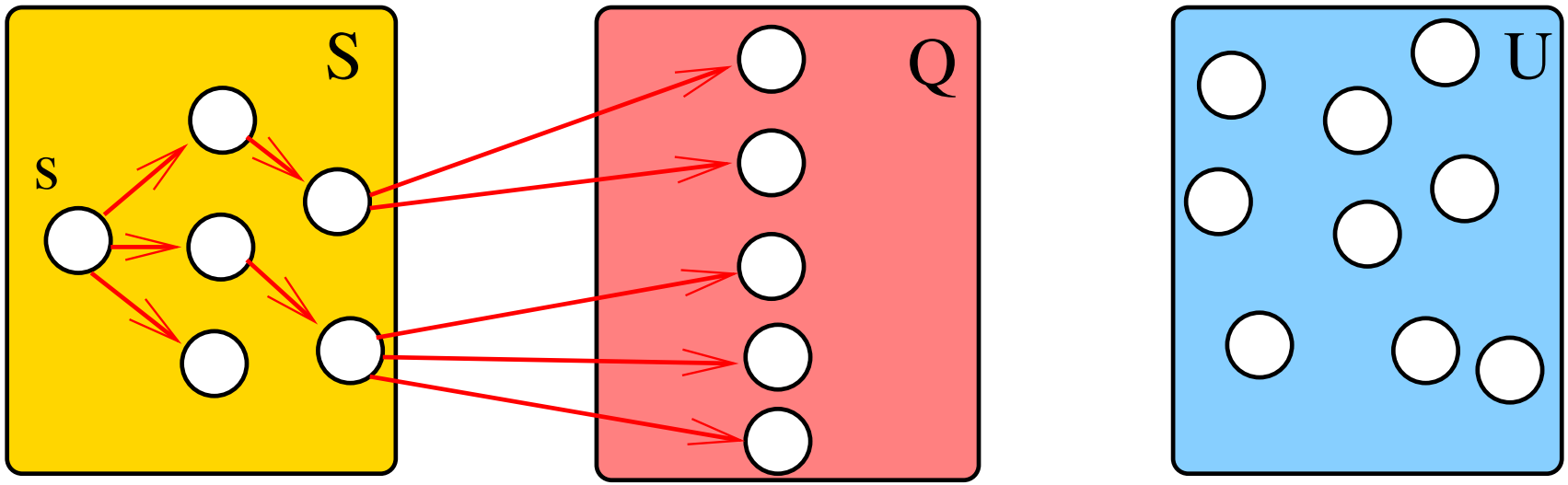
(i4) Para cada arco v-w com v **ou** w em S vale que

$$\texttt{cst}[\texttt{w}] - \texttt{cst}[\texttt{v}] \leq \text{custo do arco vw}$$

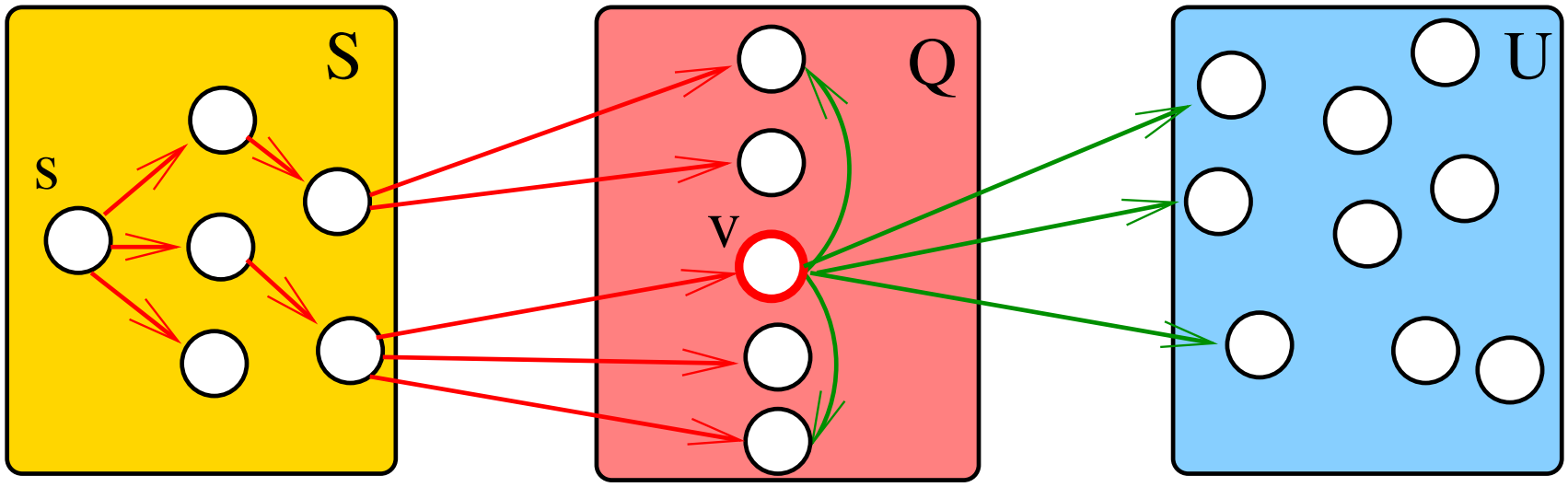


Relações invariantes

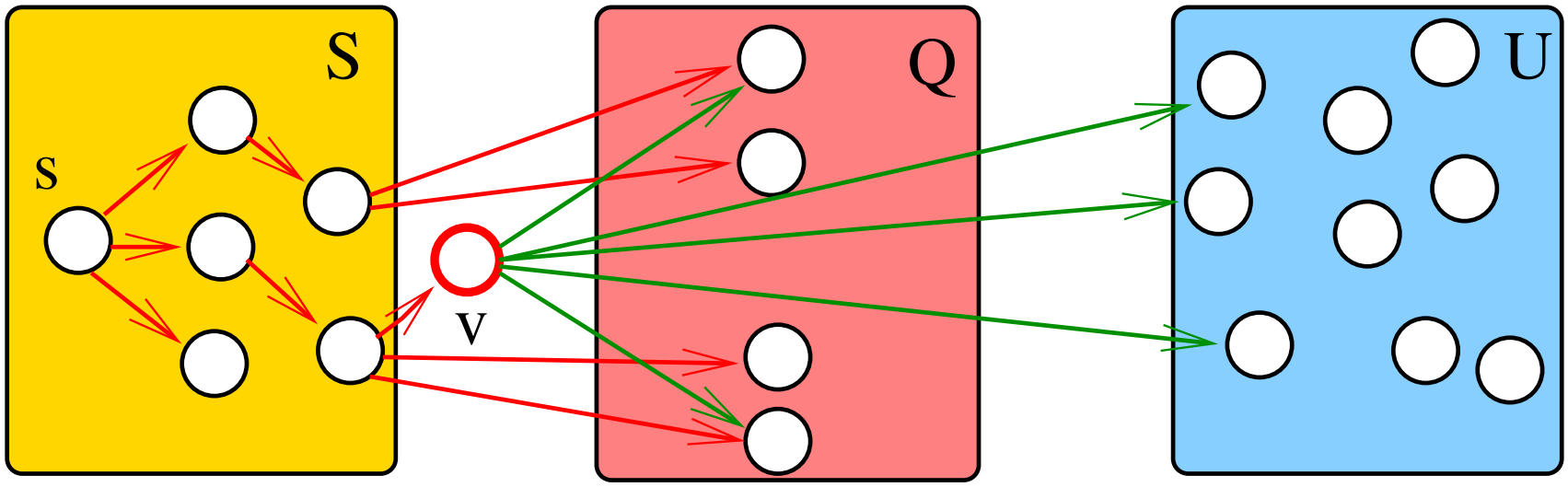
(i5) Para cada vértice v em S vale que cst[v] é o custo de um caminho mínimo de s a v.



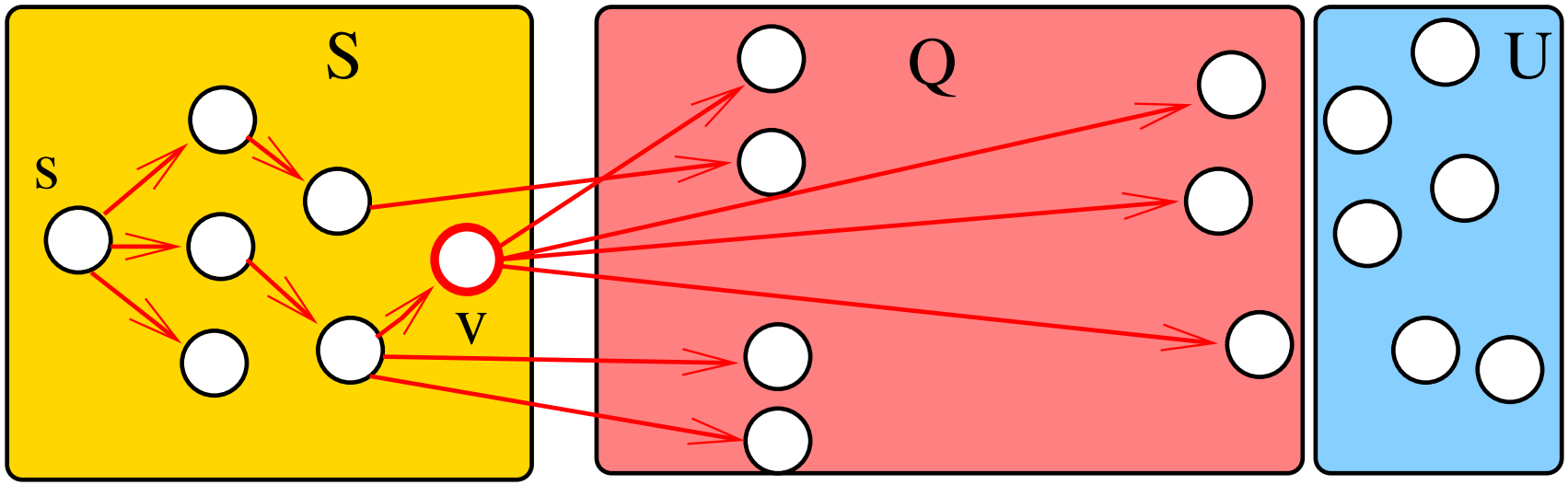
Iteração



Iteração



Iteração



Outra implementação para digrafos densos

```
#define INFINITO maxCST

void
DIGRAPHsptD1 (Digraph G, Vertex s,
              Vertex parnt[], double cst[]) {
1   Vertex w, w0, fr[maxV];
2   for (w = 0; w < G->V; w++) {
3       parnt[w] = -1;
4       cst[w] = INFINITO;
5   }
6   fr[s] = s;
7   cst[s] = 0;
```

```
 8 while (1) {
 9   double mincst = INFINITO;
10   for (w = 0; w < G->V; w++)
11       if (parnt[w]==-1 && mincst>cst[w])
12           mincst = cst[w0=w];
13   if (mincst == INFINITO) break;
14   parnt[w0] = fr[w0];
15   for (w = 0; w < G->V; w++)
16       if(cst[w]>cst[w0]+G->adj[w0][w]) {

17           cst[w] = cst[w0]+G->adj[w0][w];
18           fr[w] = w0;
       }
    }
}
```

Caminhos mínimos em DAGs

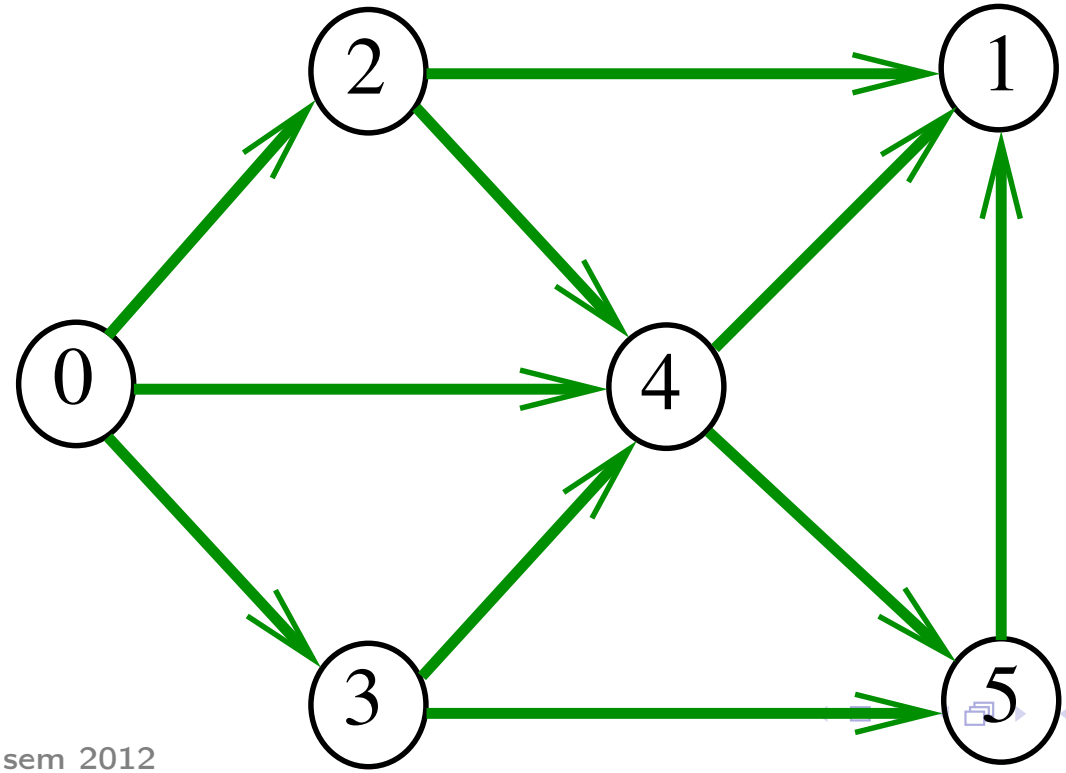
S 19.6

DAGs

Relembrando: Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo acíclico

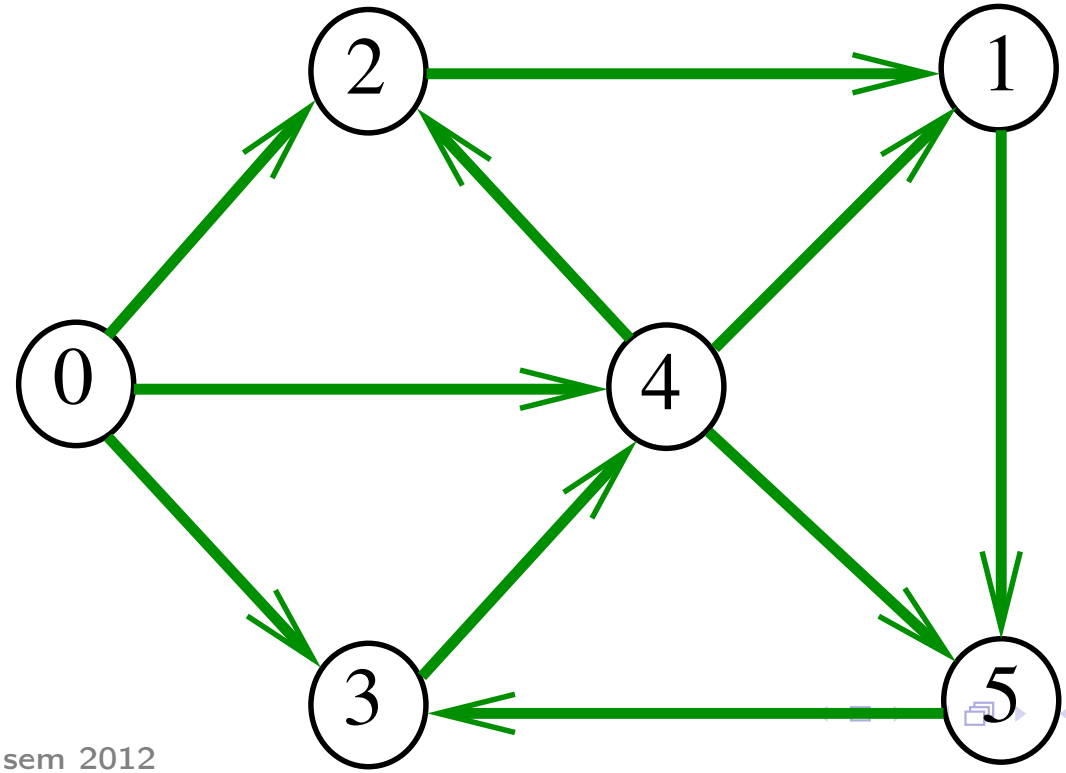


DAGs

Relembrando: Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico

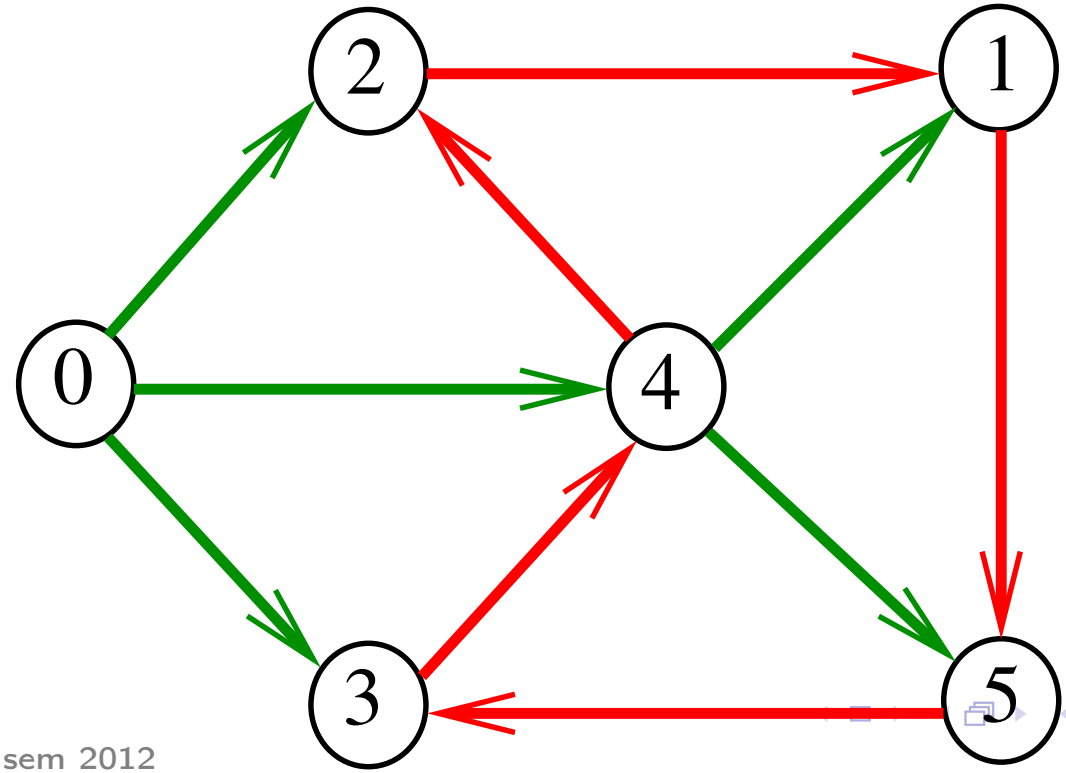


DAGs

Relembrando: Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



Problema

Problema:

Dado um vértice s de um DAG com custos ***possivelmente negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho simples mínimo de s a t*

Problema:

Dado um vértice s de um DAG com custos possivelmente negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

```
ts[0], ts[1], ..., ts[V-1]
```

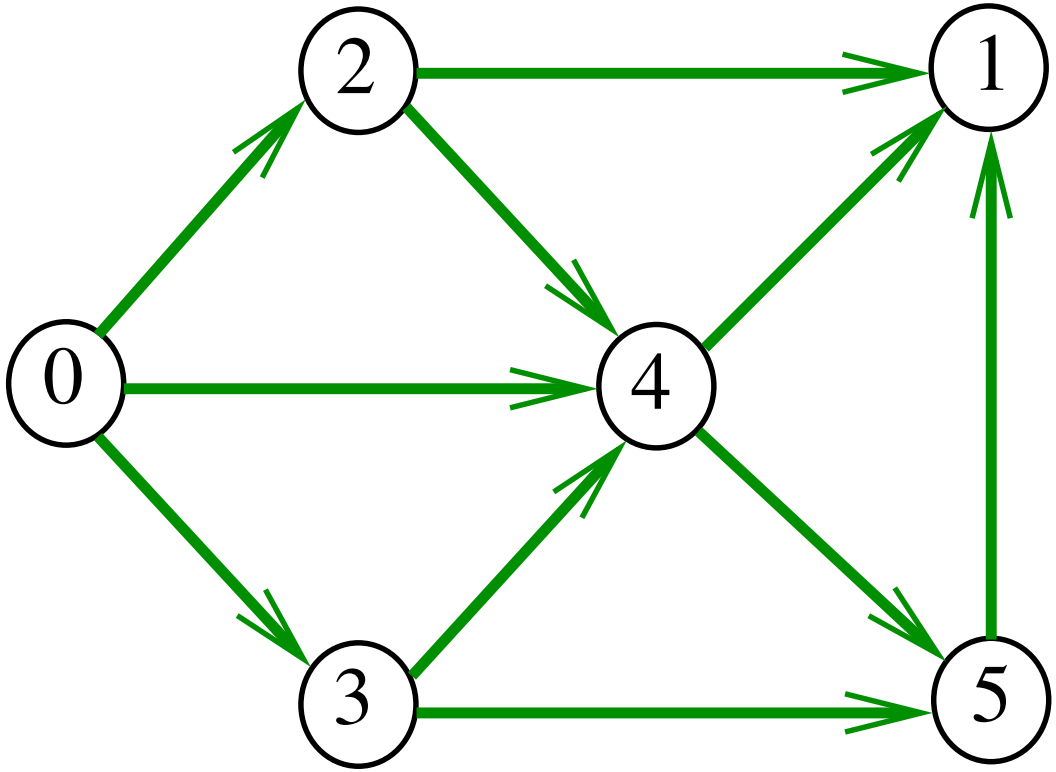
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

```
ts[i]-ts[j] com i < j
```

`ts[0]` é necessariamente uma **fonte**
`ts[V-1]` é necessariamente um **sorvedouro**

Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



Fato

Para todo digrafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo
- G é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica

Existem algoritmos $O(V + A)$ que encontram ordenação topológica ou ciclo.

Fato

Para todo digrafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo
- G é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica

Existem algoritmos $O(V + A)$ que encontram ordenação topológica ou ciclo.

