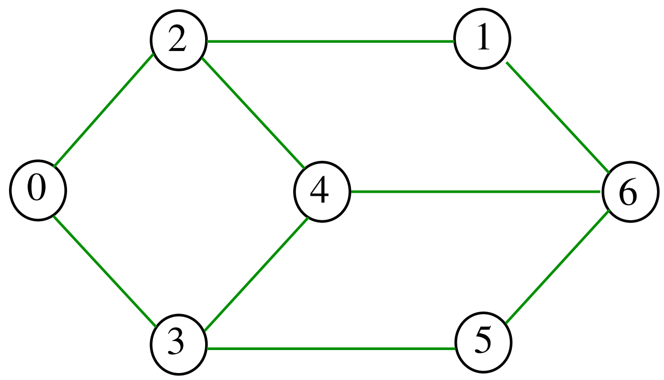
Grafos bipartidos e ciclos ímpares

S 18.5

Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma bipartição do seu conjunto de vértices tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte

Exemplo:



Florestas e bipartições

Teorema 1.
Toda floresta é um grafo bipartido.

Prova: Basta mostrar que toda árvore é.
Escolha um vértice `v`, e, para todo vértice `w`, faça:

$$\texttt{cor}[\texttt{w}] = \textit{dist}(\texttt{v}, \texttt{w}) \bmod 2.$$

Se `u` e `w` são adjacentes, o caminho de `v` ao mais distante passa pelo mais mais próximo e usa a aresta. Assim,as distâncias a `v` diferem de 1, e eles têm cores diferentes.

GRAPHtwocolor

Supomos que nossos grafos têm no máximo `maxV` vértices

```
int color[maxV];
```

A função devolve **1** se o grafo `G` é bipartido e devolve **0** em caso contrário

Se `G` é bipartido, a função atribui uma "cor" a cada vértice de `G` de tal forma que toda aresta tenha pontas de cores diferentes

As cores dos vértices, 0 e 1, são registradas no vetor color indexado pelos vértices

```
int GRAPHtwocolor (Graph G);
```

GRAPHtwocolor

```
int GRAPHtwocolor (Graph G) {
Vertex v;
for (v = 0; v < G->V; v++)
    color[v] = -1;
for (v = 0; v < G->V; v++)
    if (color[v] == -1)
        if (dfsRclr(G,v,0)== 0)
            return 0;
return 1;
}
```


dfsRclr

```
int dfsRclr(Graph G, Vertex v, int c){
link p;
color[v] = 1-c;
for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next) {
    Vertex w = p->w;
    if (color[w]==1-c ||  /*ciclo ímpar*/
      color[w]==-1 && !dfsRclr(G,w,1-c))
      return 0;
}
return 1;
}
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função GRAPHtwocolor para vetor de listas de adjacência é $O(V + A)$.

Conclusão

Para todo grafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo ímpar
- G é bipartido

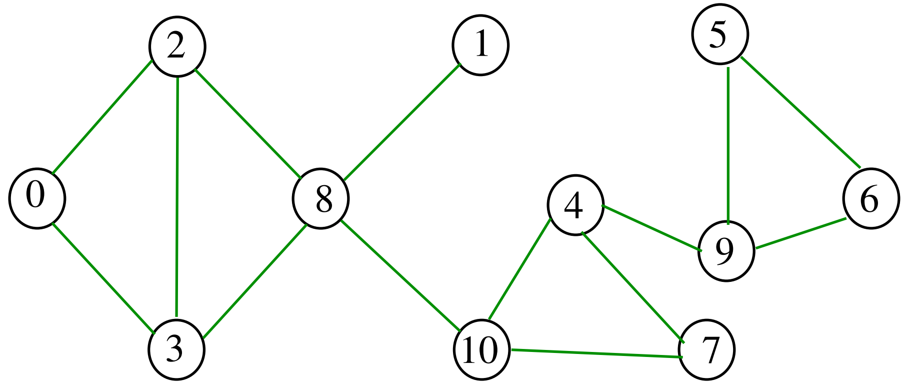
Pontes em grafos e aresta-biconexão

S 18.6

Pontes em grafos

Uma aresta de um grafo é uma **ponte** (= *bridge* = *separation edge*) se ela é a única aresta que atravessa algum corte do grafo.

Exemplo:

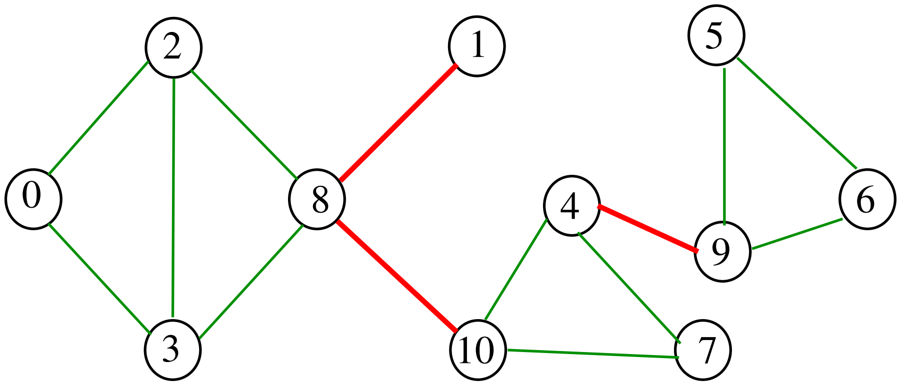


Exemplo: as arestas em vermelho são pontes

Procurando pontes

Problema: encontrar as pontes de um grafo dado

Exemplo: as arestas em vermelho são pontes



`all_bridges1`

Recebe um grafo `G` e calcula o número `bcnt` de pontes do grafo `G` e imprime todas as pontes.

```
void all_bridges1 (Graph G);
```

Primeiro algoritmo

```
void all_bridges1 (Graph G) {
   Vertex v, w; link p; int ligados;
   for (v = 0; v < G->V; v++)
      for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next){
         w = p->w;
         if (v < w) {
            GRAPHremoveA(G,w,v);
            ligados = DIGRAPHpath(G,w,v);
            GRAPHinsertA(G,w,v);
            if (!ligados) {
               bcnt++;
               output(v, w);
            }
         }
      }
}
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função all_bridges1 é $A