Problema

Problema:

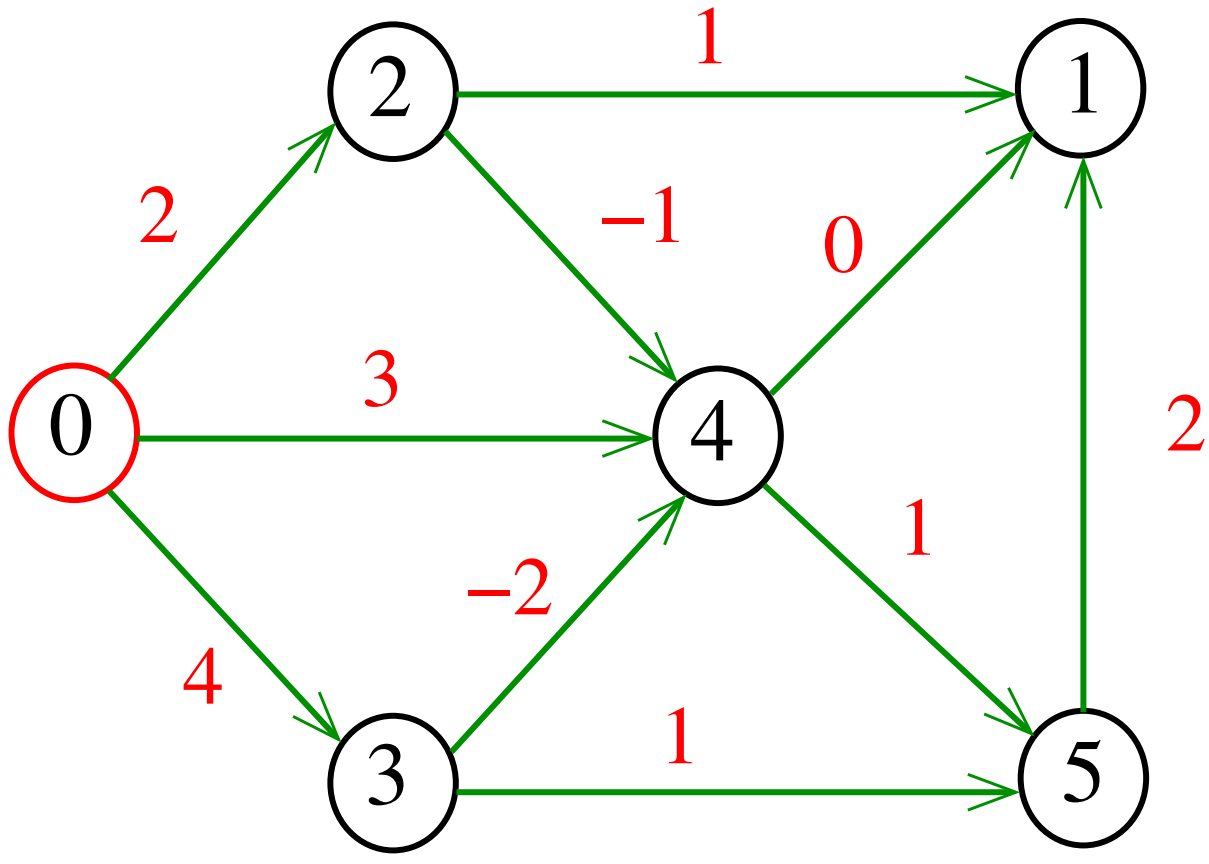
Dado um vértice s de um DAG com custos ***possivelmente negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho simples mínimo de s a t*

Problema:

Dado um vértice s de um DAG com custos possivelmente negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

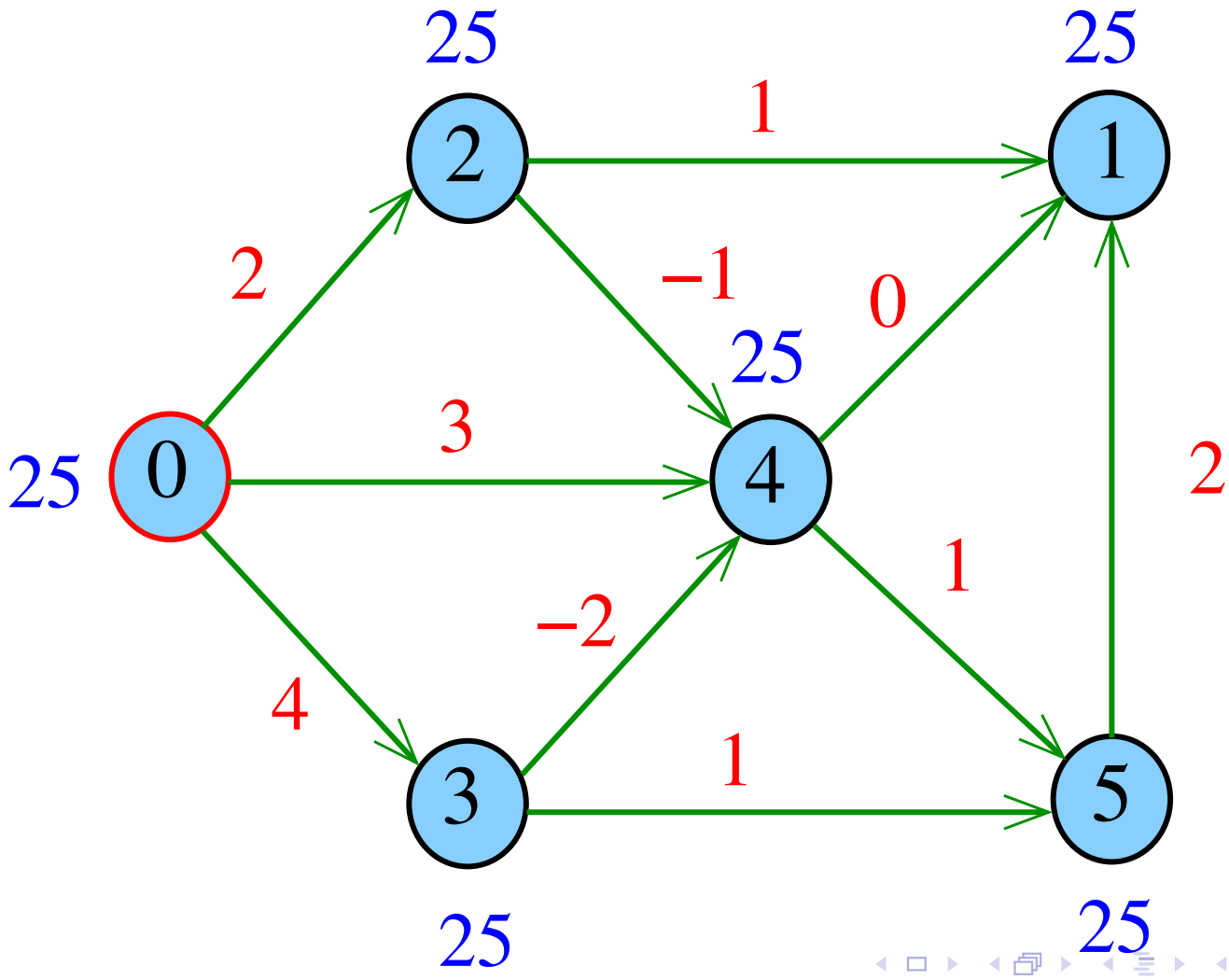
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



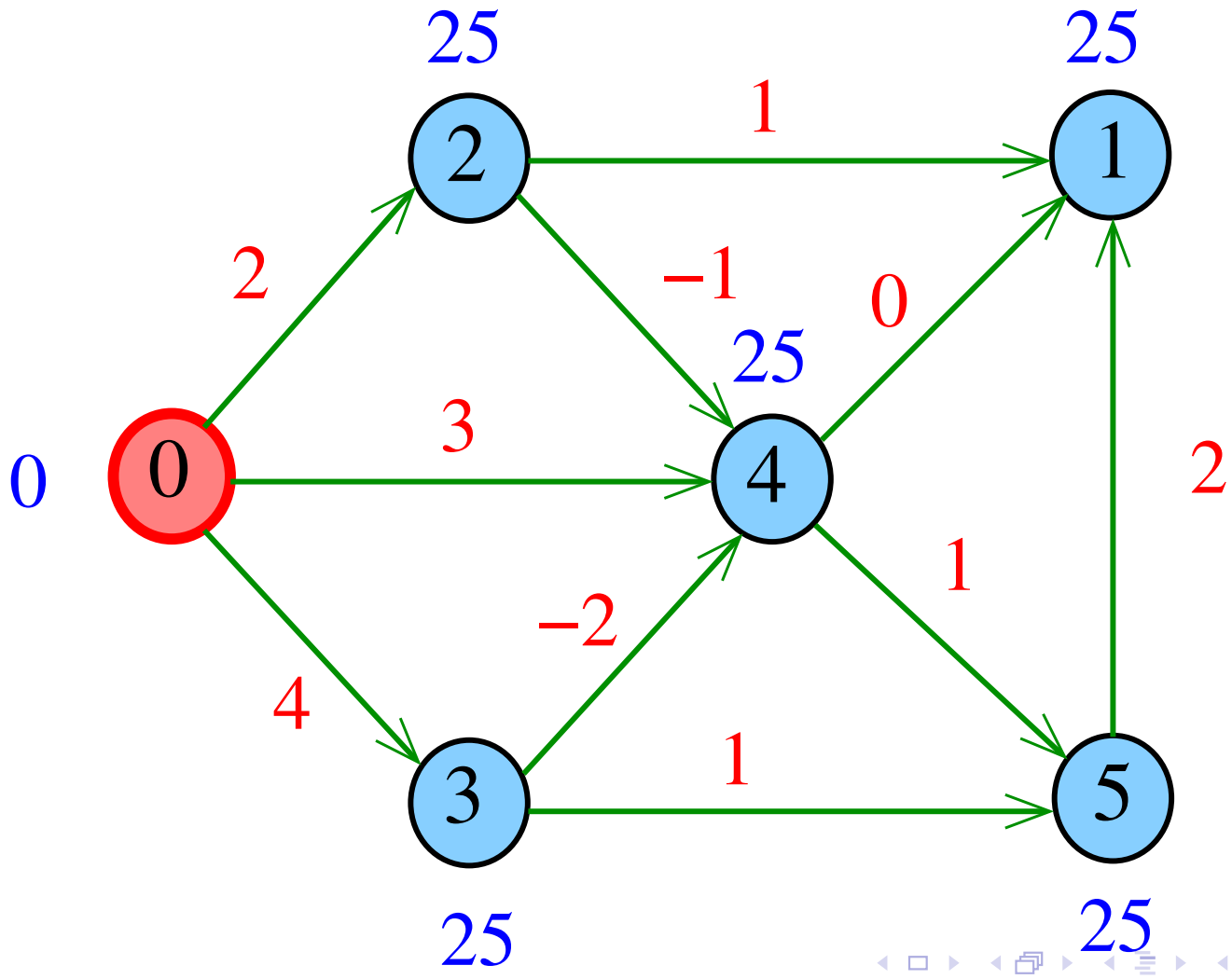
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



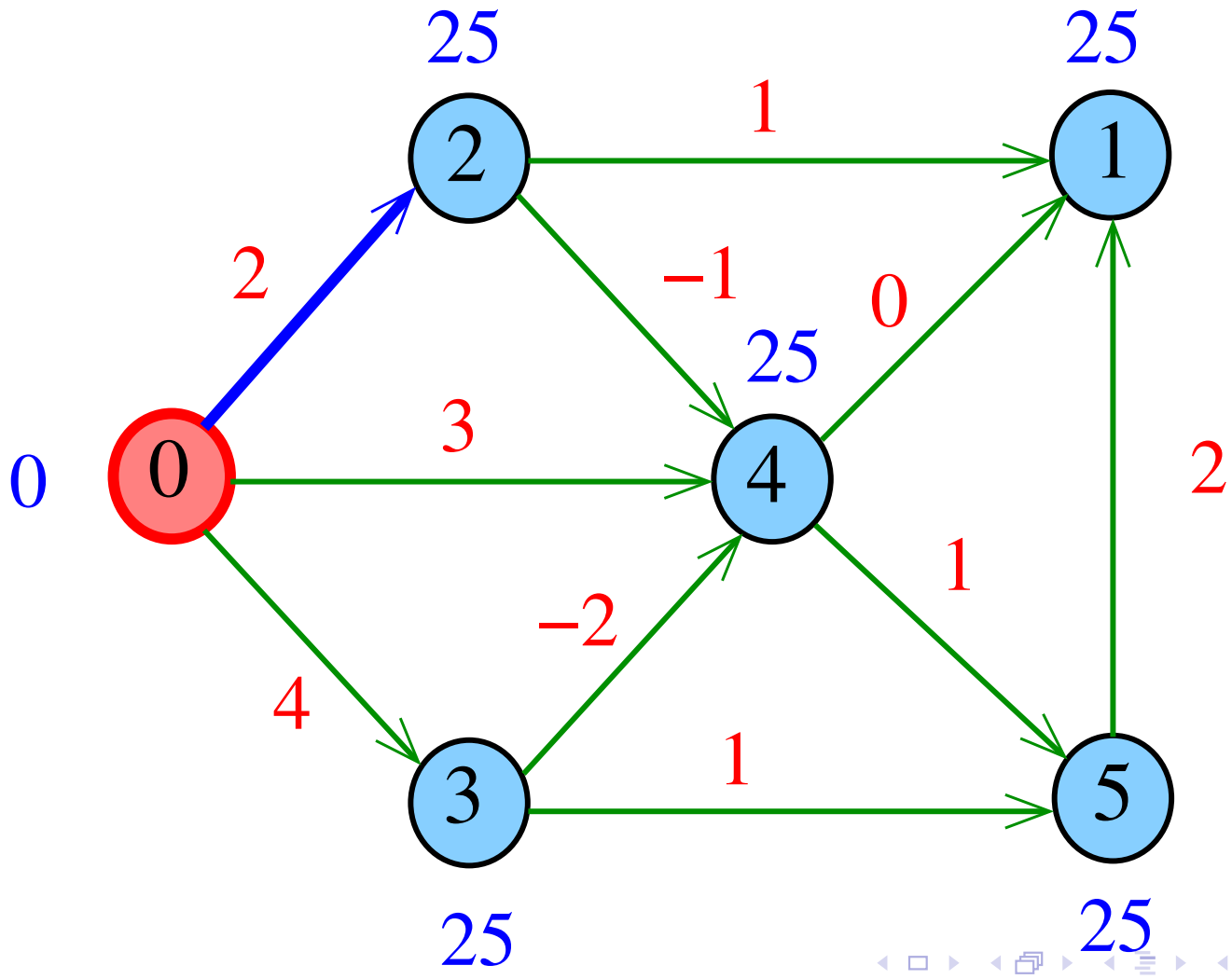
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



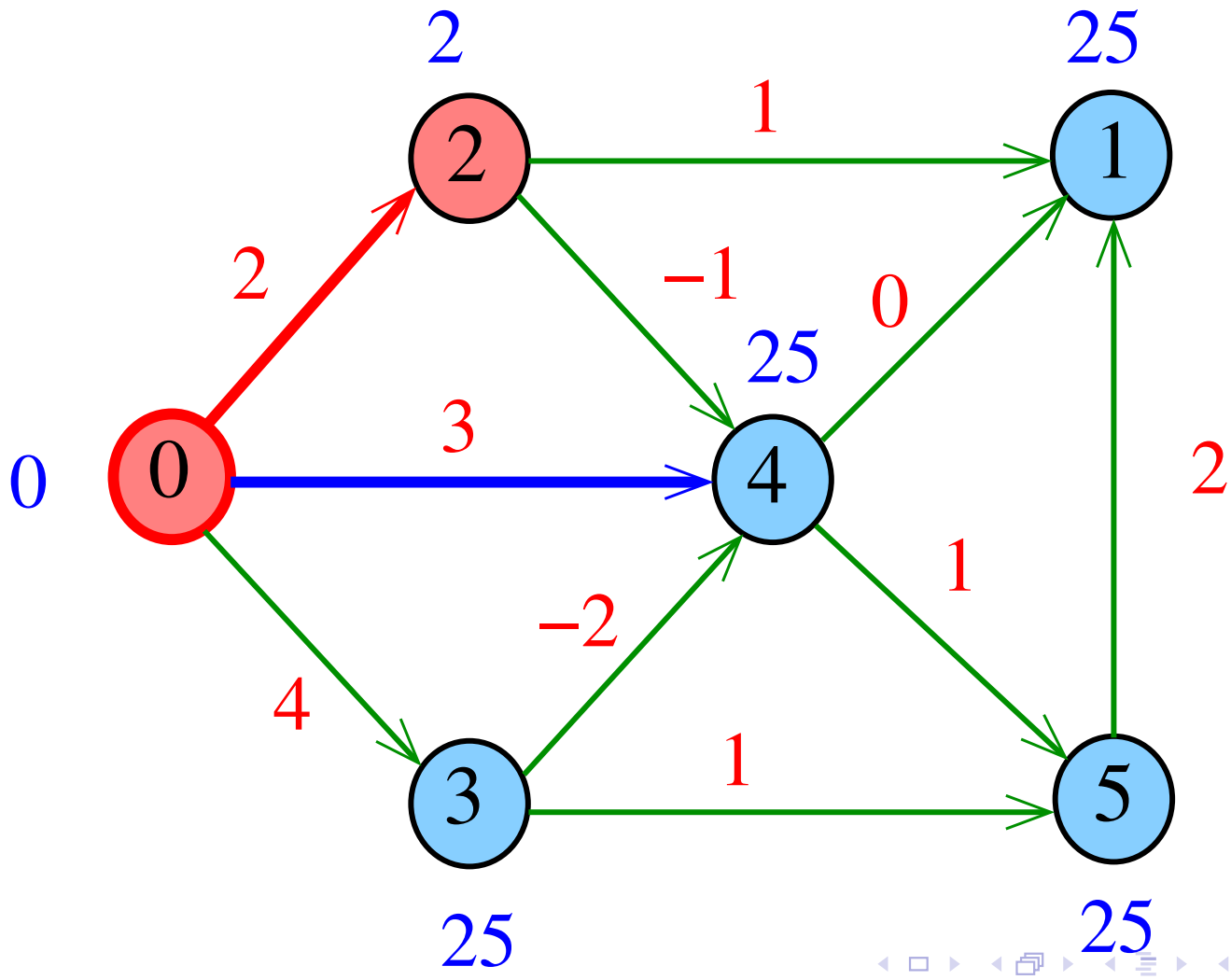
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



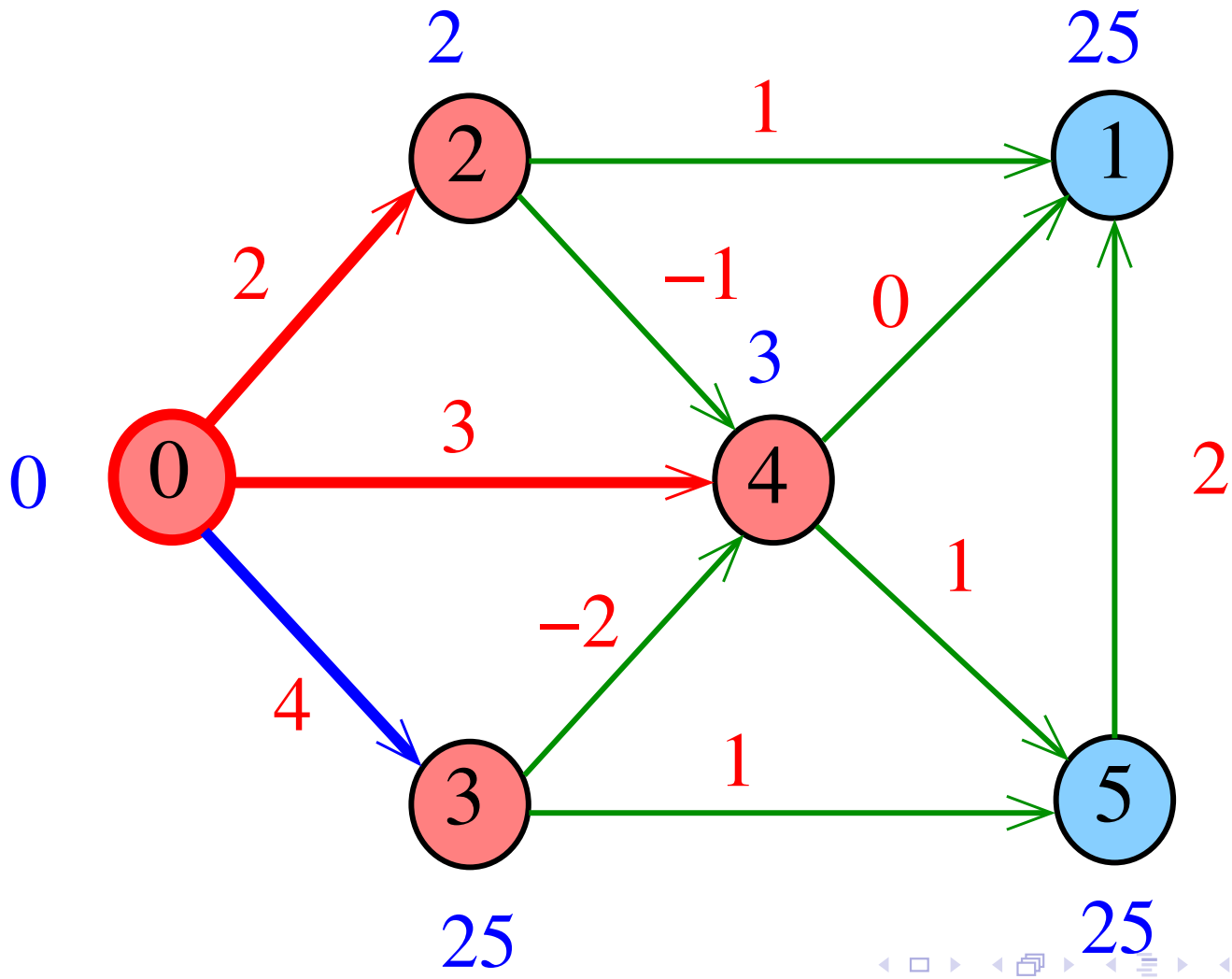
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



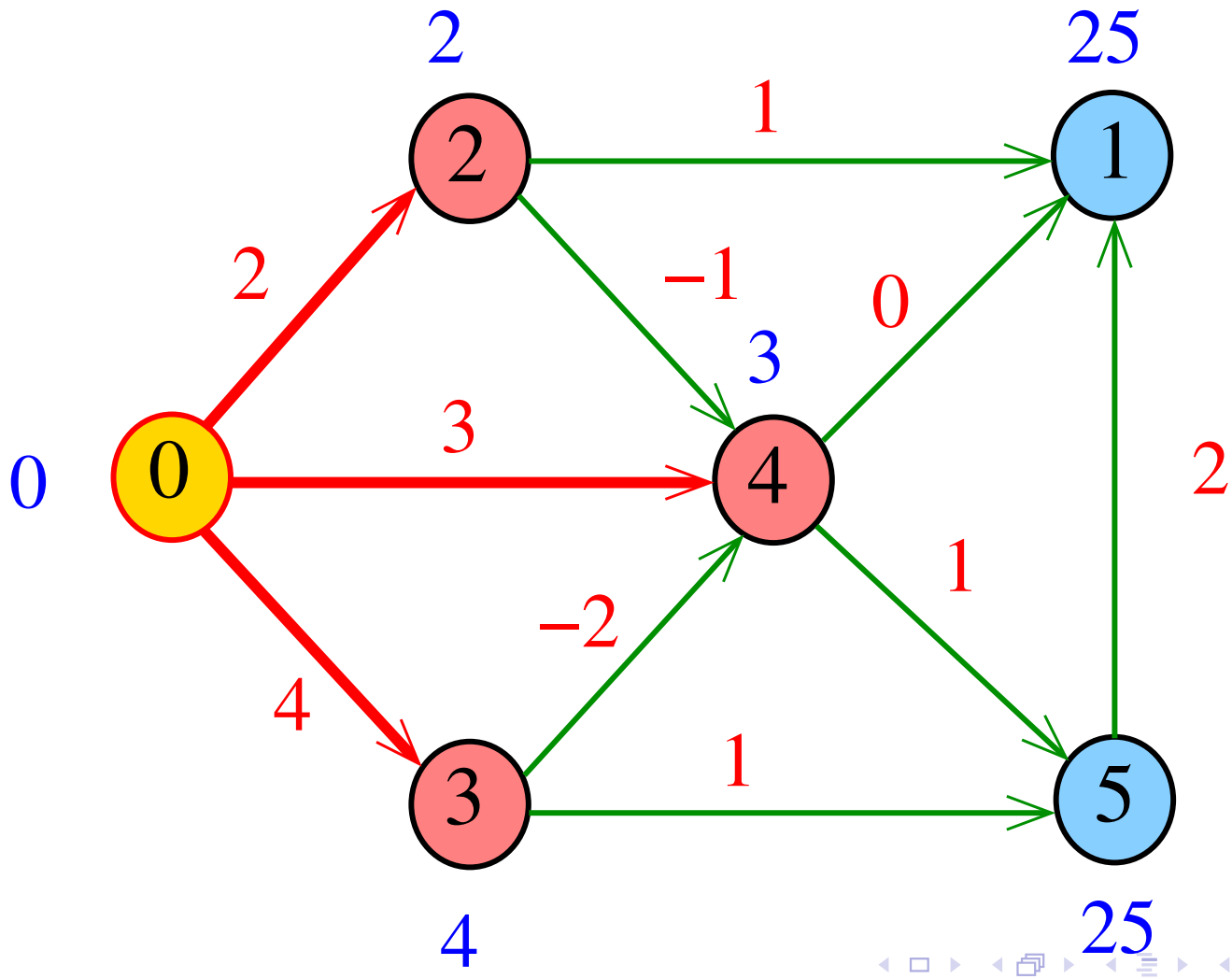
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



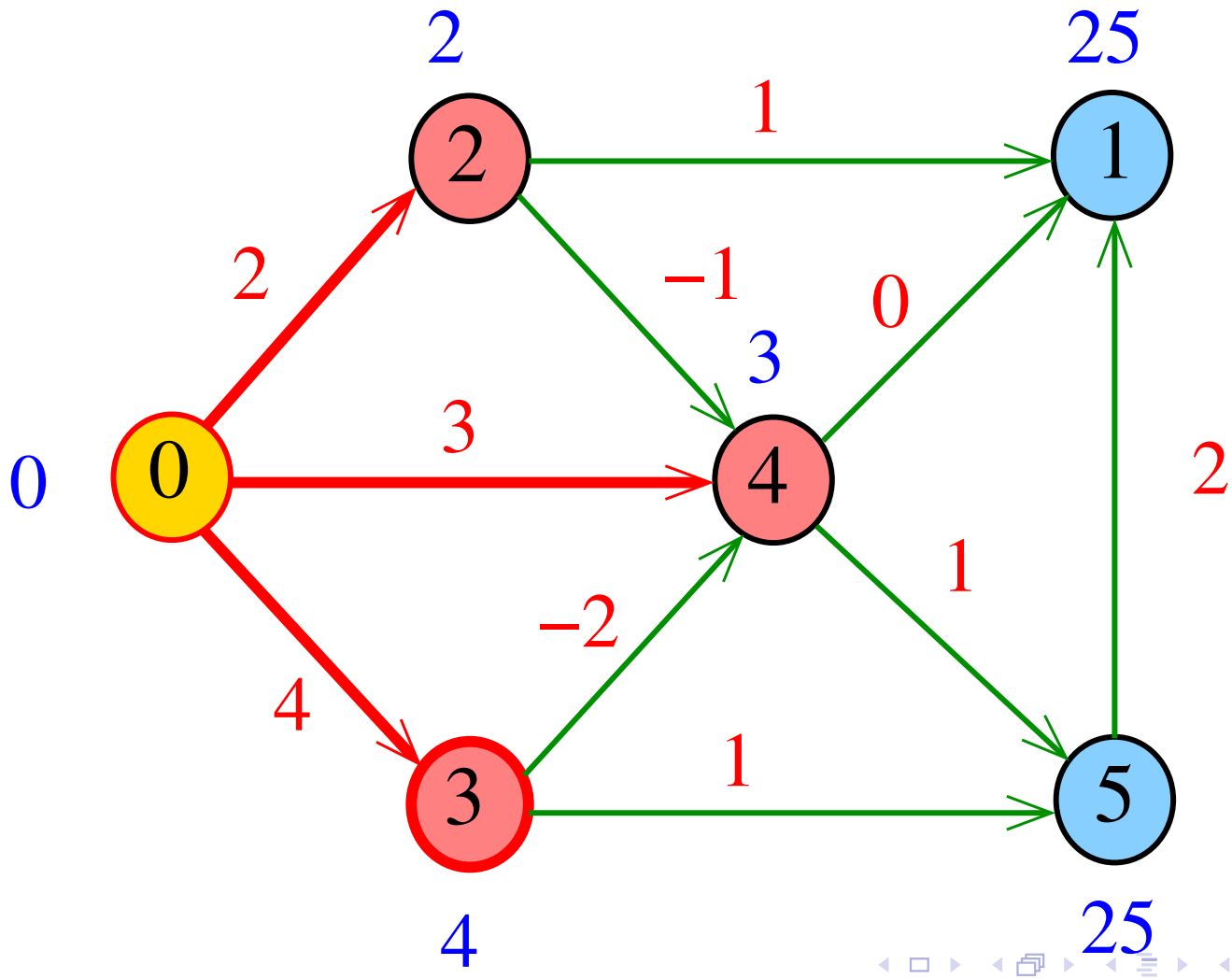
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



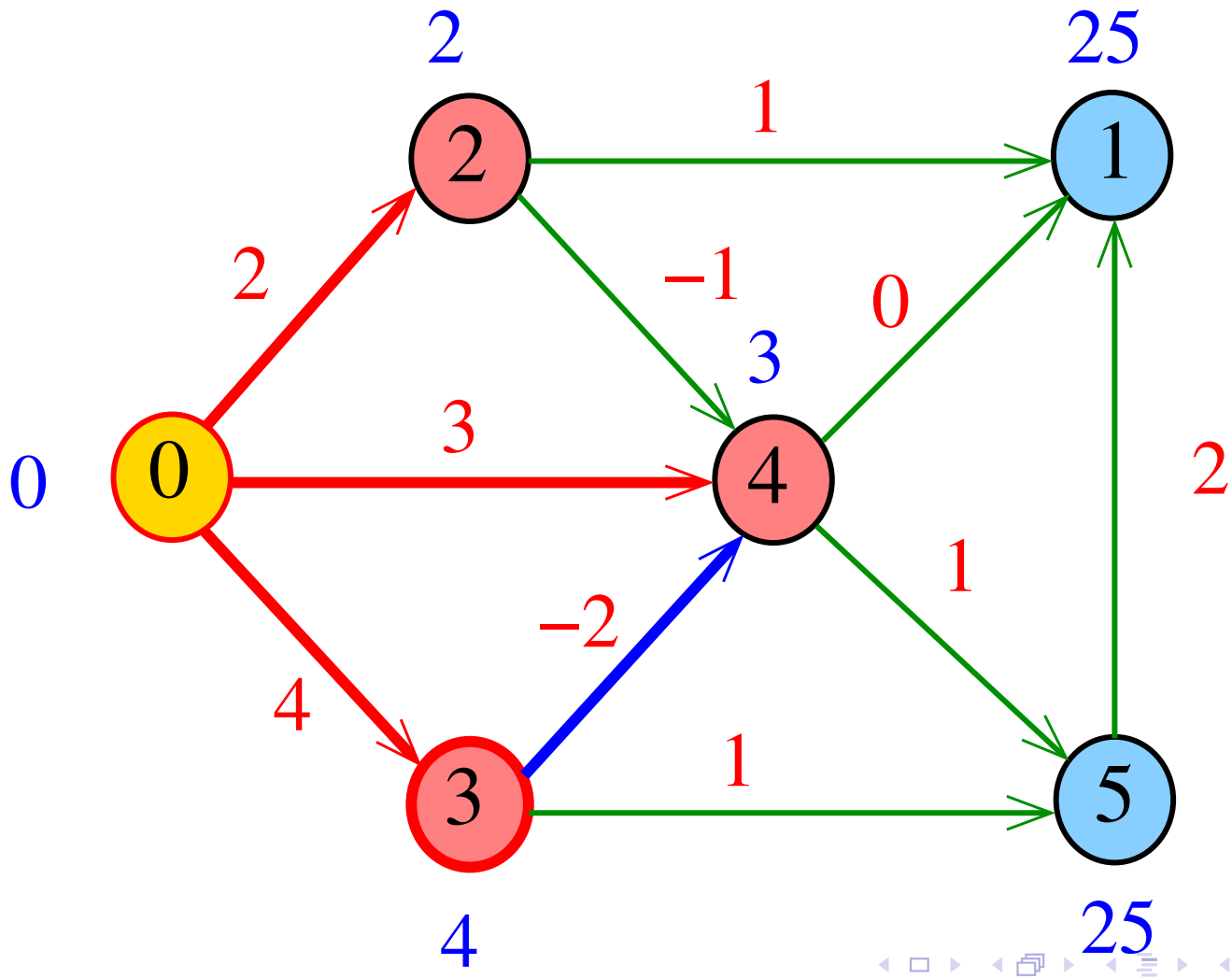
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



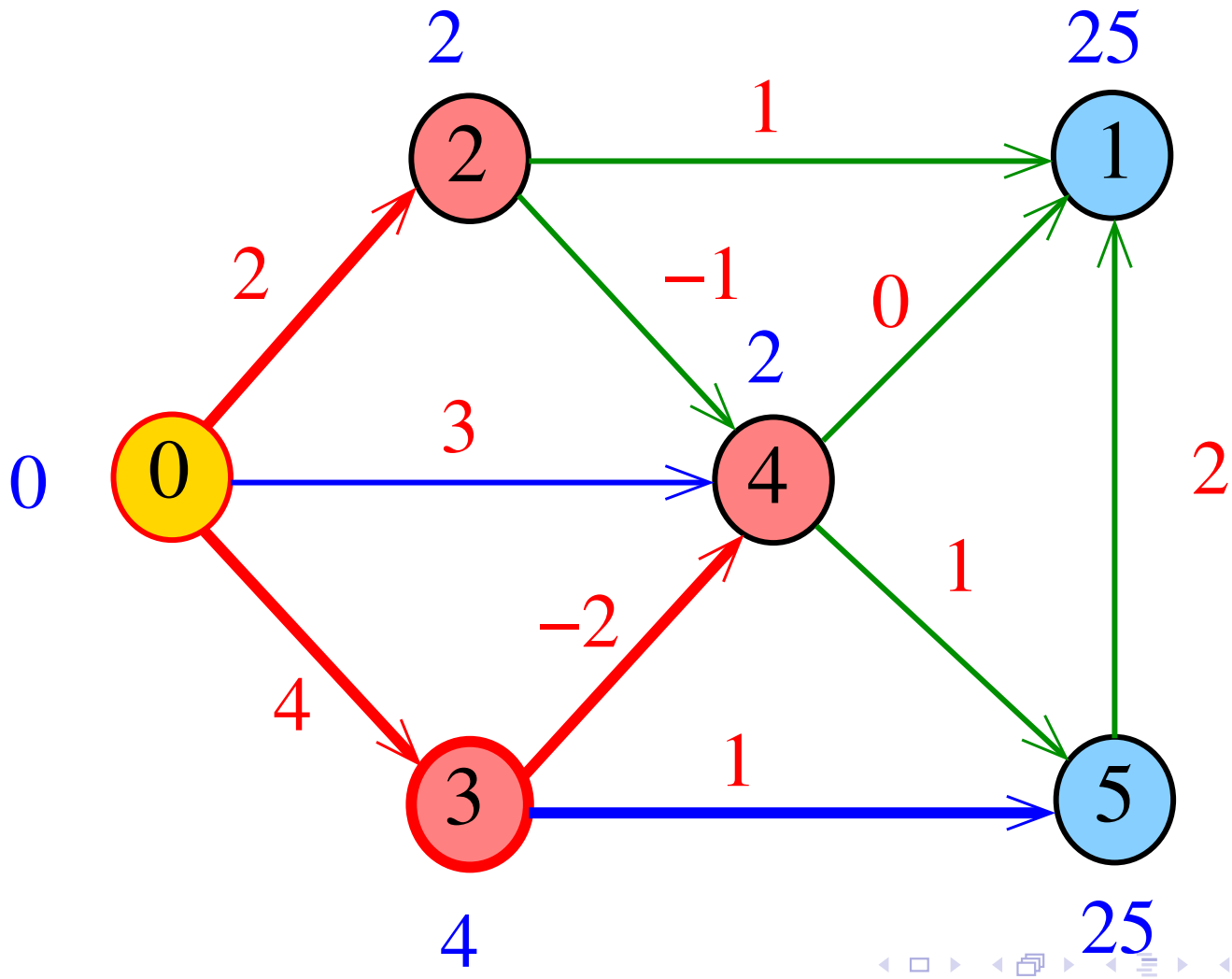
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



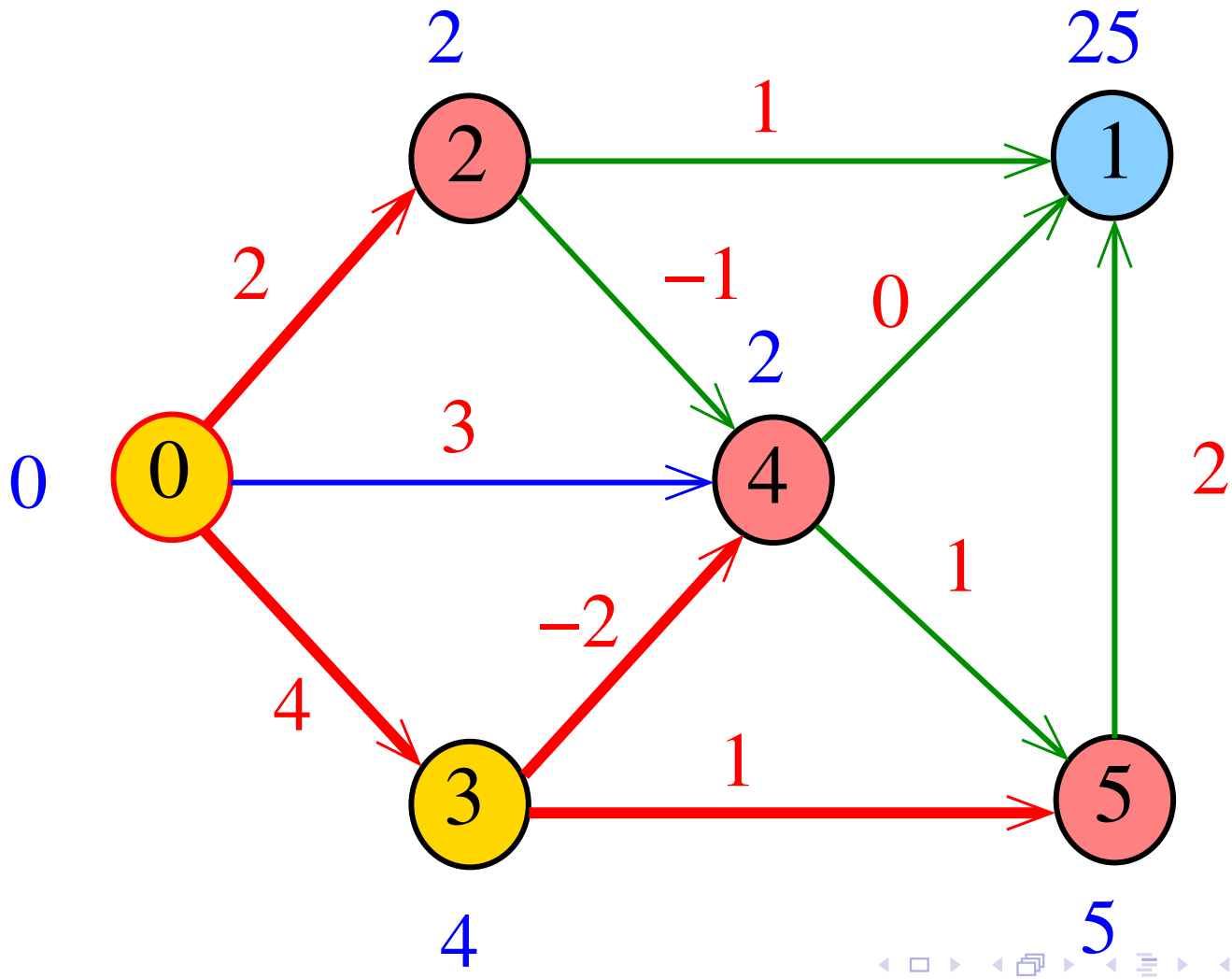
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



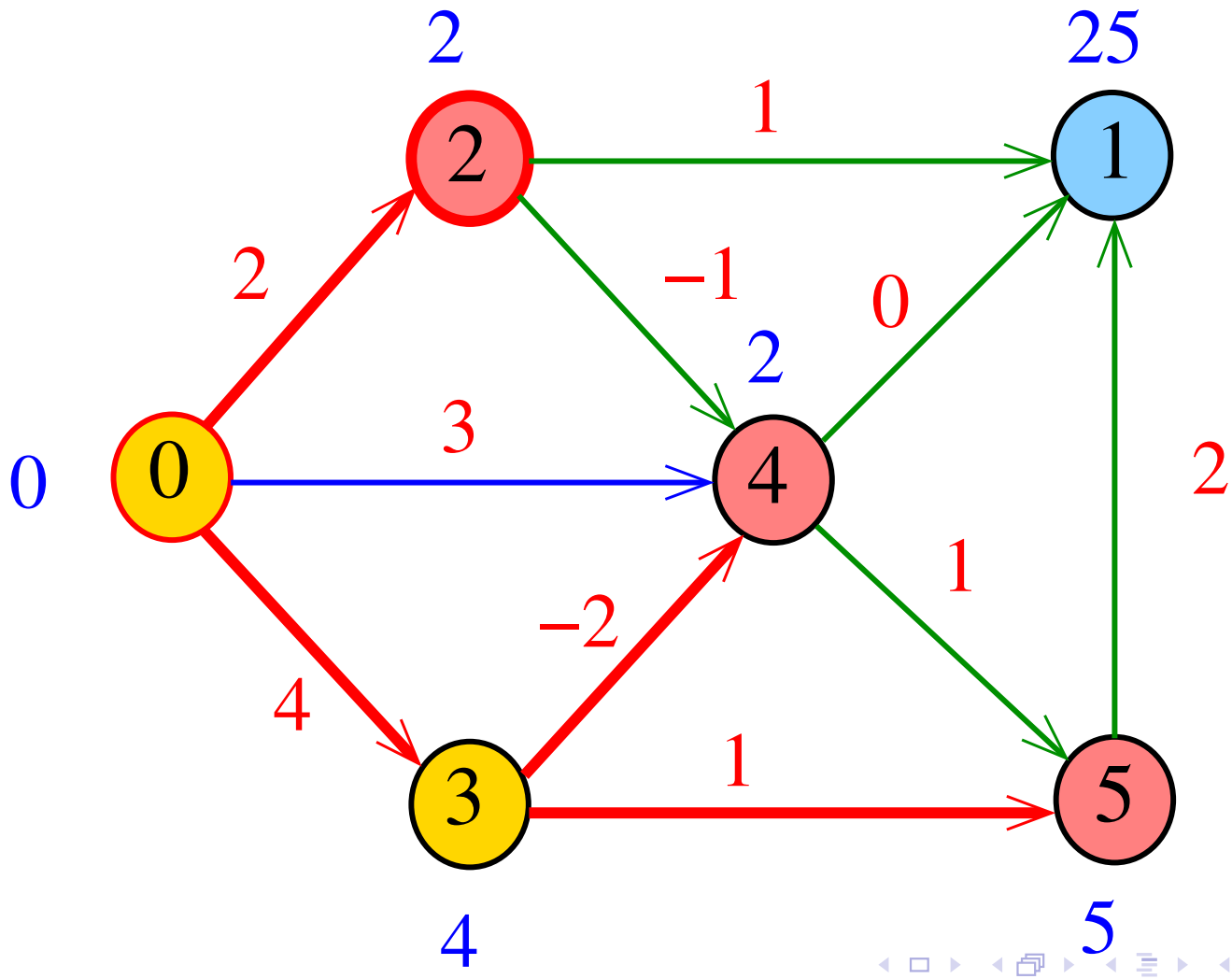
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



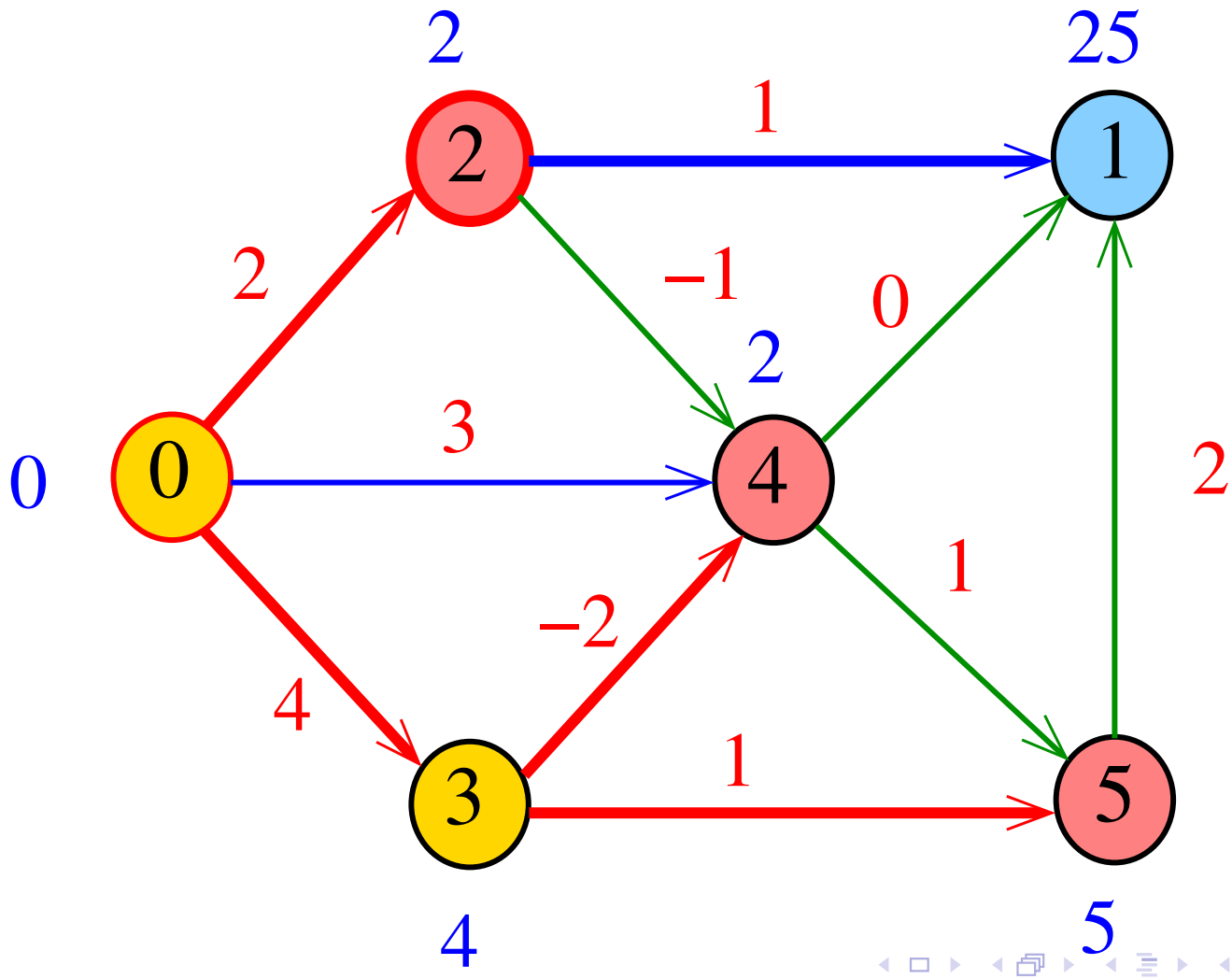
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



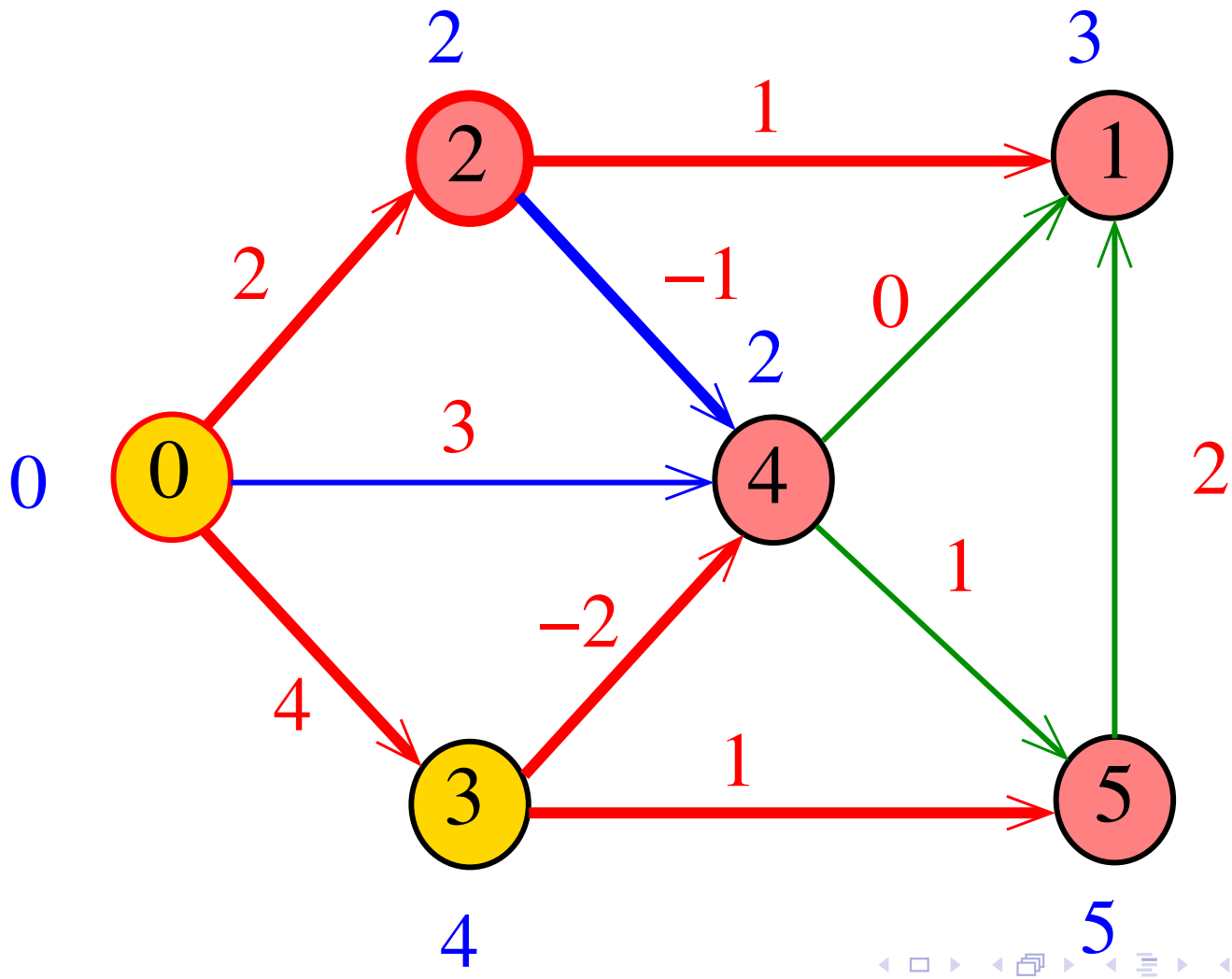
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



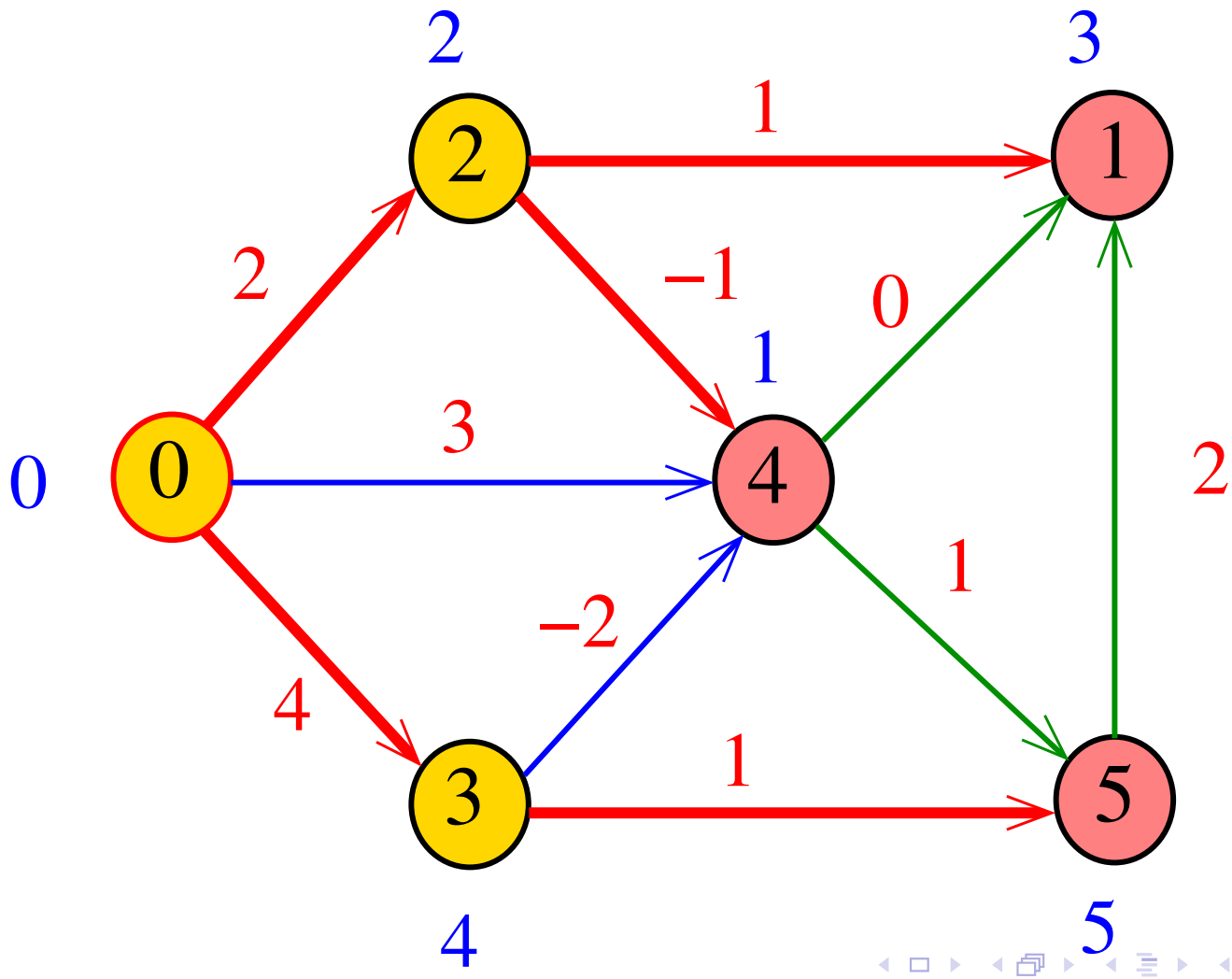
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



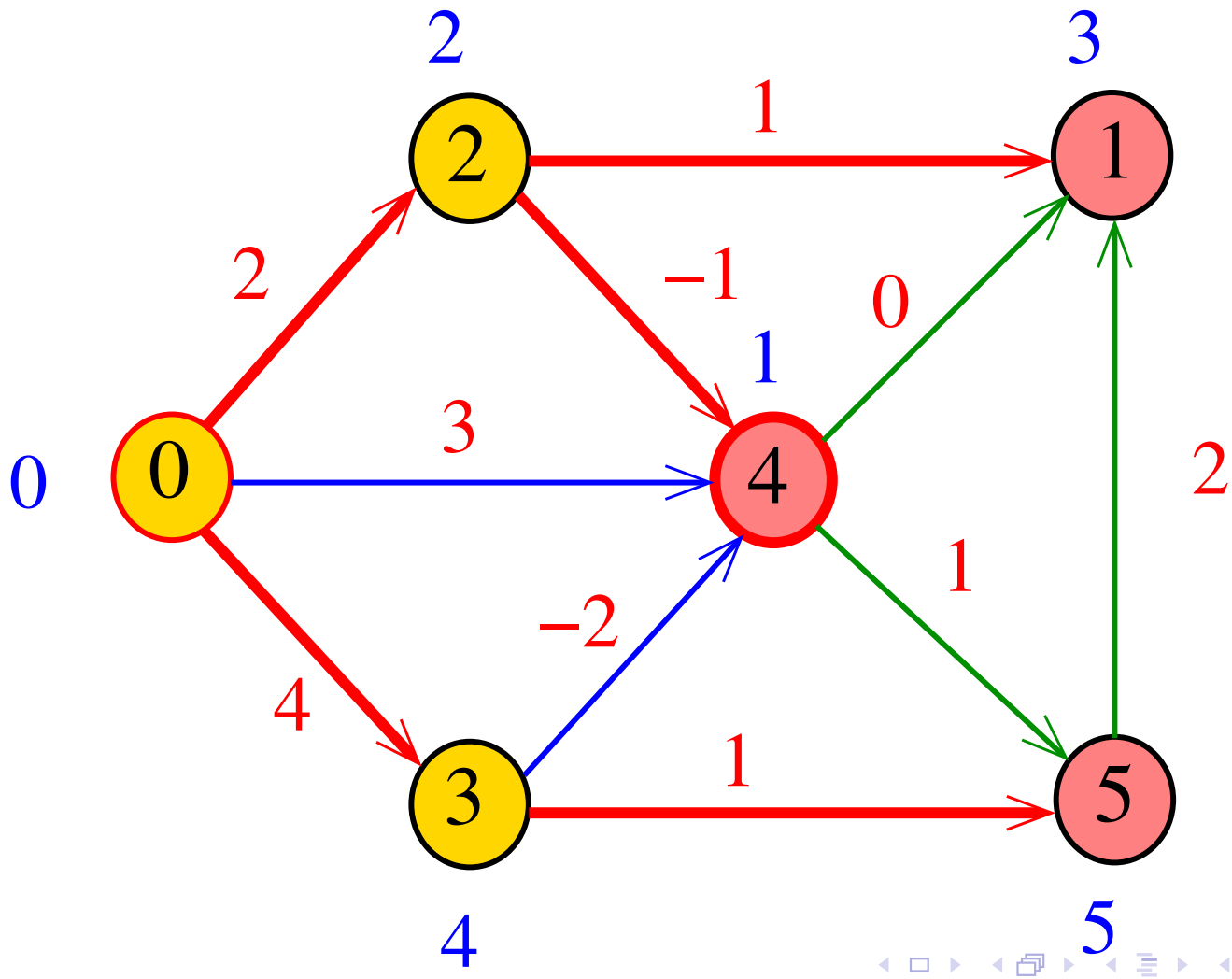
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



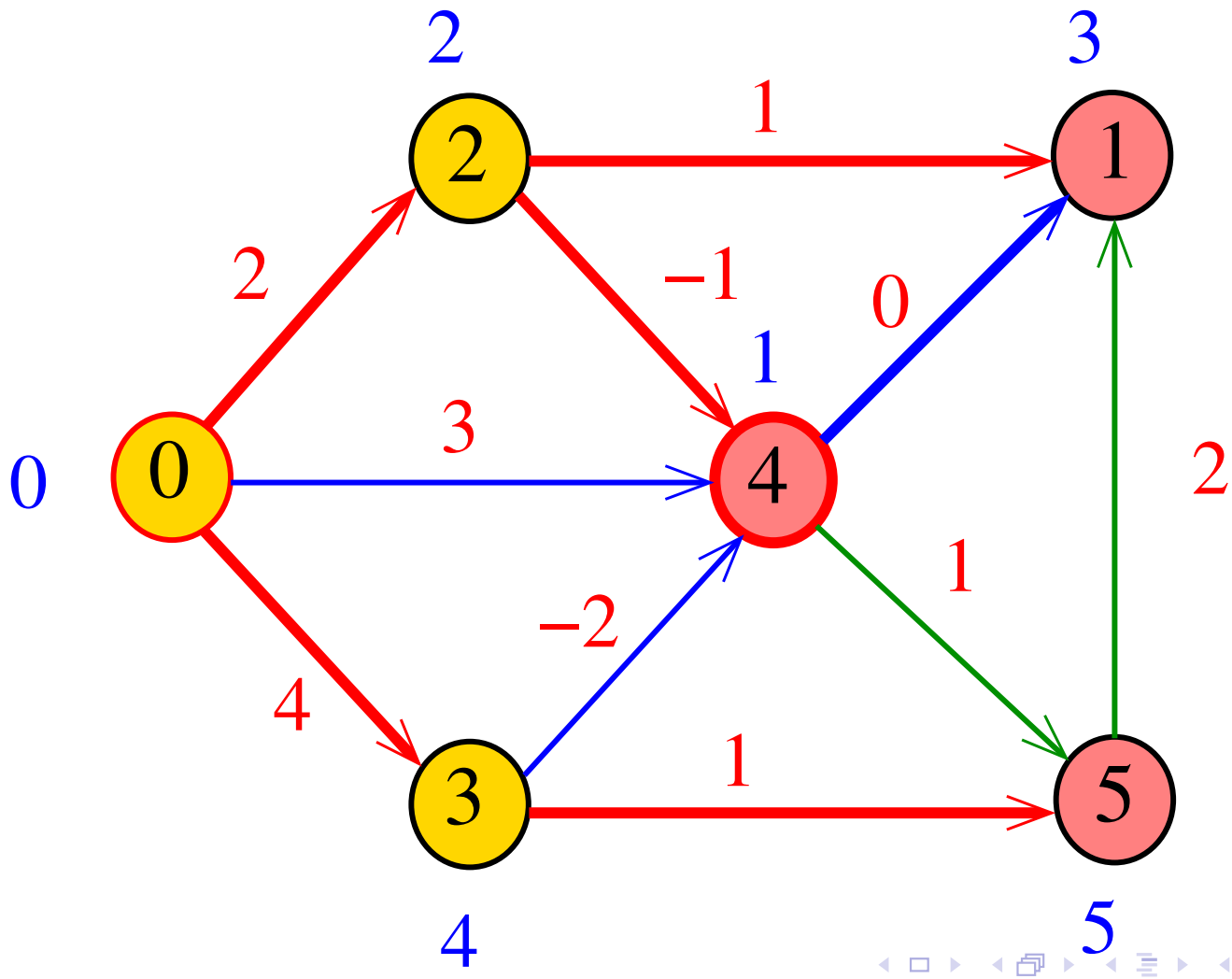
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



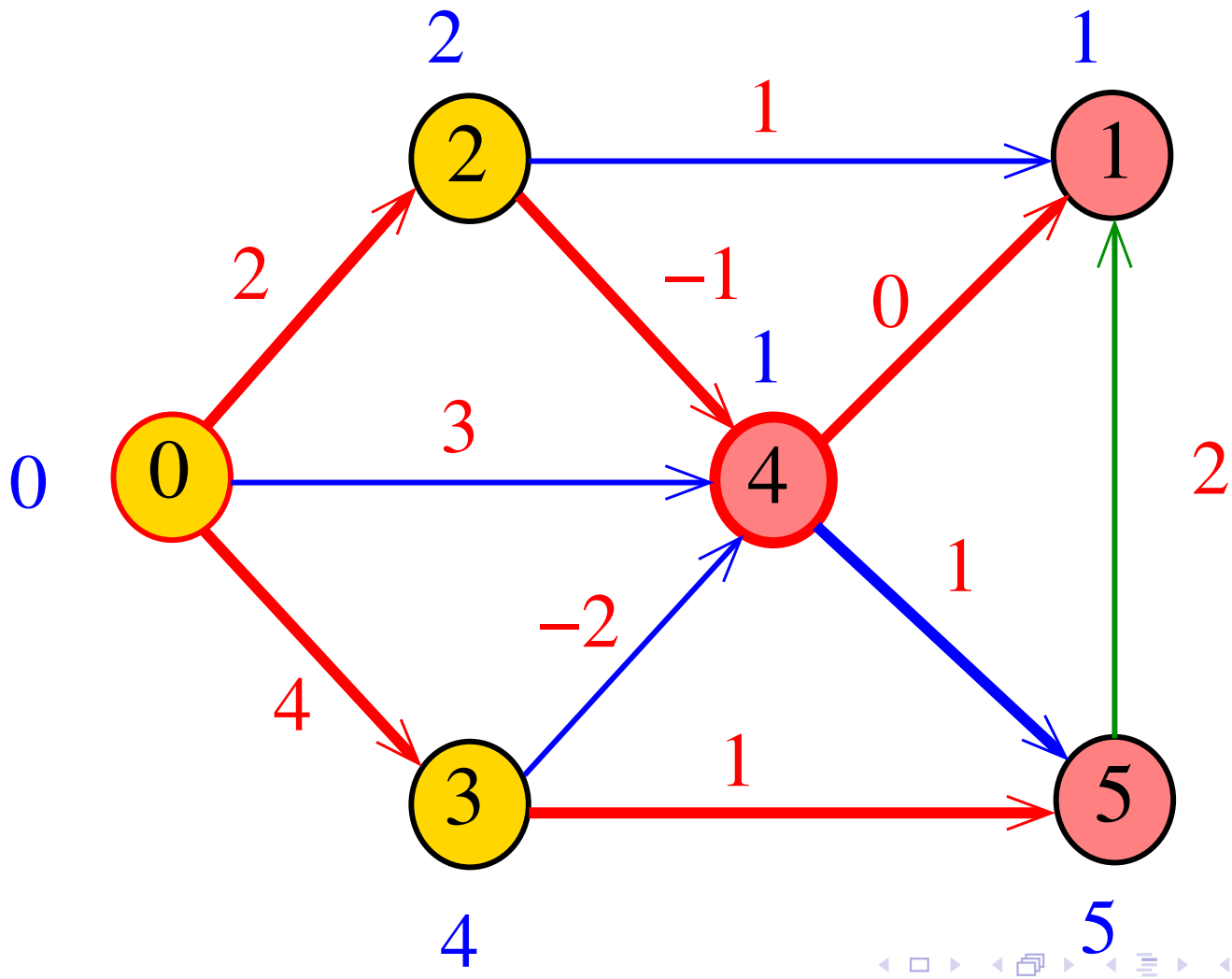
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



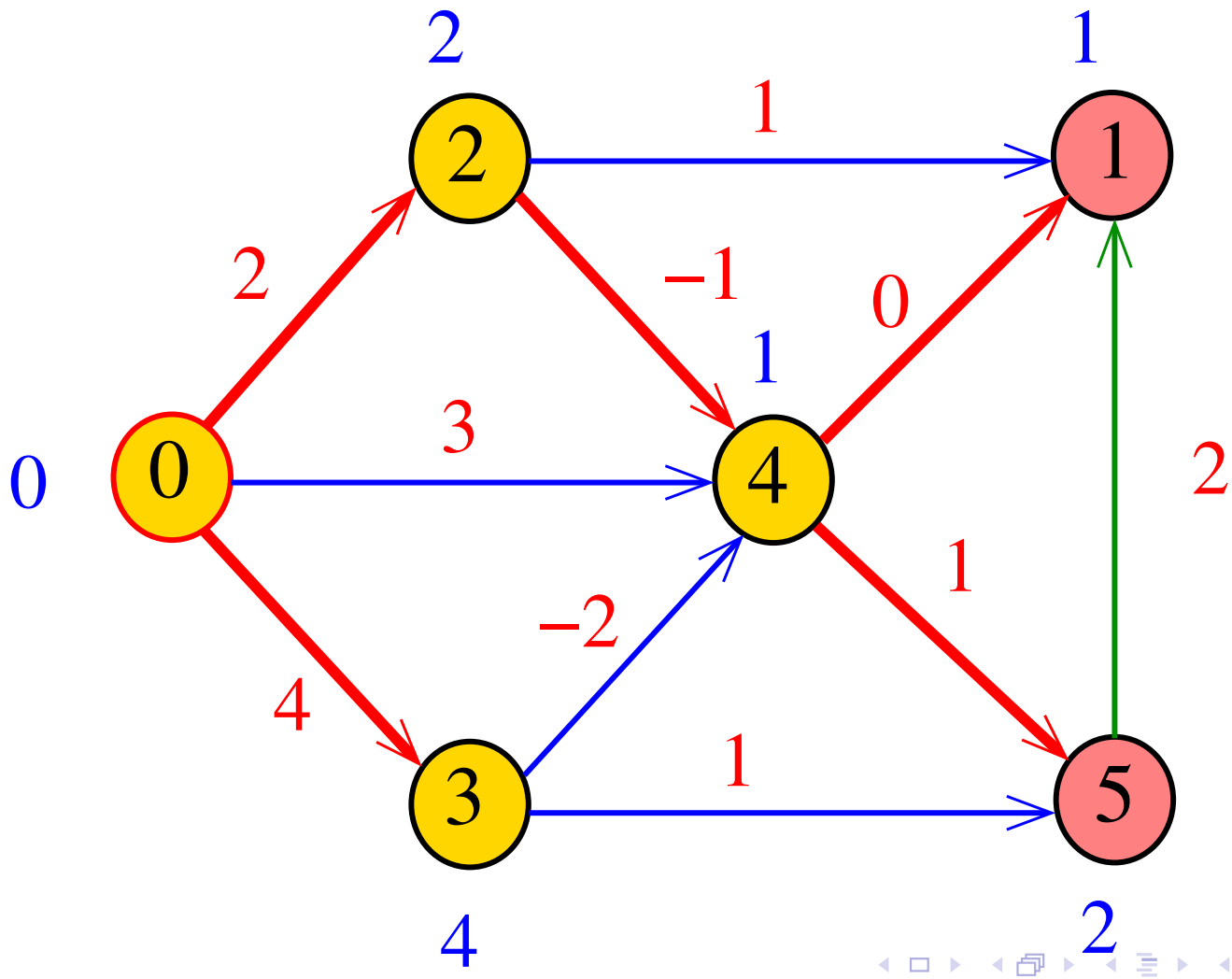
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



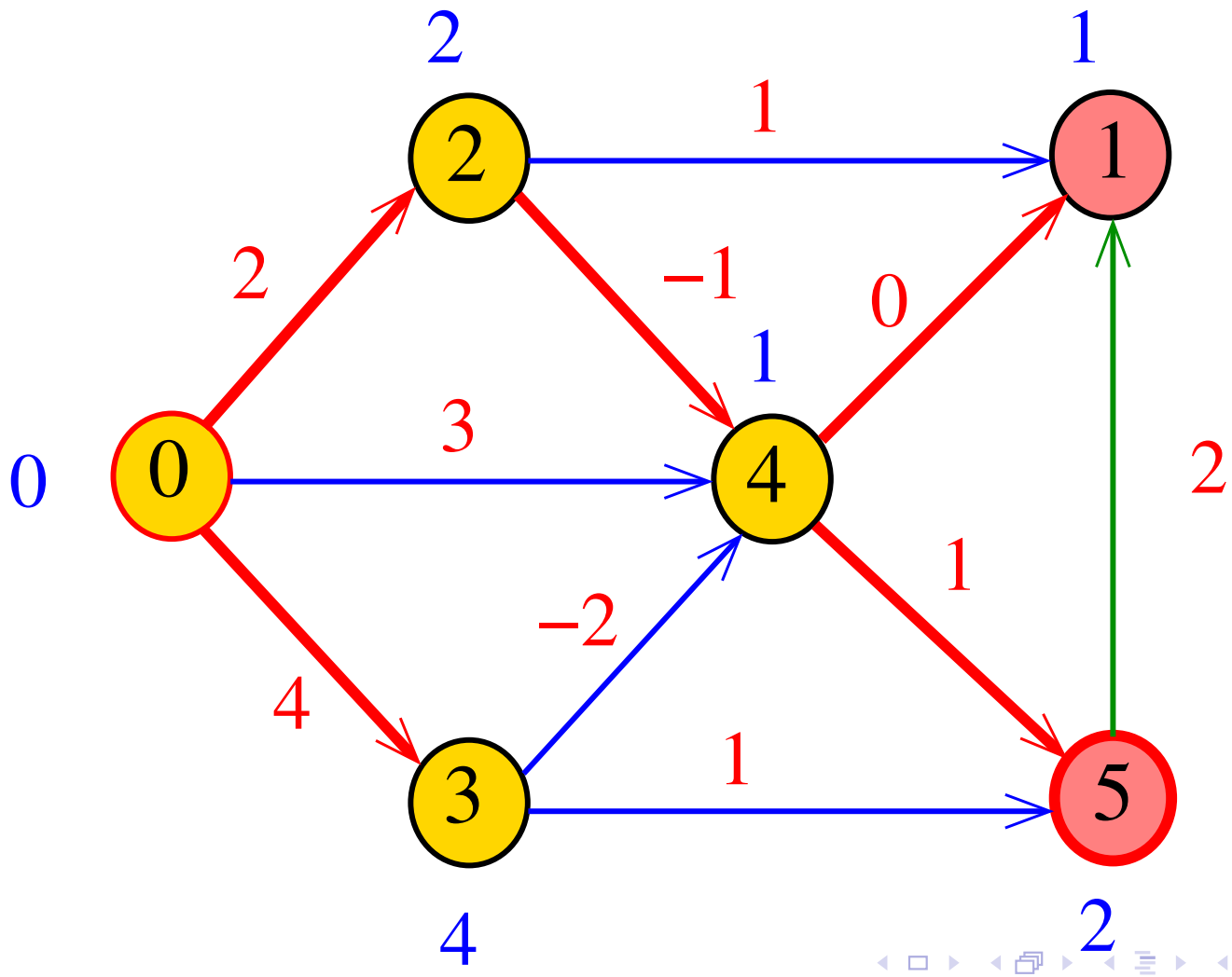
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



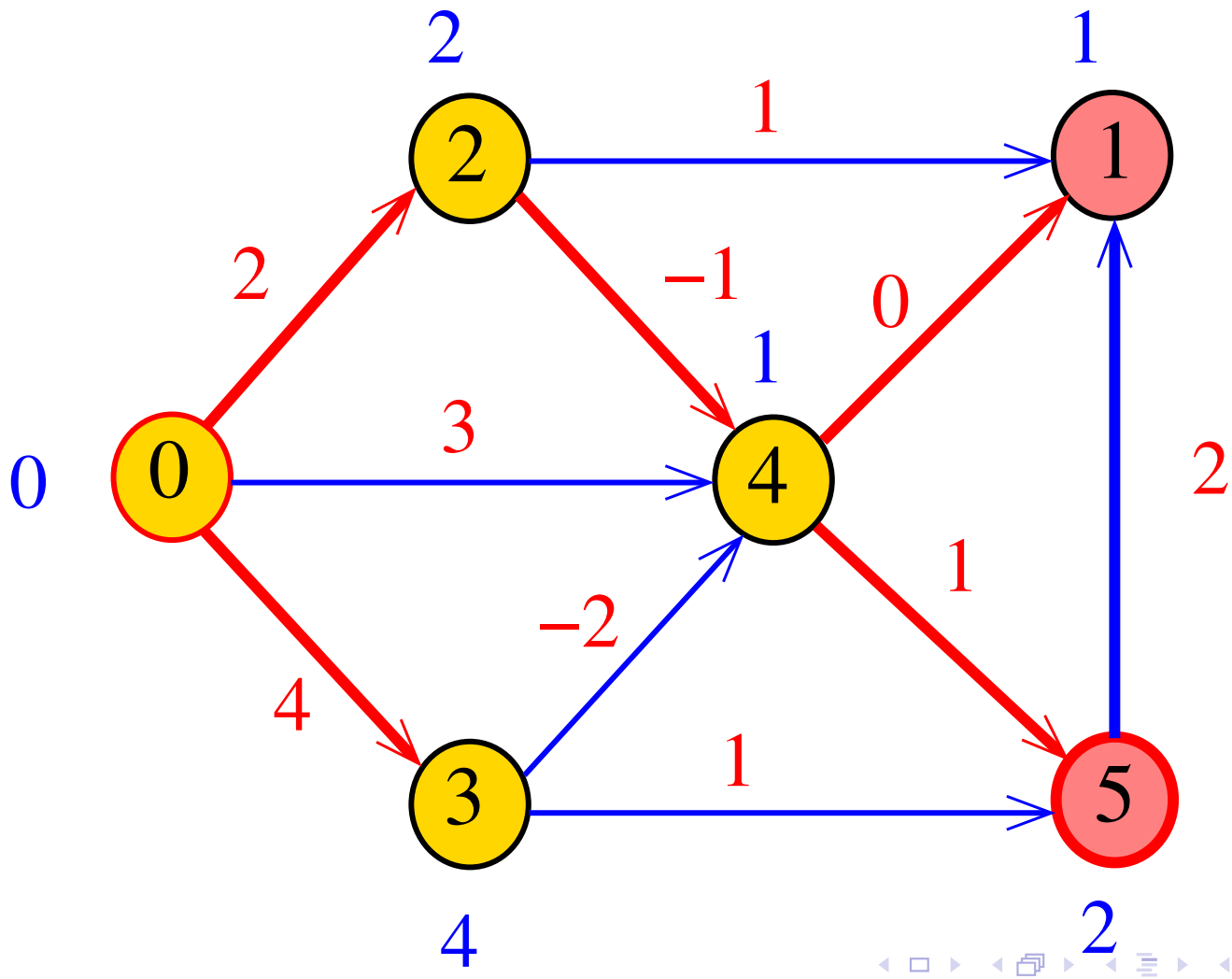
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



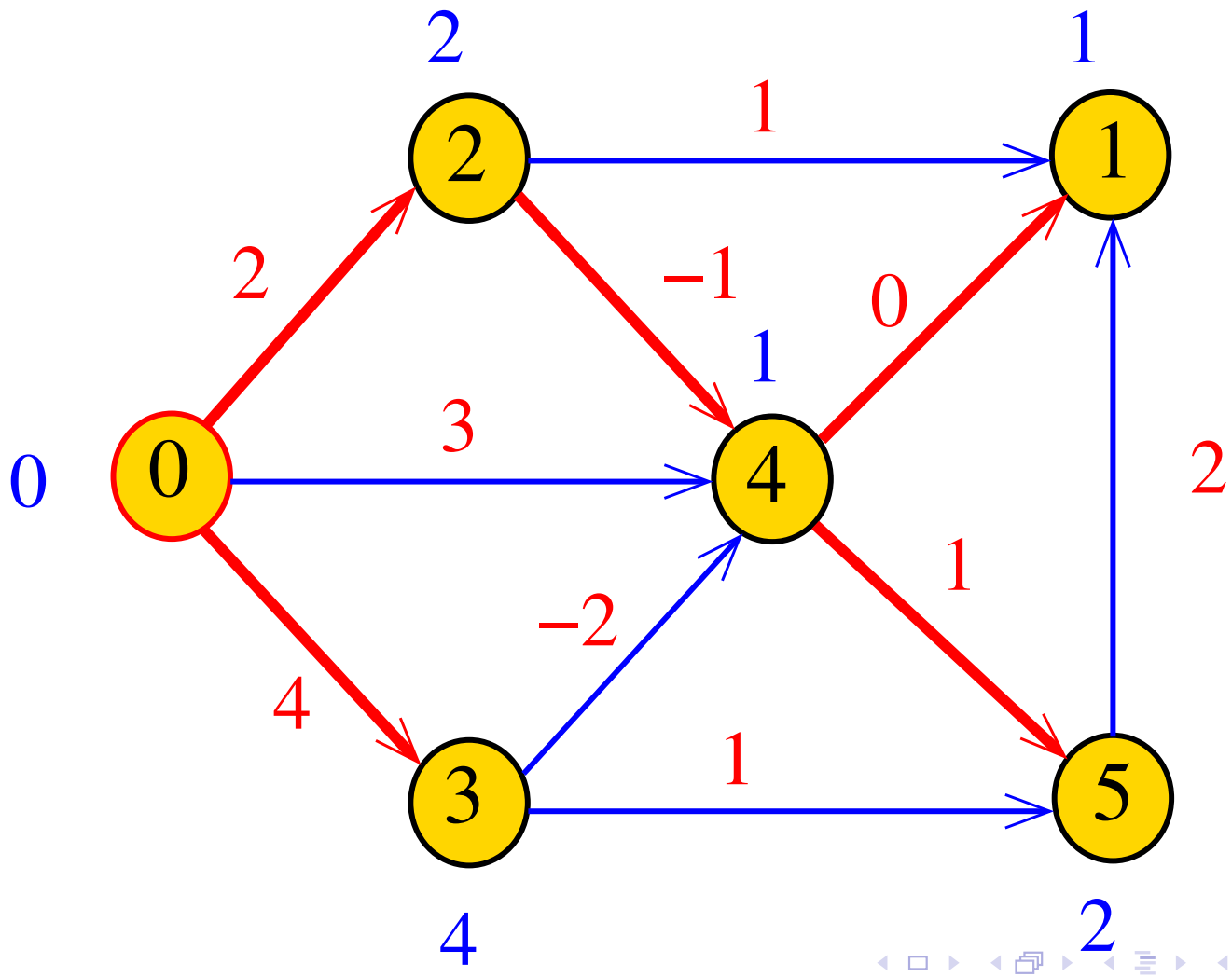
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



DAGmin

A função DAGmin recebe um DAG G com custos possivelmente negativos e uma ordenação topológica ts de G. Recebe também um vértice s.
Para cada vértice t, a função calcula o custo de um caminho de custo mínimo de s a t. Esse número é depositado em cst[t].

void
DAGmin (Digraph G, Vertex ts[], Vertex s,
double cst[])

DAGmin

```
void DAGmin (Digraph G, Vertex ts[], Vertex s,
                        double cst[]) {
1    int i; Vertex v; link p;
2    for (v= 0; v < G->V; v++)
3        cst[v] = INFINITO;
4    cst[s] = 0;
5    for (v = ts[i = 0]; i < G->V; v = ts[i++]){
6        if (cst[v] == INFINITO) continue;
7        for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
8            if (cst[p->w] > cst[v] + p->cst)
9                cst[p->w] = cst[v] + p->cst;
   }
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `DAGmin` é $O(V + A)$.

Caminhos máximos em DAGs

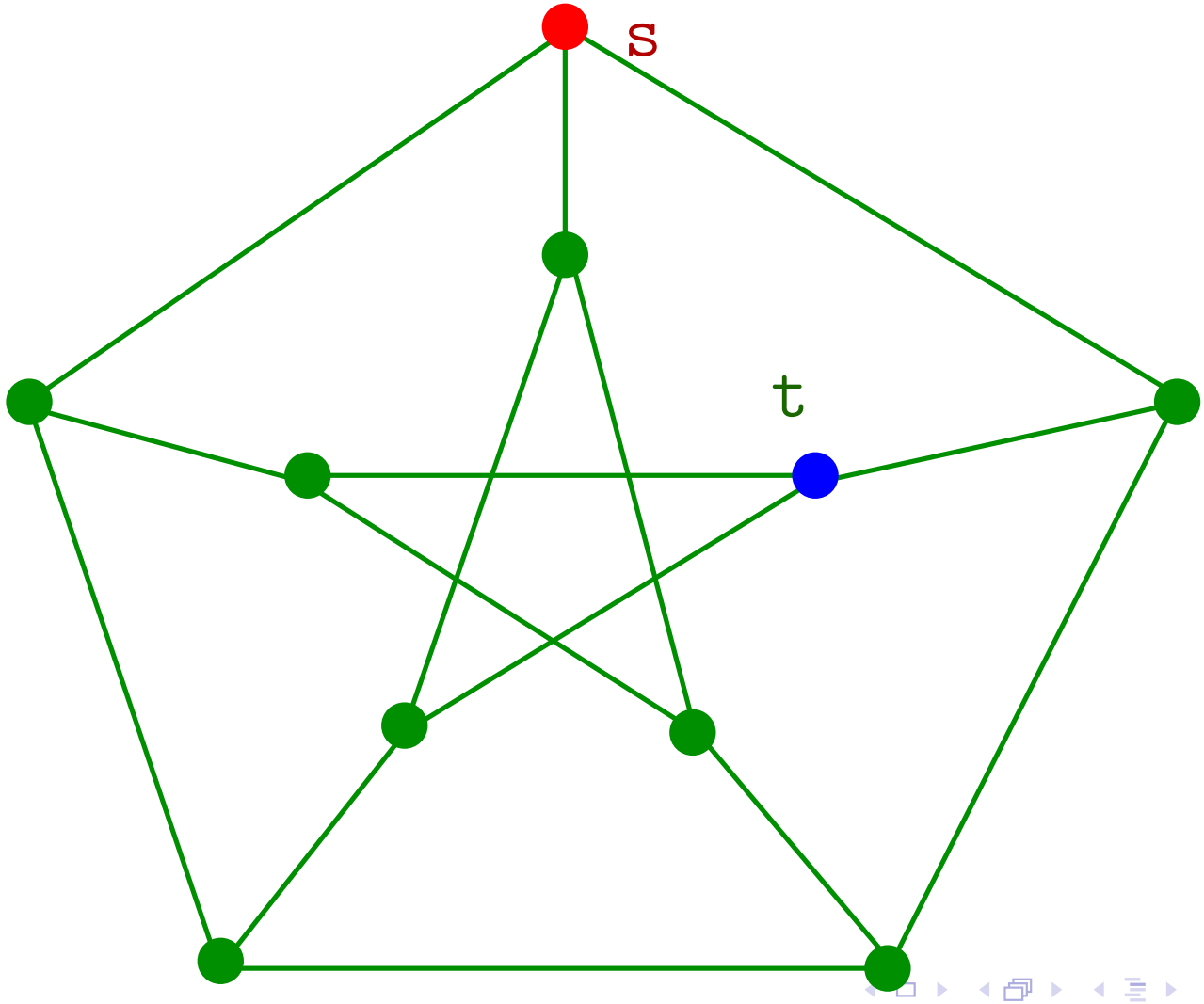
Do ponto de vista computacional, o problema de encontrar um caminho simples de custo máximo num digrafos com custos nos arcos é difícil.

Mais precisamente, problema é **NP-difícil** como vocês verão no final de Análise de Algoritmos.

O problema torna-se fácil, entretanto, quando restrito a DAGs.

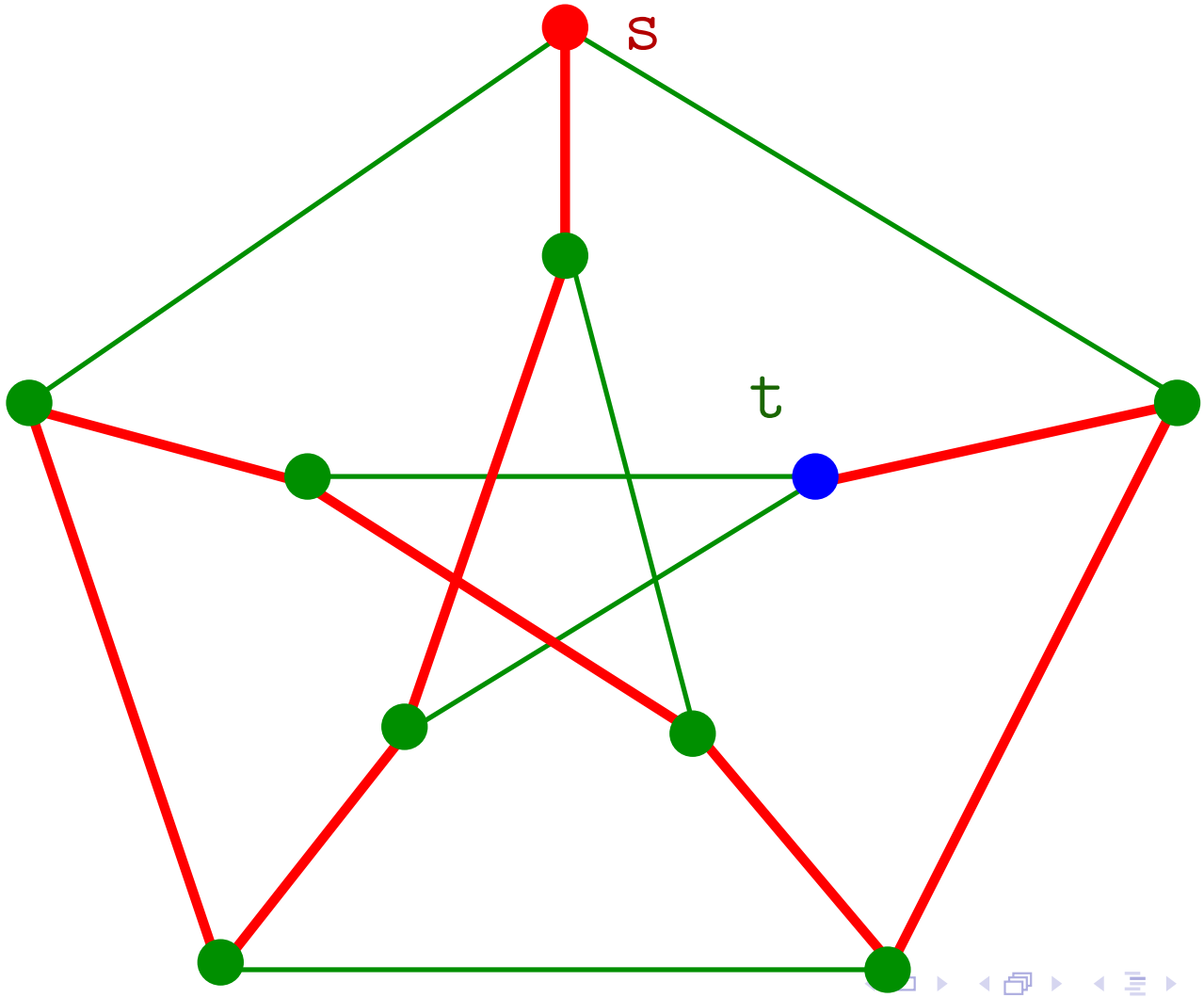
Caminhos hamiltonianos

Problema: Dados vértices s e t de um grafo encontrar um caminho hamiltoniano de s e t



Caminhos hamiltonianos

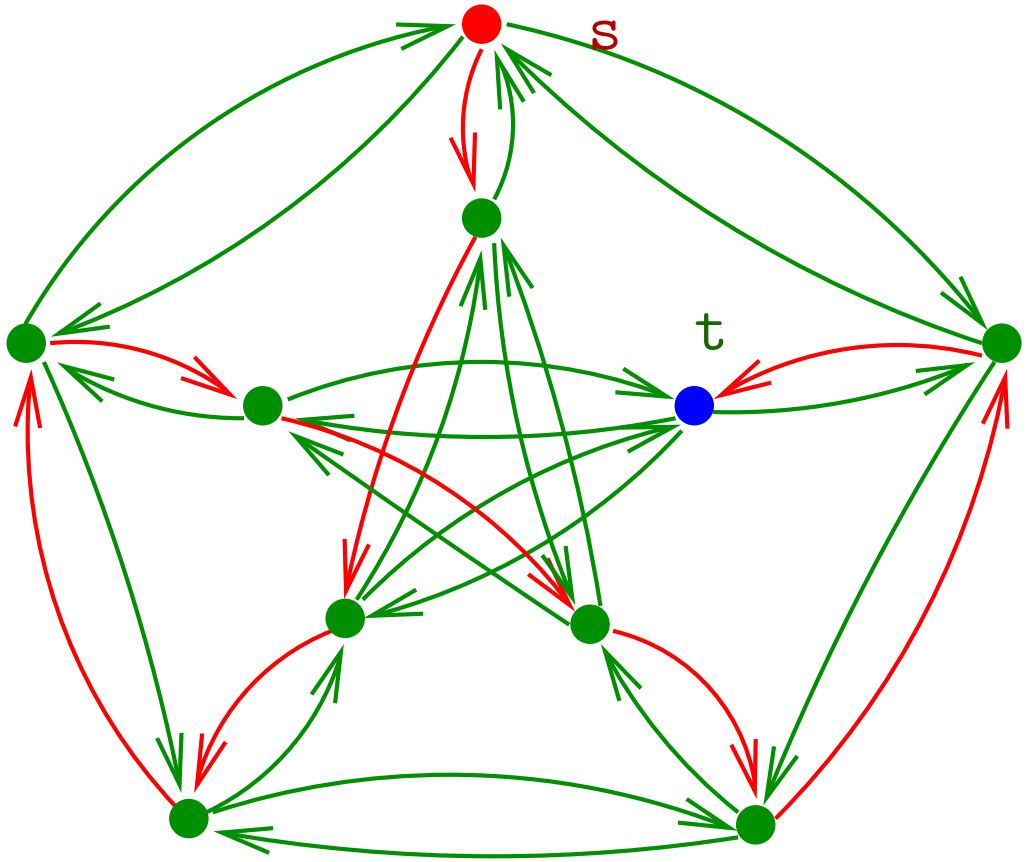
Problema: Dados vértices s e t de um grafo encontrar um caminho hamiltoniano de s e t



Redução polinomial

todos custos $= -1$

G



G possui um st-caminho hamiltoniano $\Leftrightarrow$

G possui um st-caminho **simples** de custo $-(V-1)$.

Conclusão

É sabido que:

> O problema do caminho hamiltoniano é NP-difícil.

Assim, como problema do caminho simples mínimo com custos negativos é tão difícil quanto o problema do caminho hamiltoniano.

> O problema do caminho simples de custo mínimo é NP-difícil.

Complexidade computacional

O problema do caminho simples de custo mínimo é NP-difícil.

NP-difícil = **não se conhece** algoritmo de consumo de 'tempo polinomial'

Em outras palavras: ninguém conhece um algoritmo eficiente para o problema ...

Se alguém conhece, não contou para ninguém ...

DAGmax

```
void DAGmax (Digraph G, Vertex ts[], Vertex s,
                        double cst[]) {
1    int i; Vertex v; link p;
2    for (v= 0; v < G->V; v++)
3         cst[v] = -INFINITO;
4    cst[s] = 0;
5    for (v = ts[i = 0]; i < G->V; v = ts[++i]){
6         if (cst[v] == -INFINITO) continue;
7         for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
8              if (cst[p->w] < cst[v] + p->cst)
9                   cst[p->w] = cst[v] + p->cst;
   }
}
```

Consumo de tempo

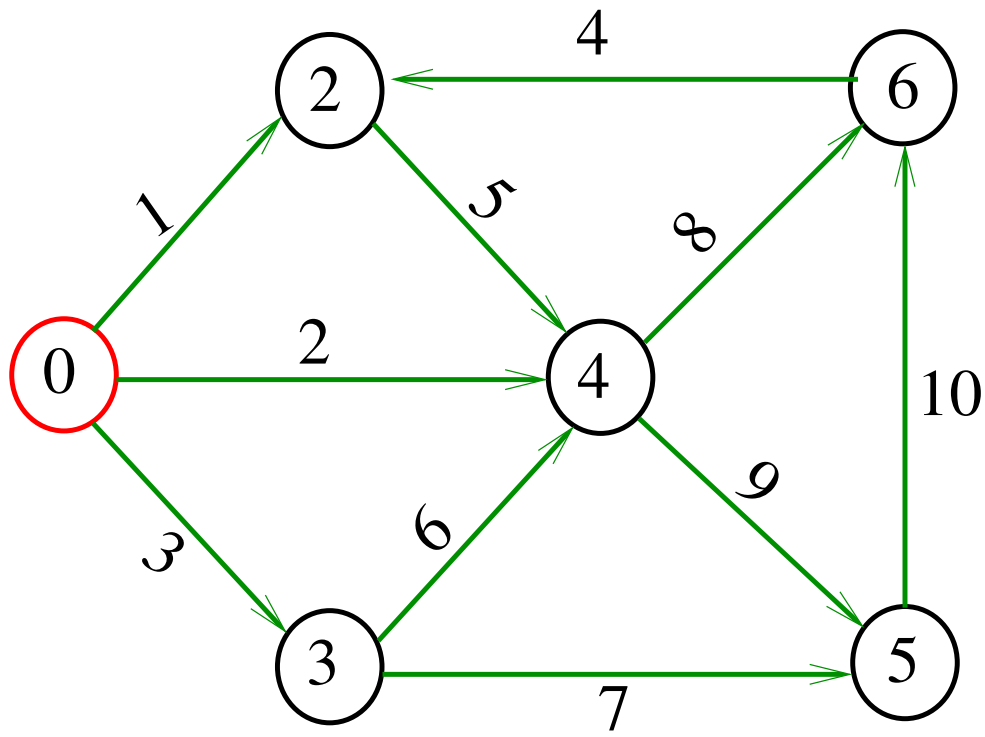
O consumo de tempo da função `DAGmax` é $O(V + A)$.

Dijkstra em digrafos com custos negativos

Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **possivelmente negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

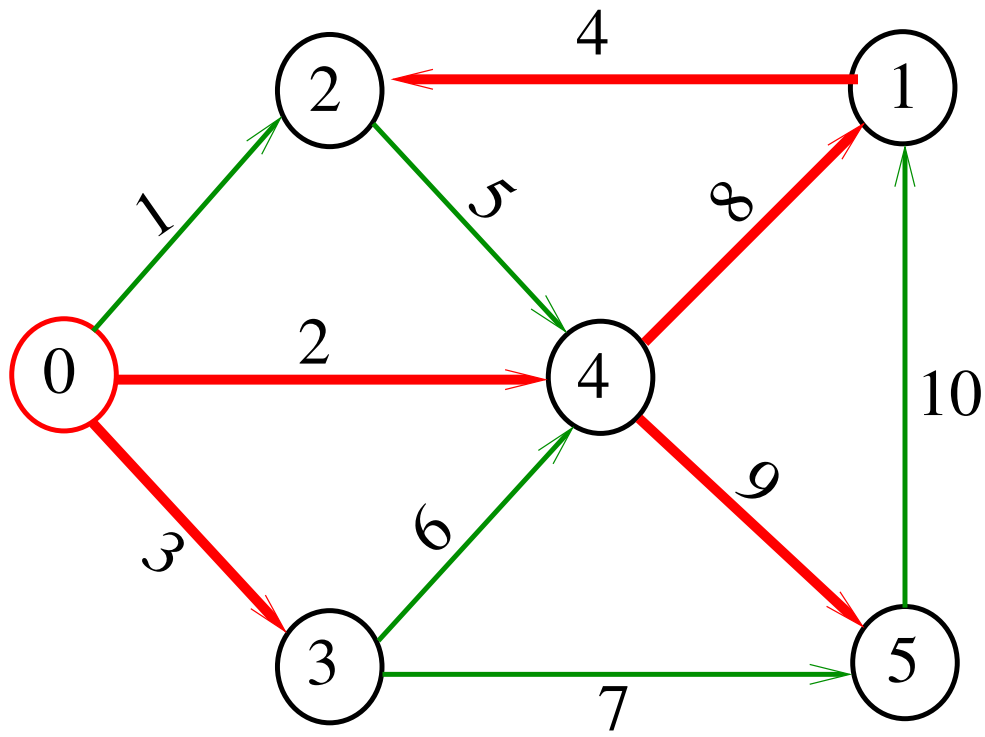
Entra:



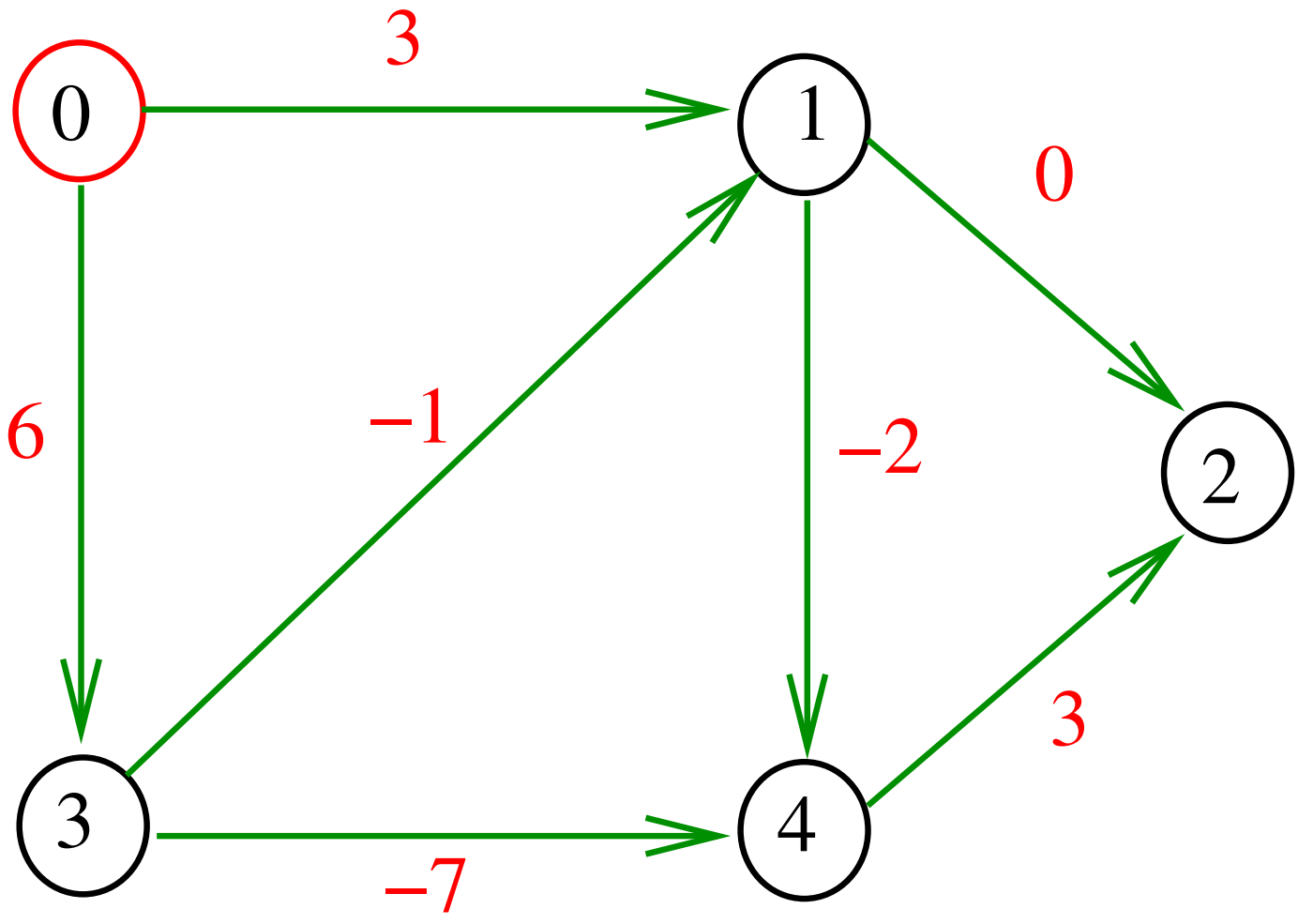
Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **possivelmente negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

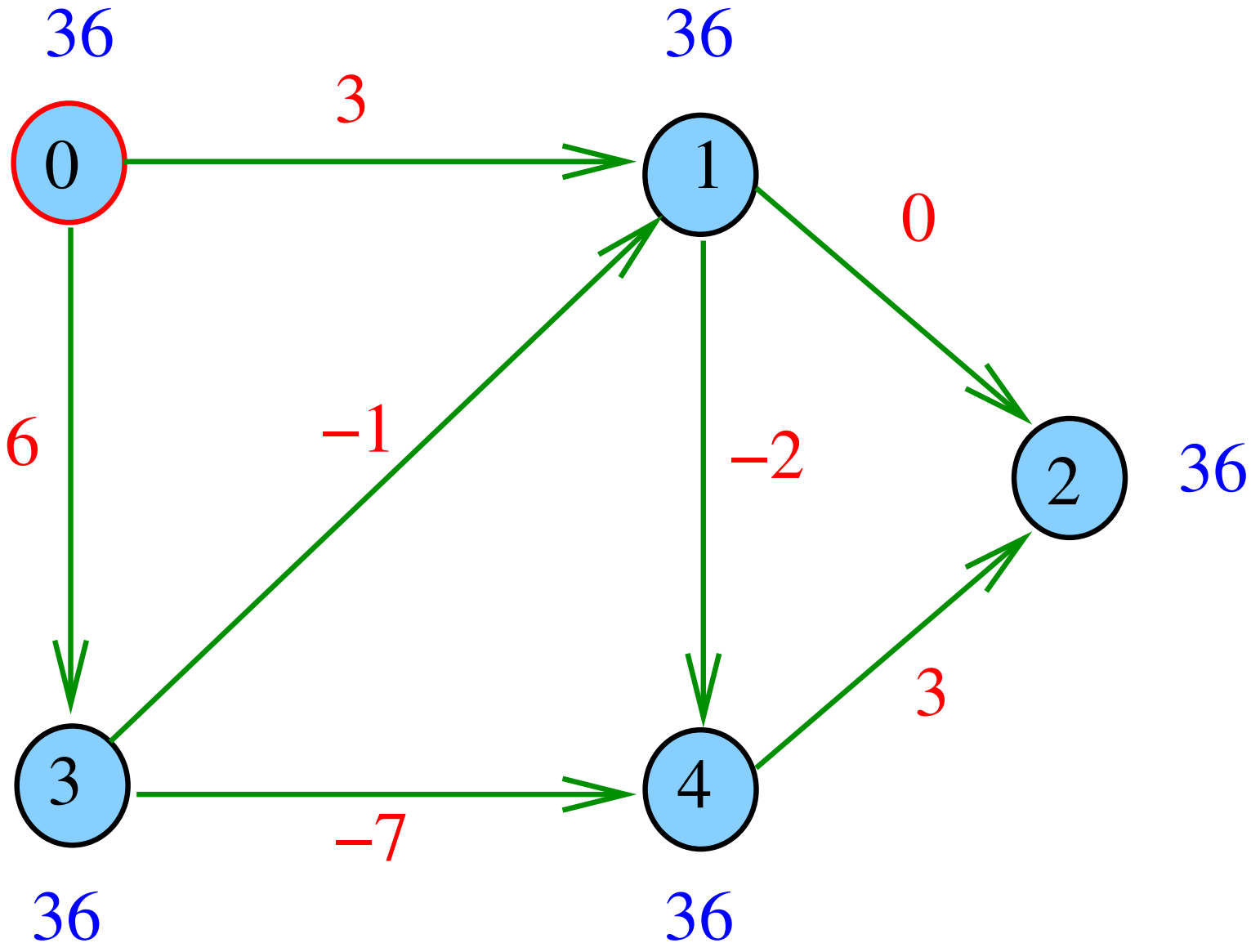
Sai:



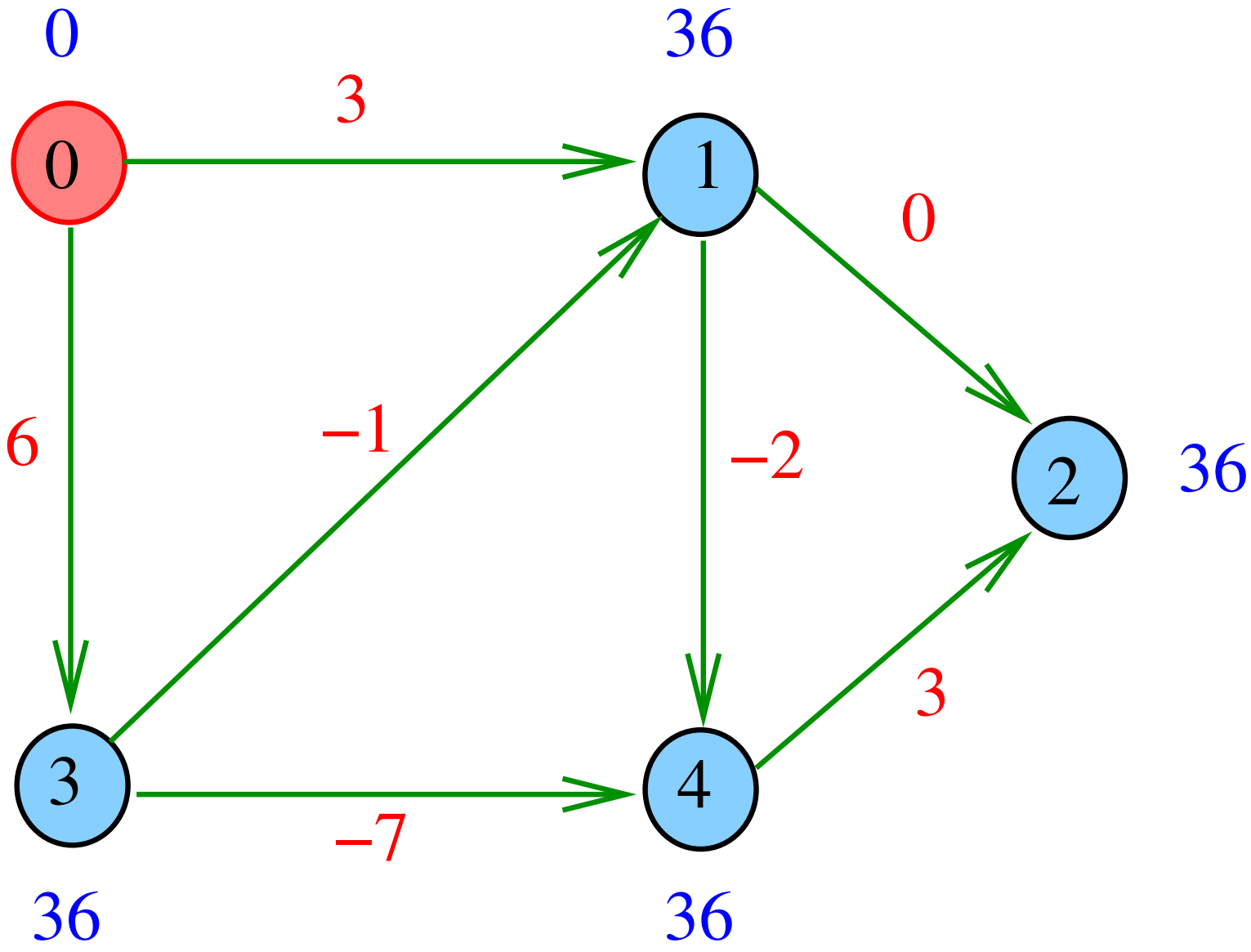
Tentando Dijkstra



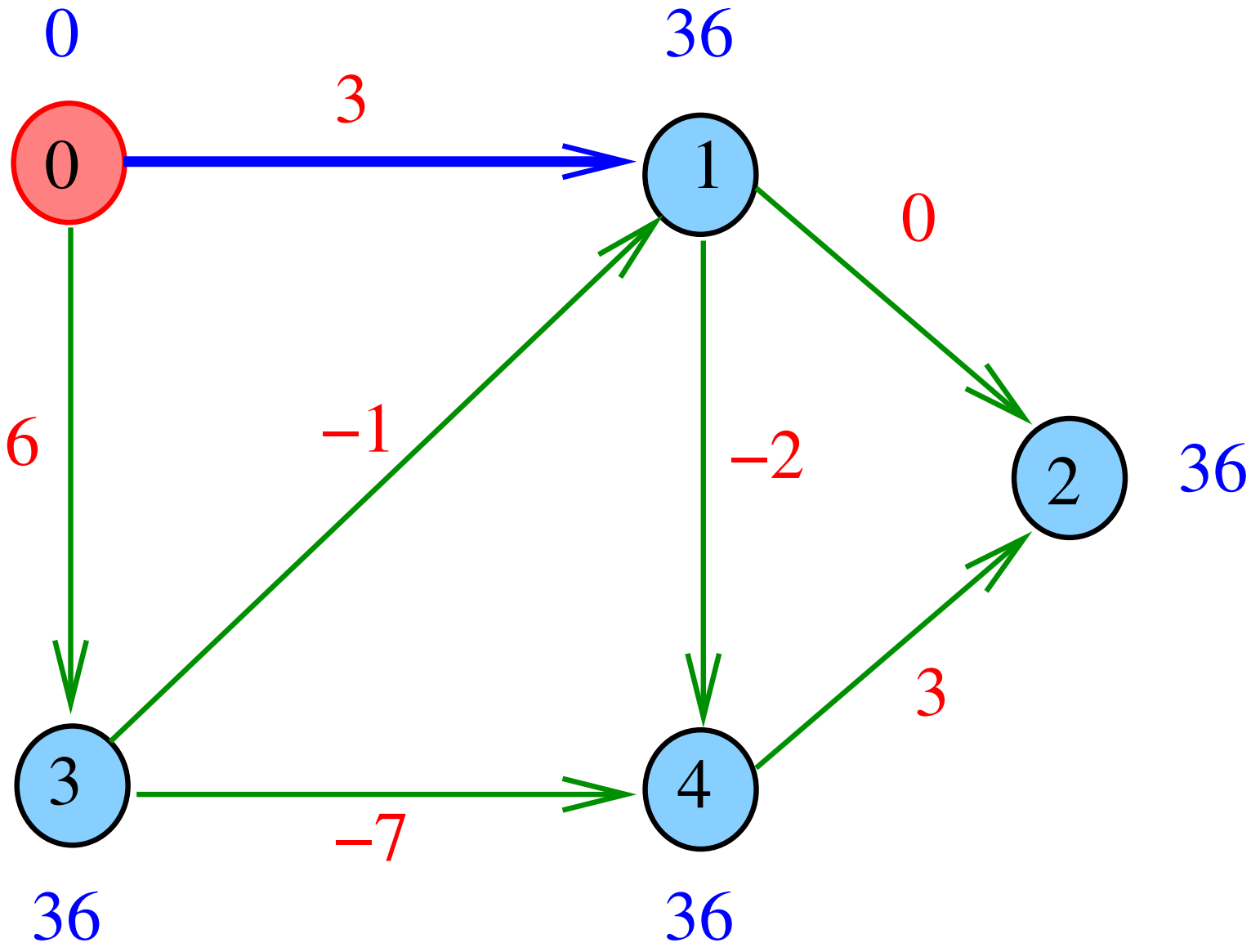
Tentando Dijkstra



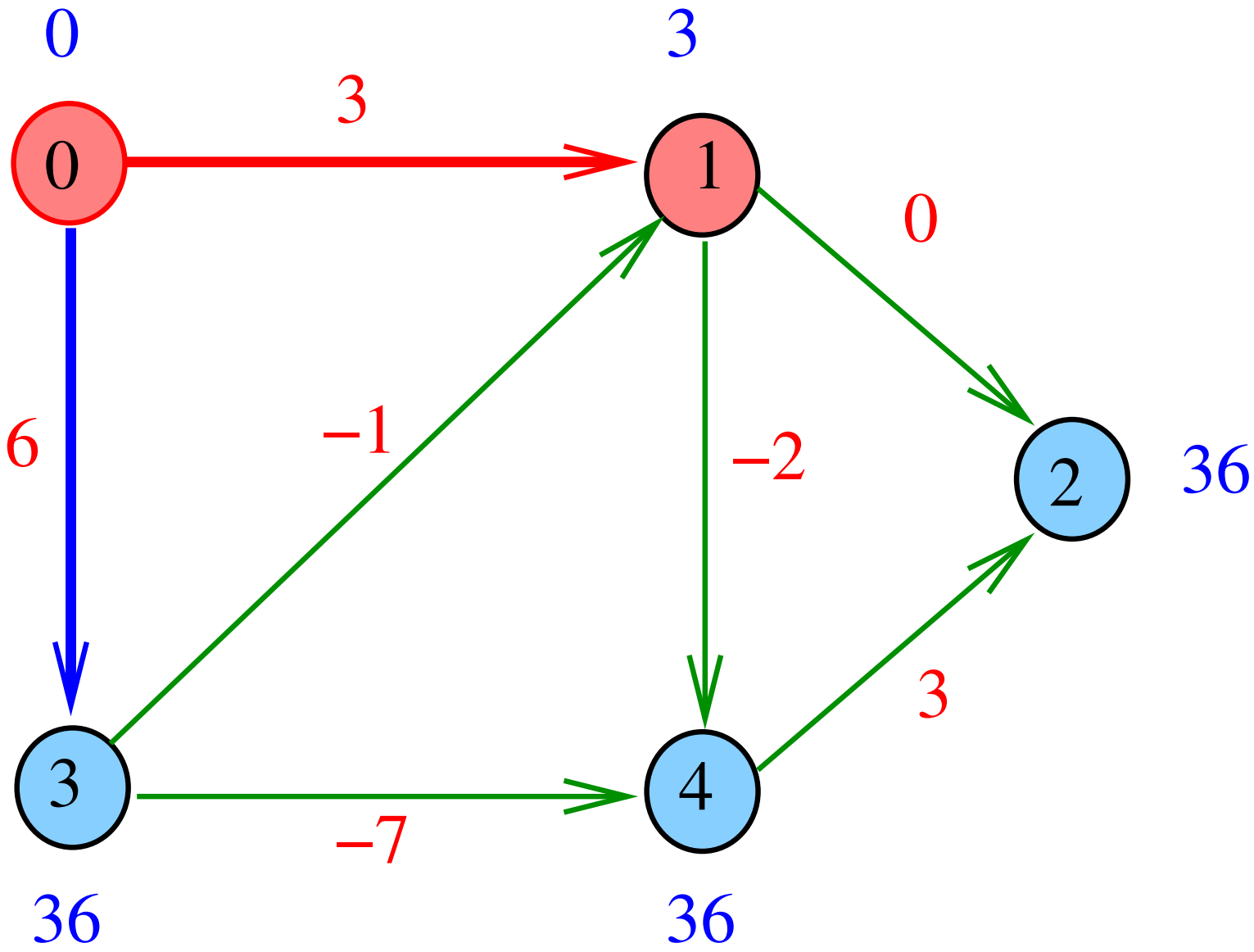
Tentando Dijkstra



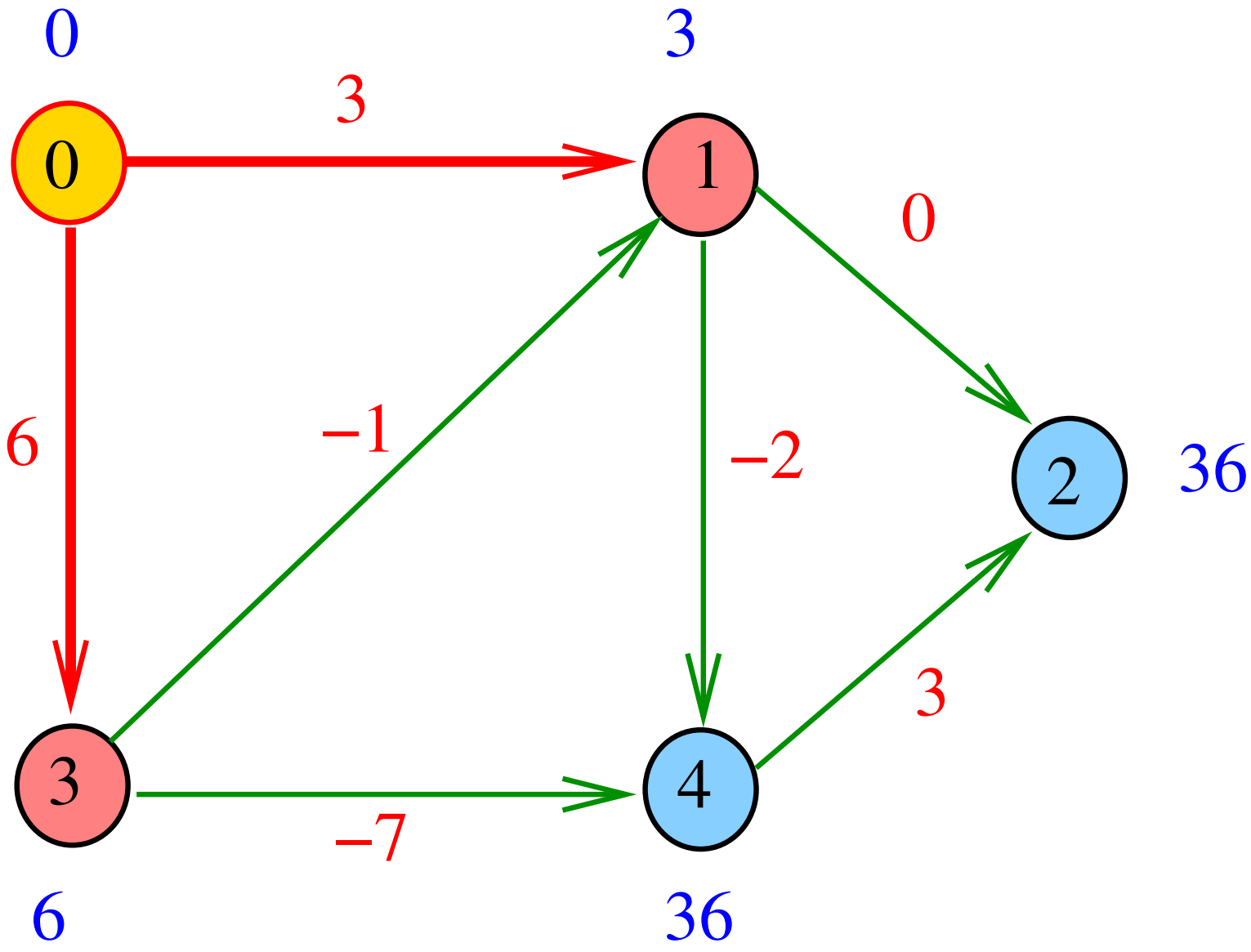
Tentando Dijkstra



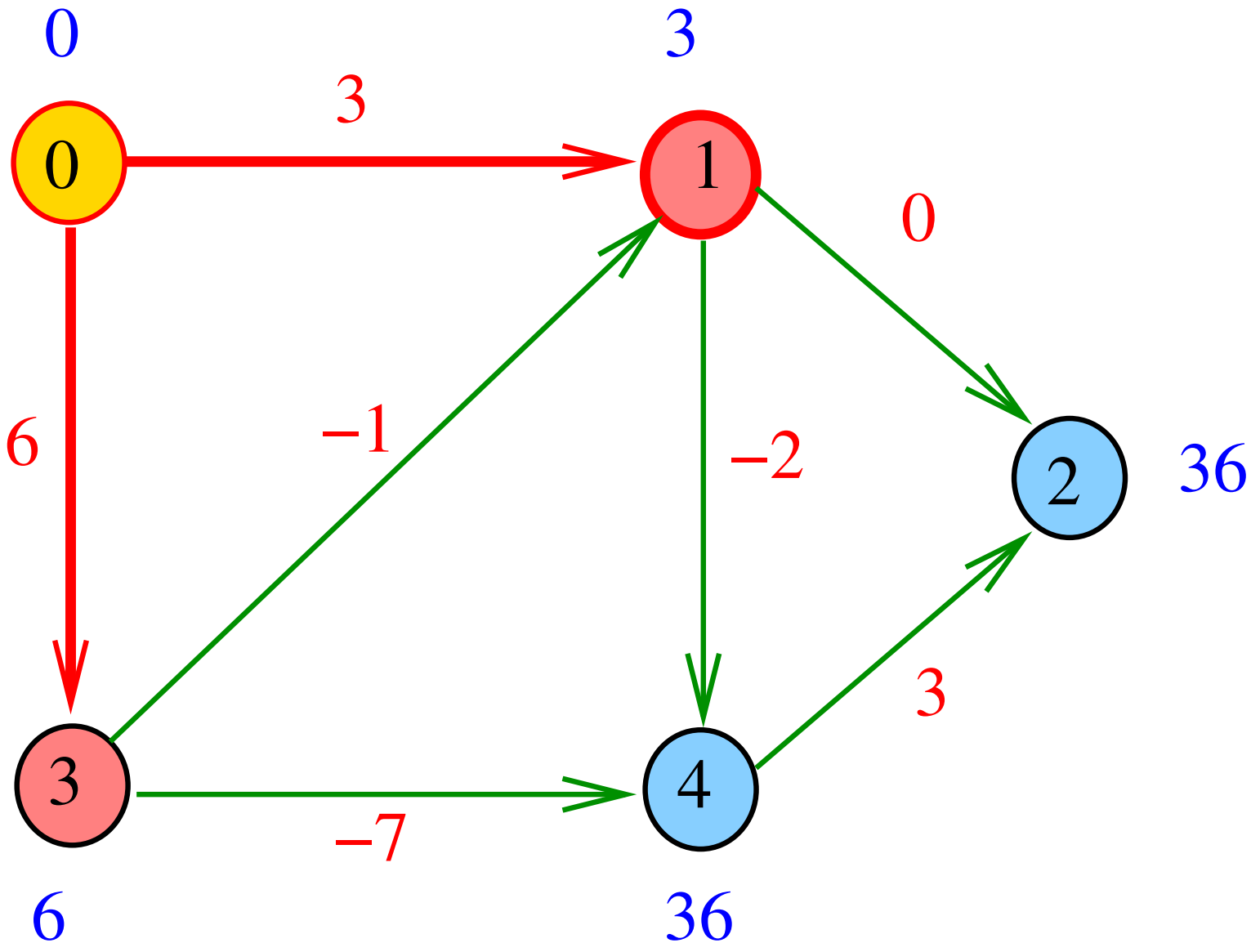
Tentando Dijkstra



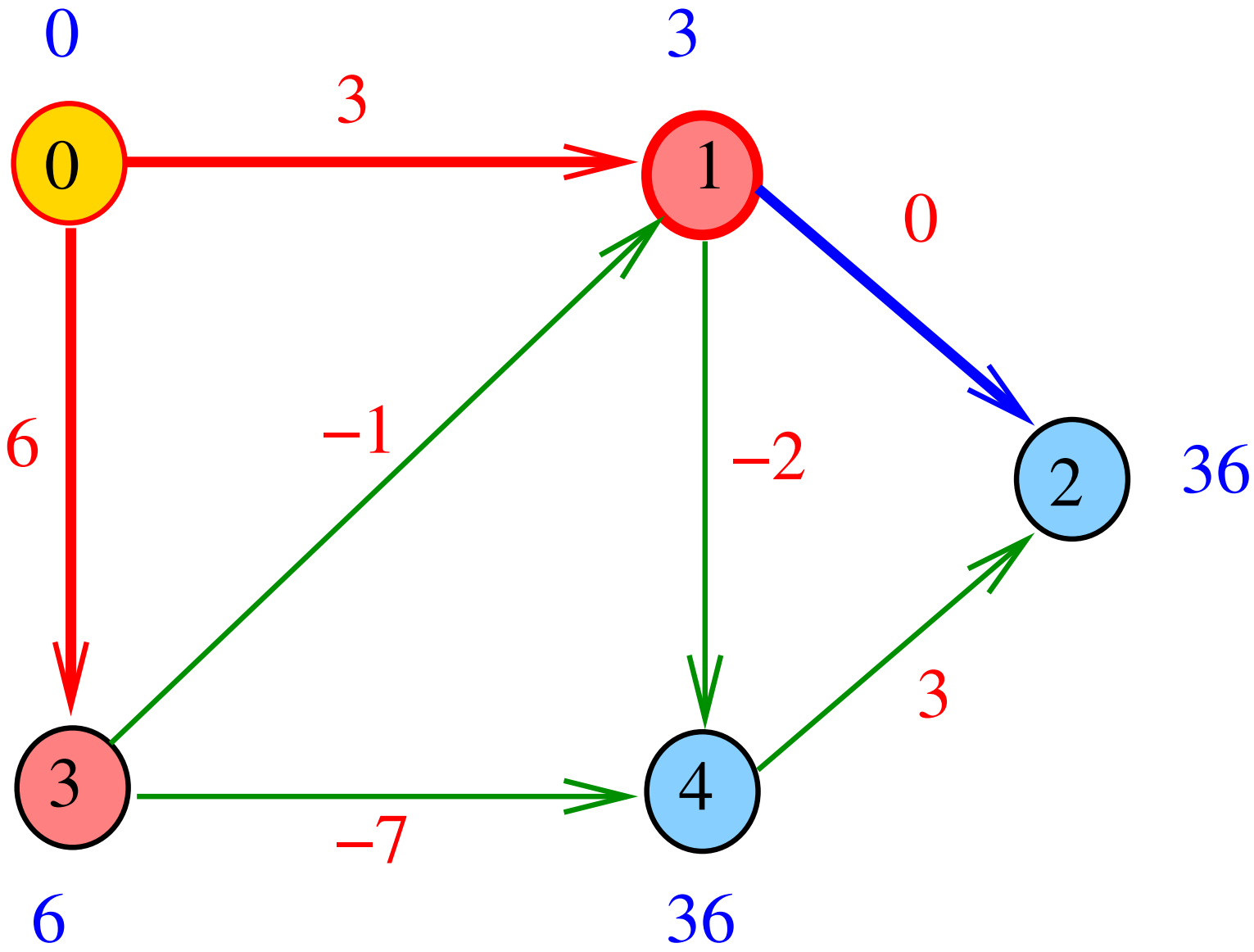
Tentando Dijkstra



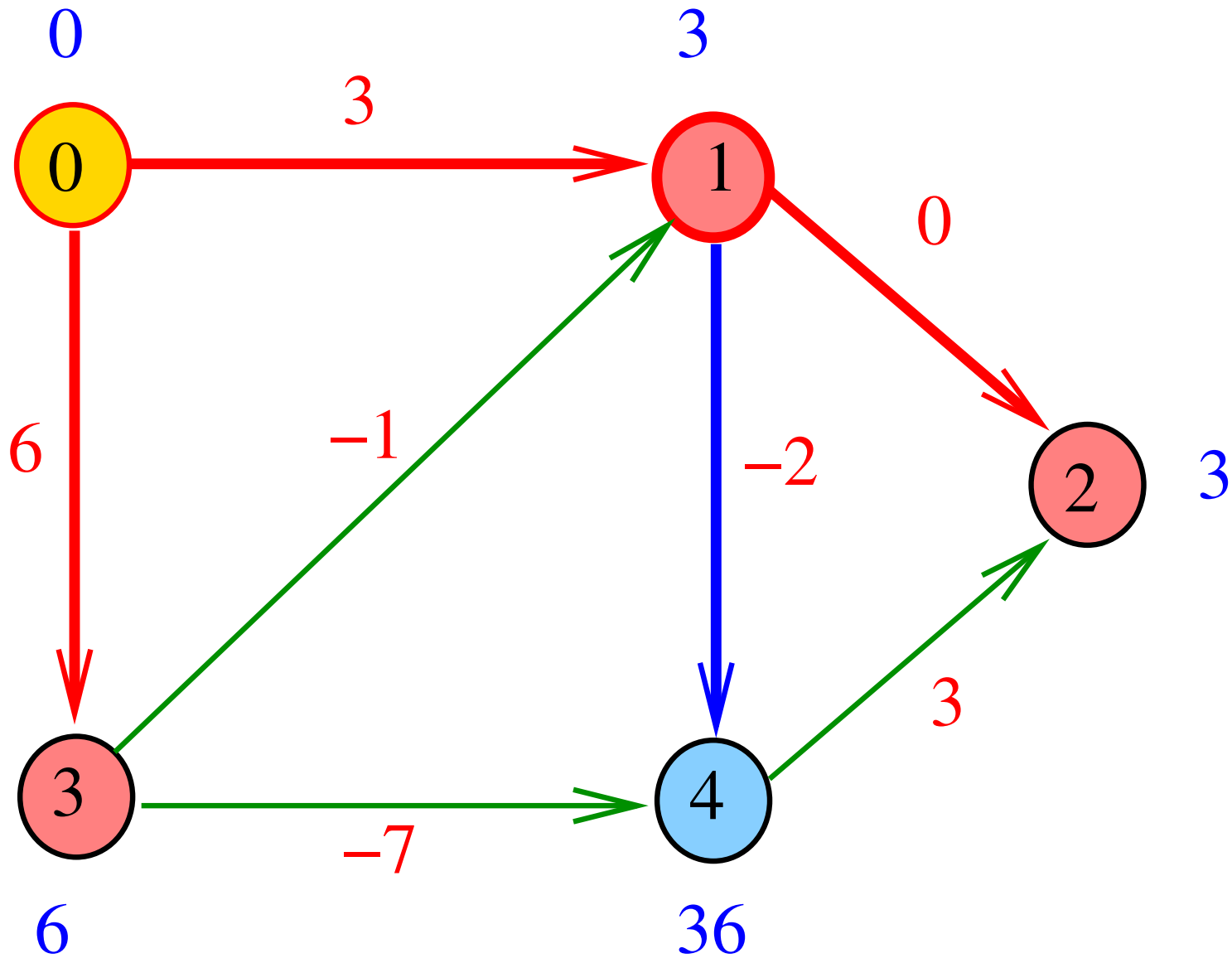
Tentando Dijkstra



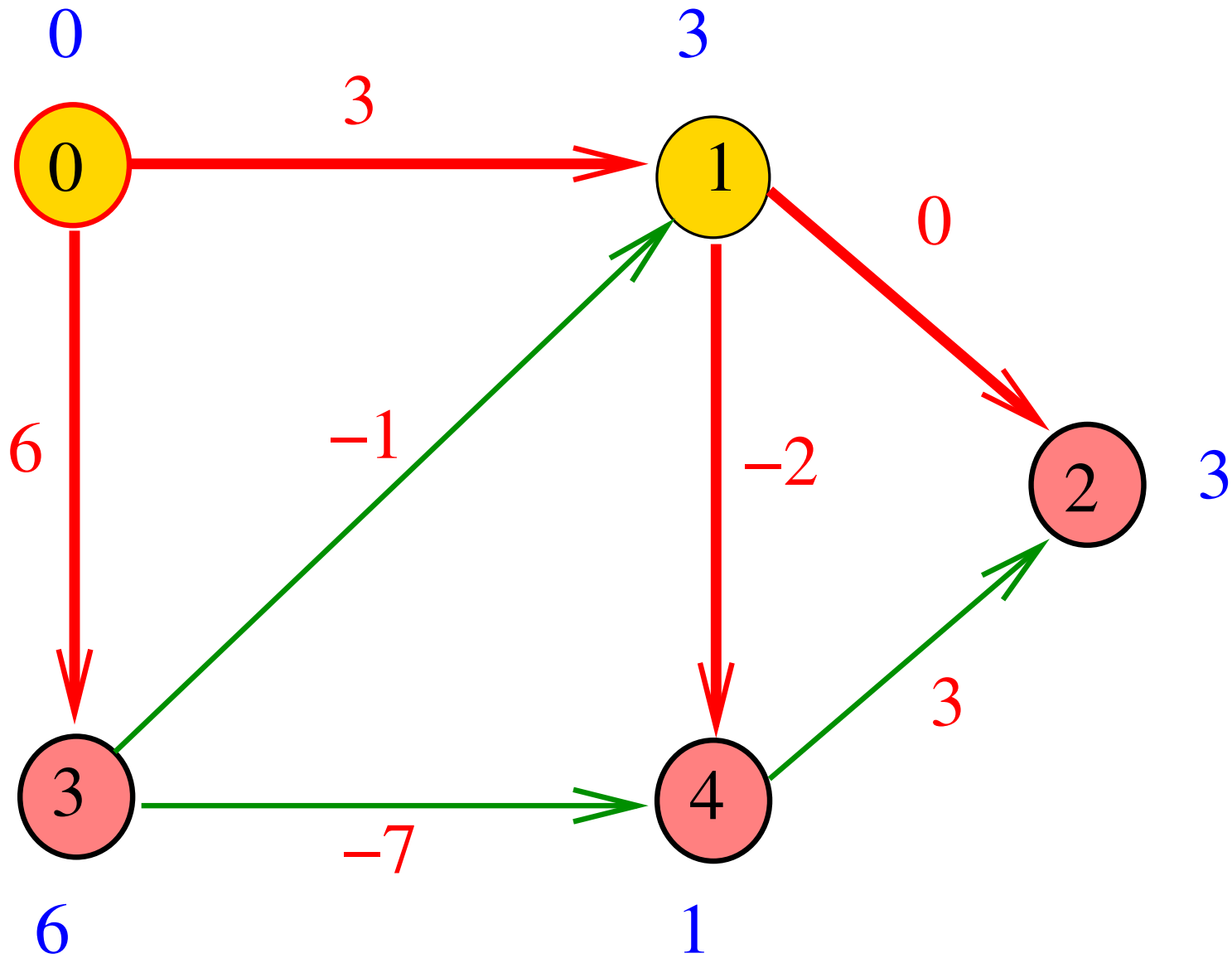
Tentando Dijkstra



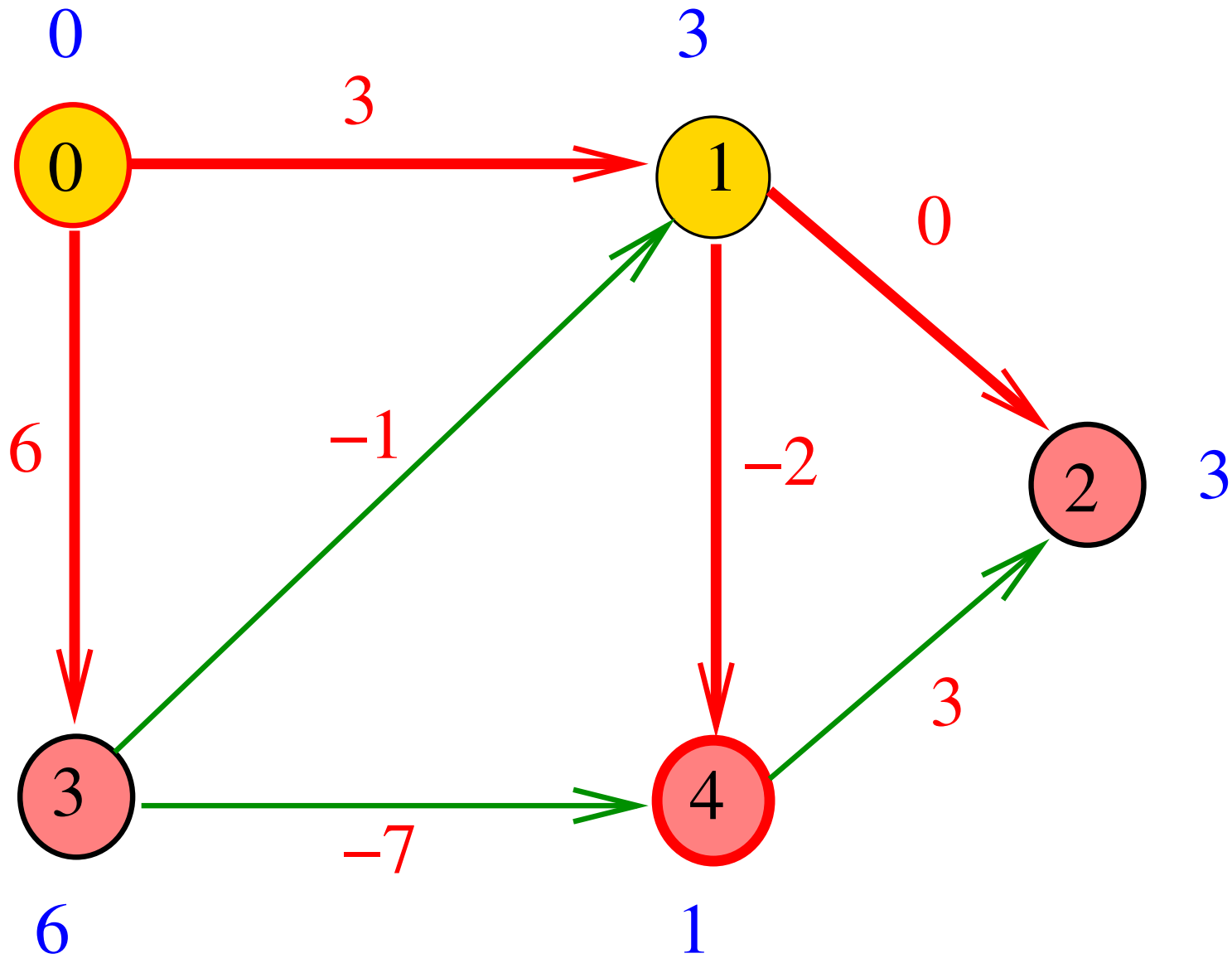
Tentando Dijkstra



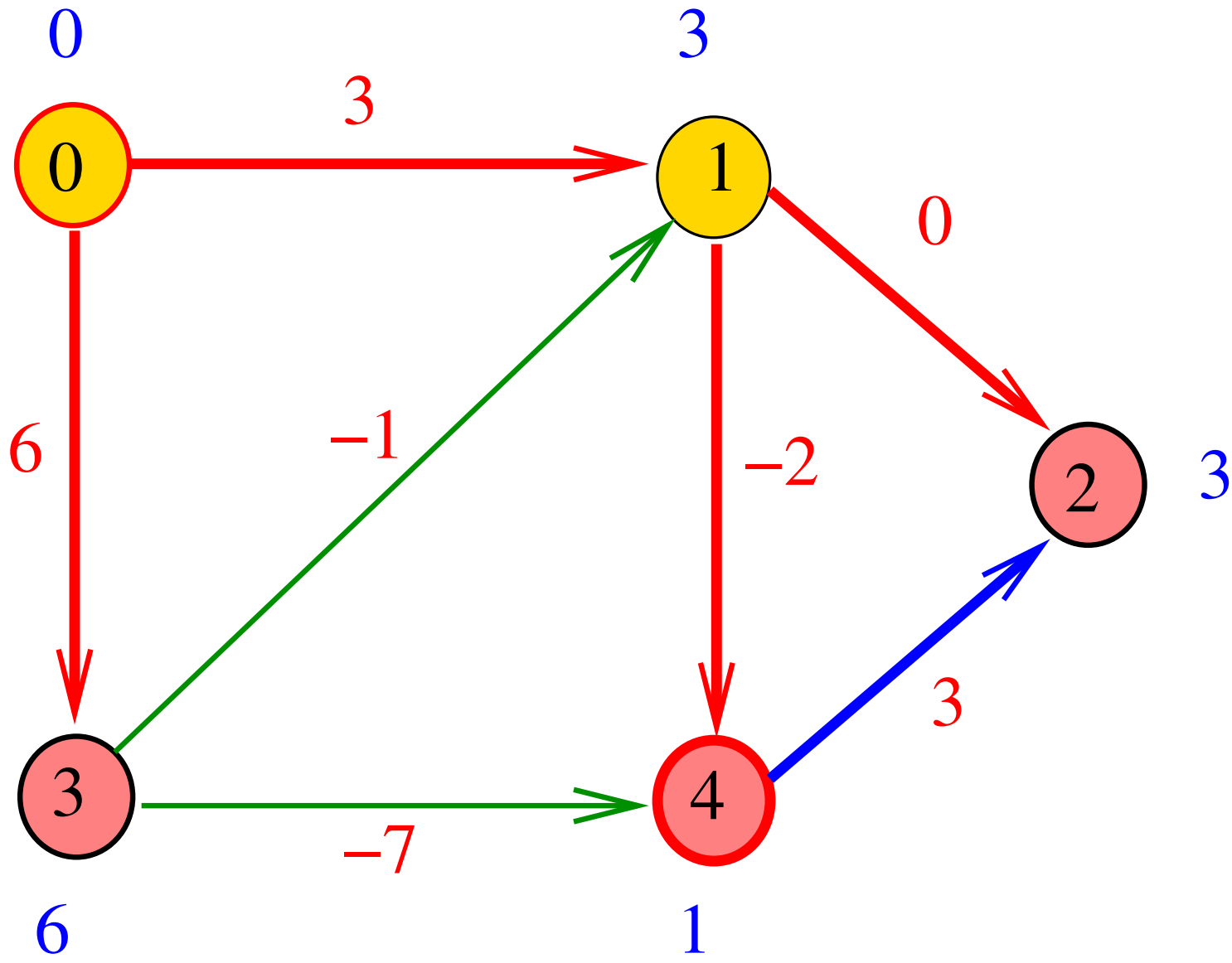
Tentando Dijkstra



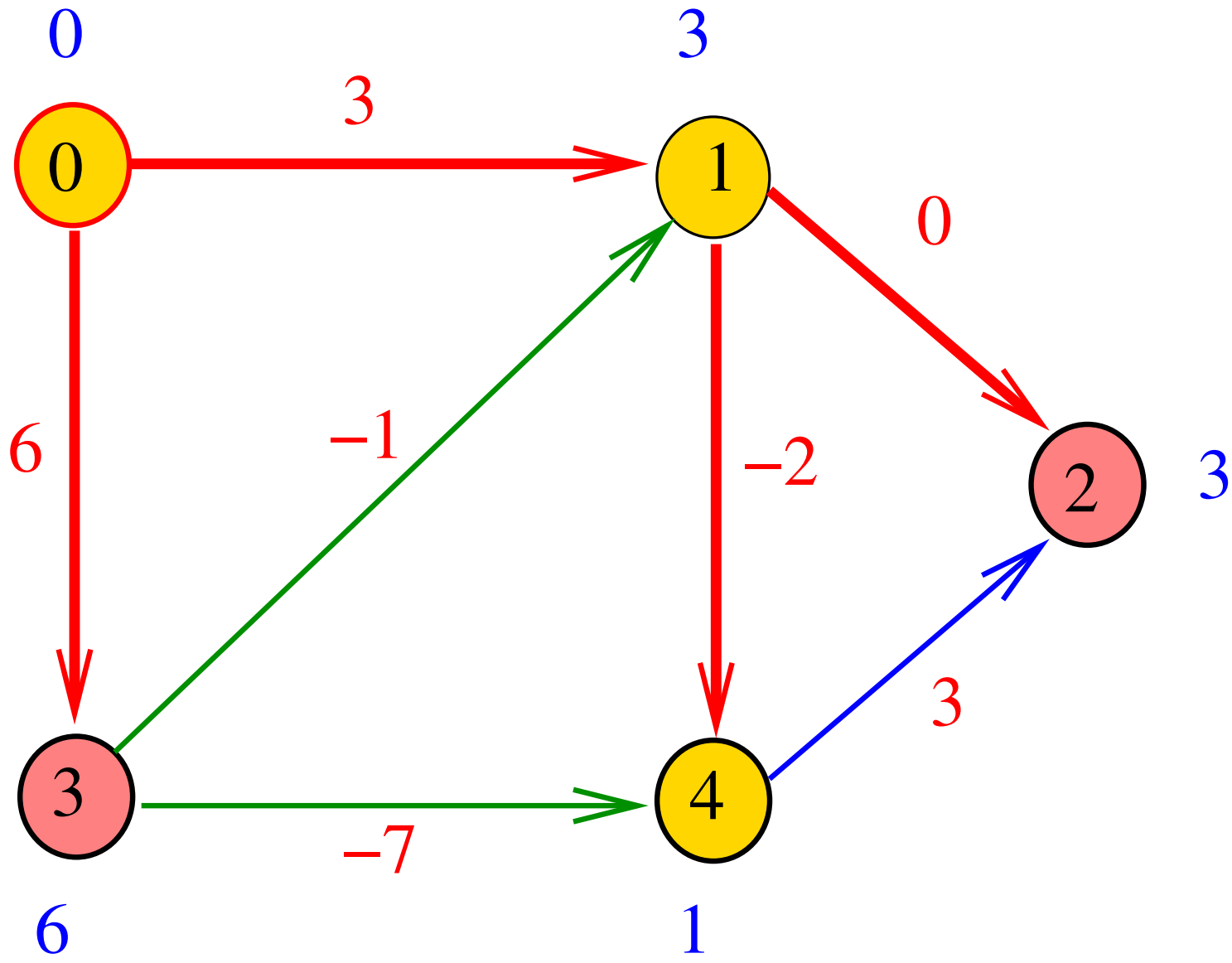
Tentando Dijkstra



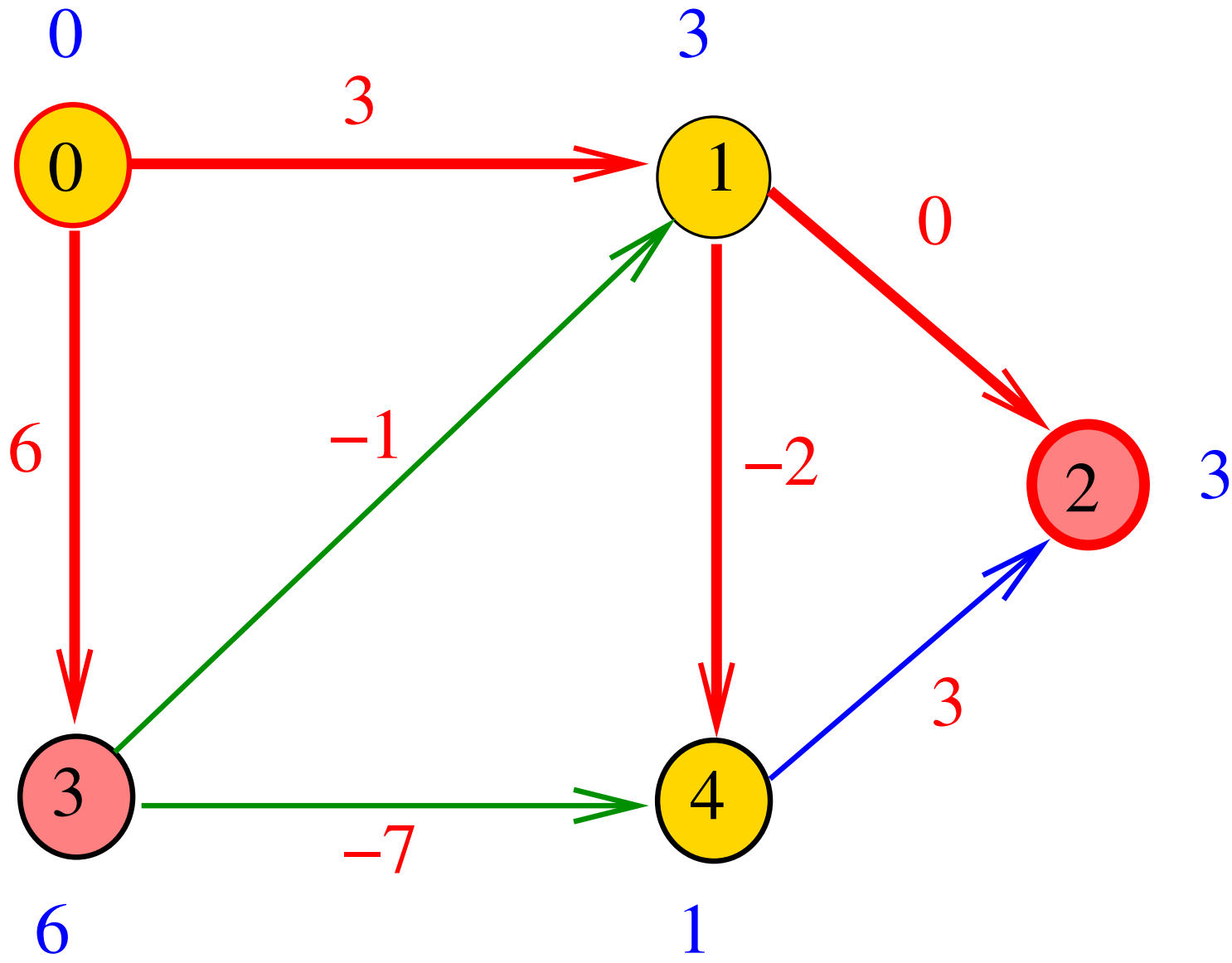
Tentando Dijkstra



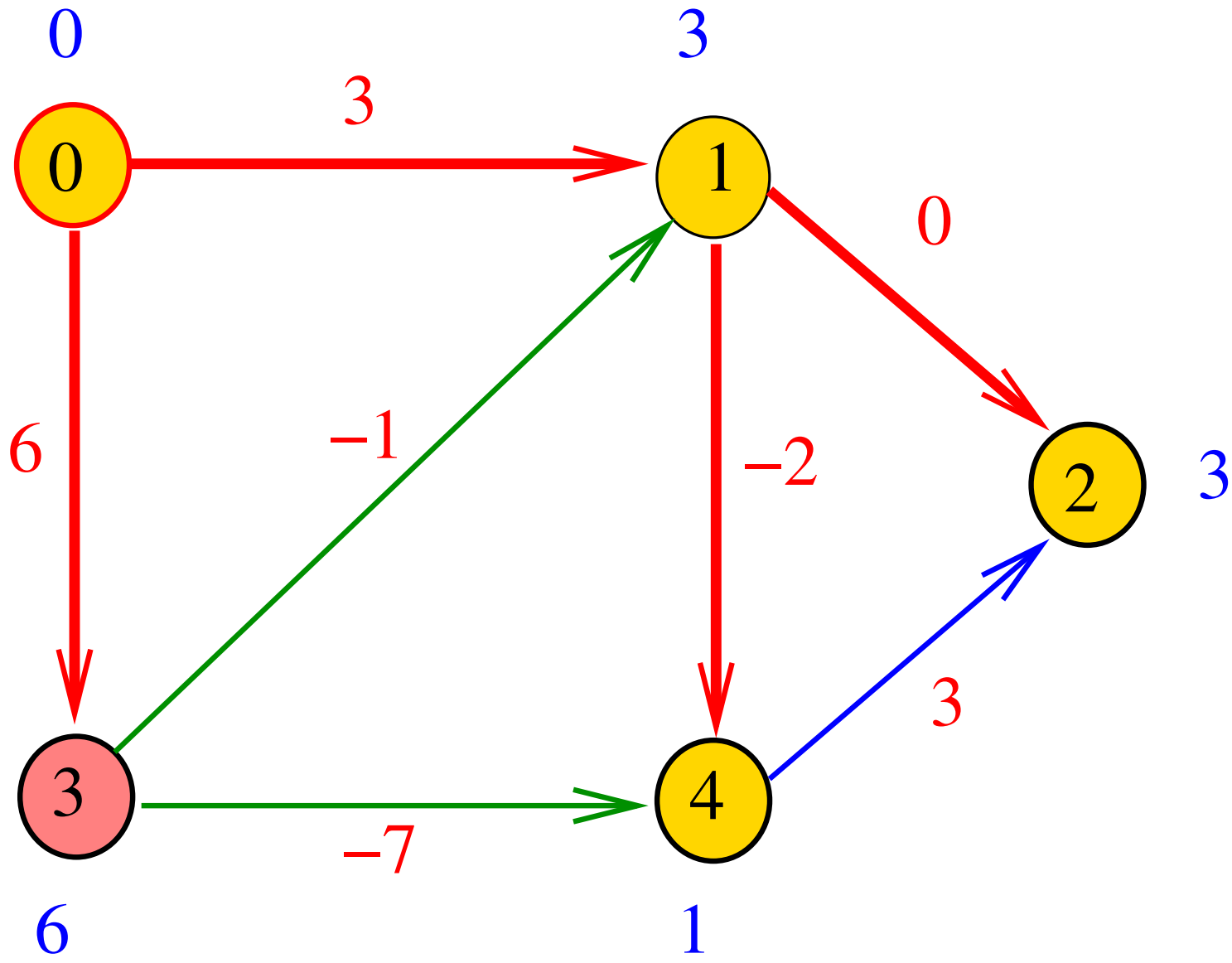
Tentando Dijkstra



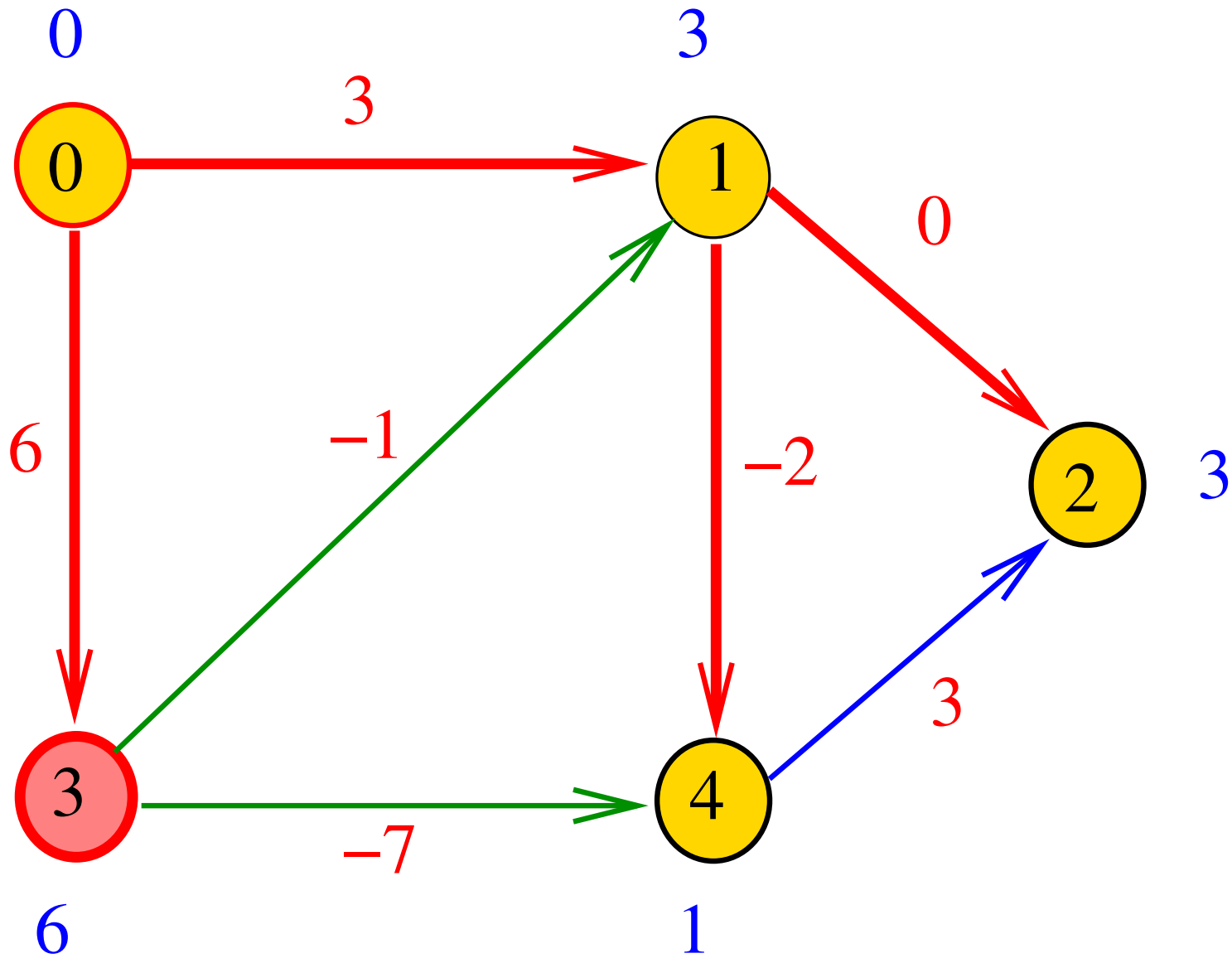
Tentando Dijkstra



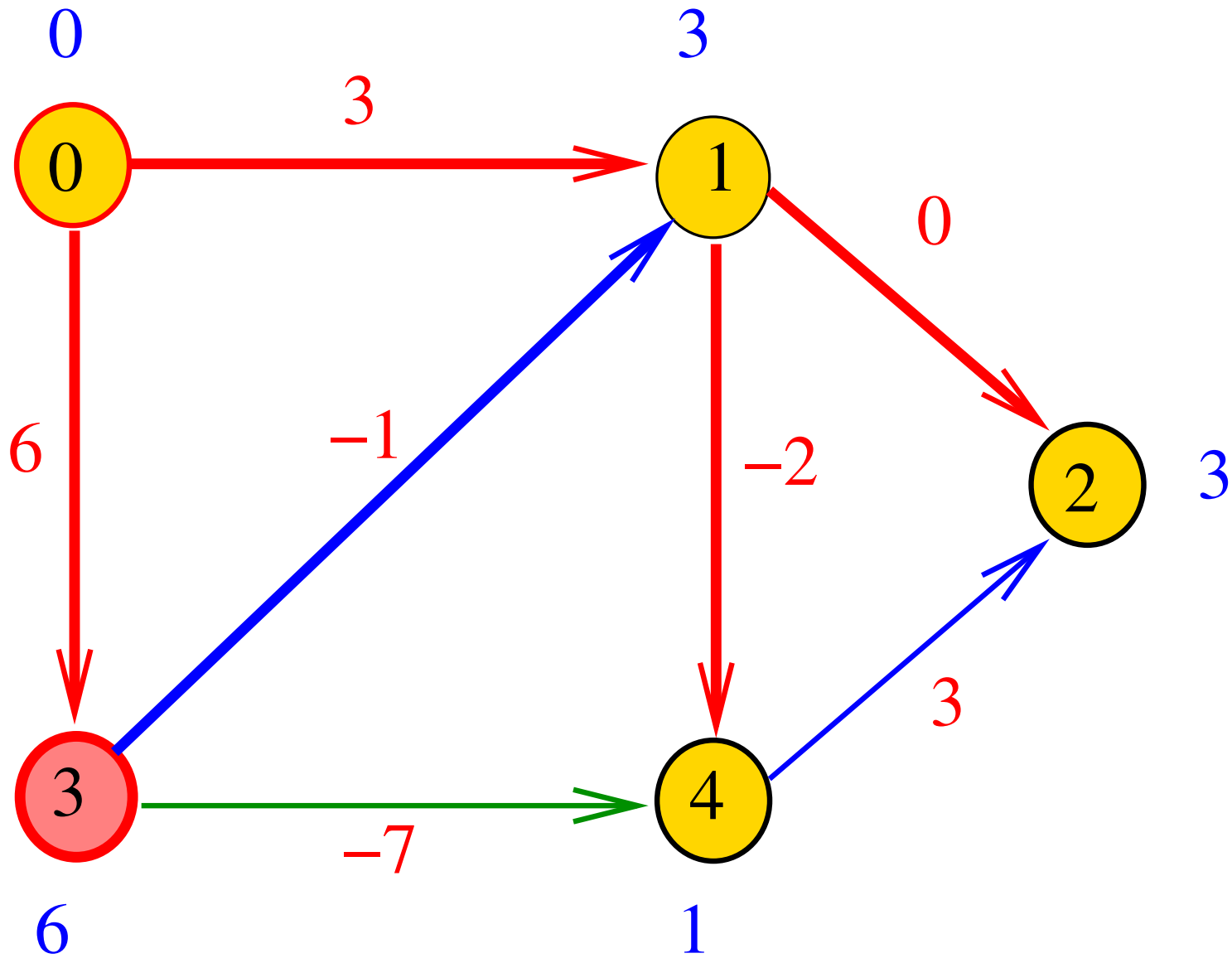
Tentando Dijkstra



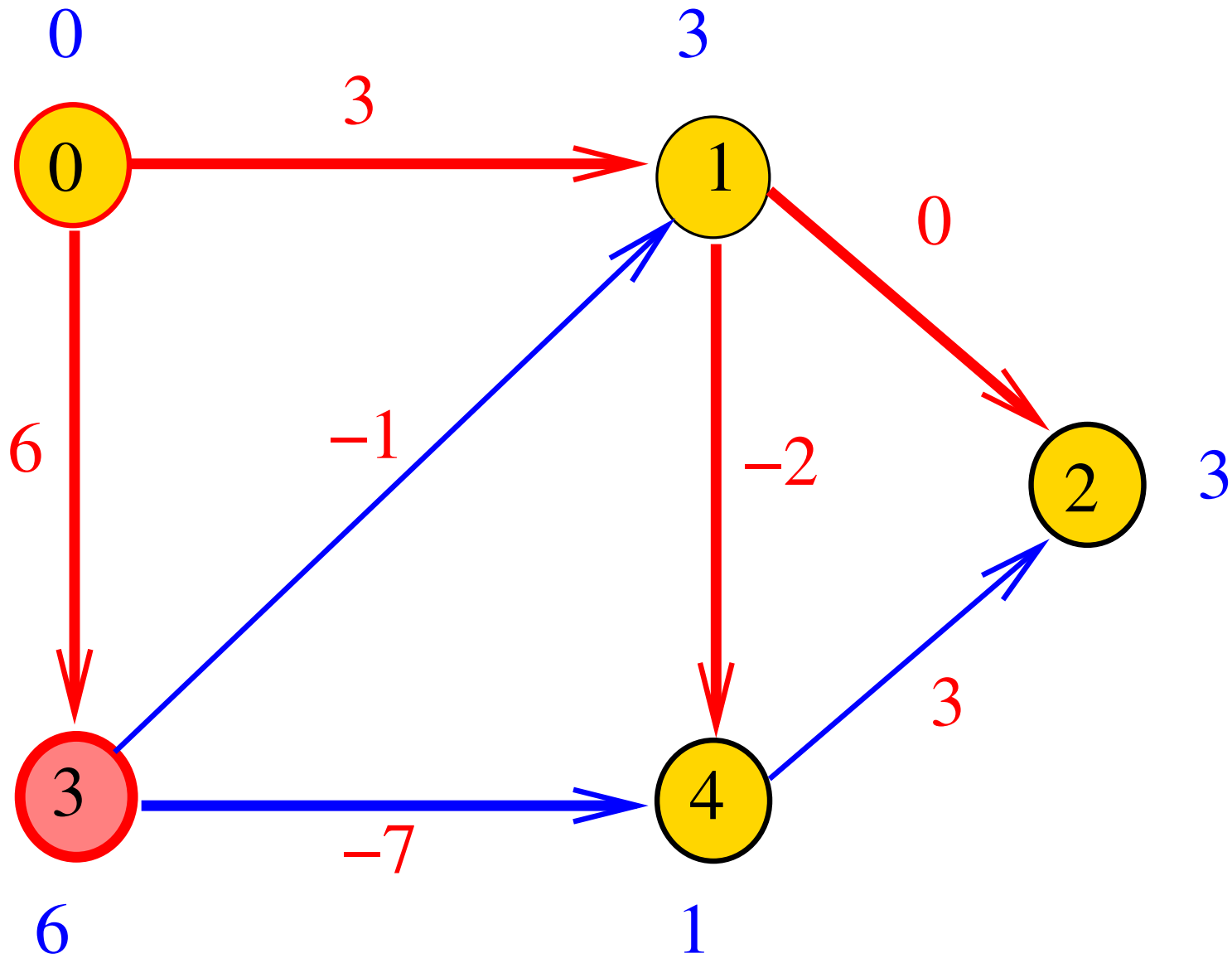
Tentando Dijkstra



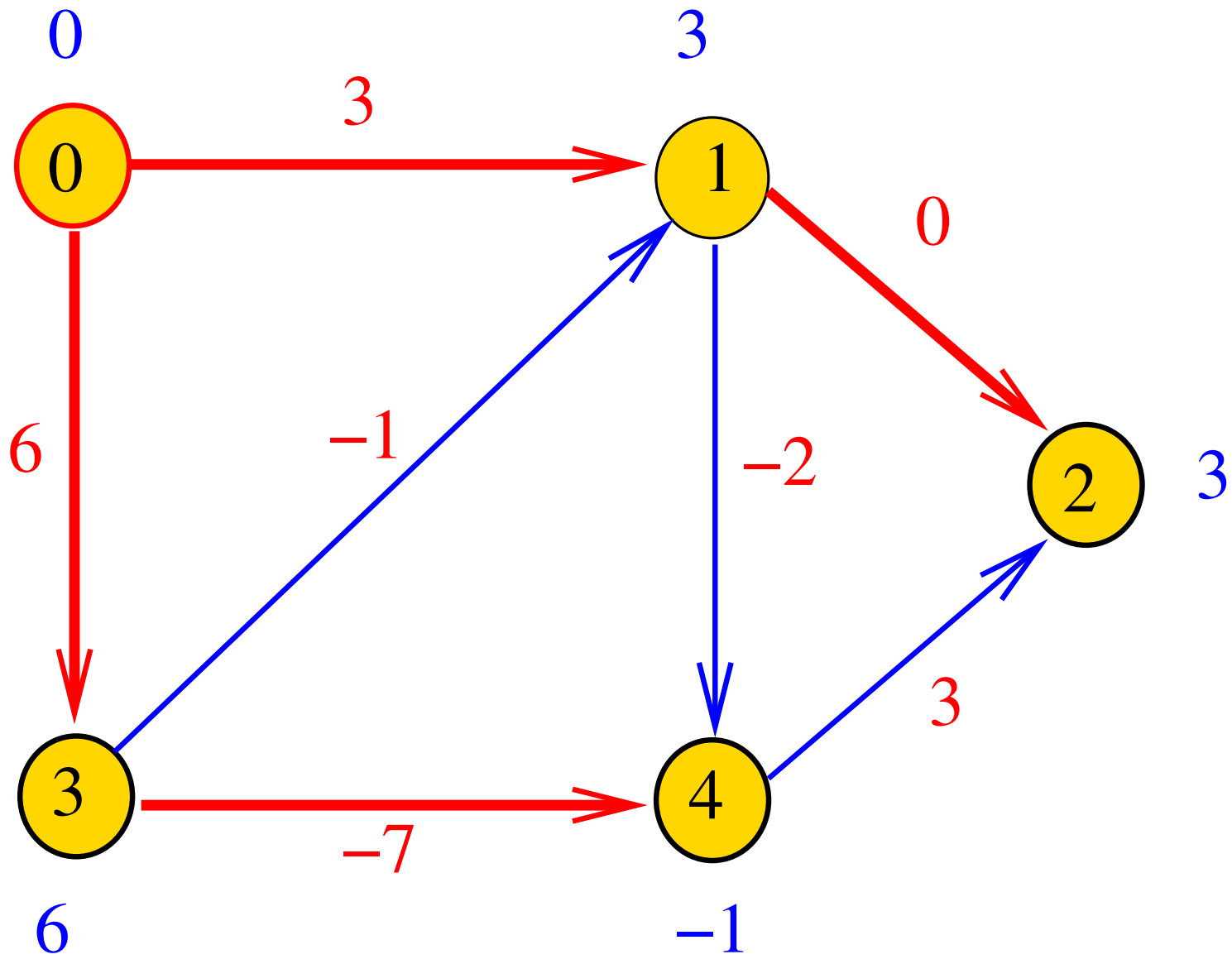
Tentando Dijkstra



Tentando Dijkstra



Opsss



O caminho mínimo de 0 a 2 tem custo 2 e não 3...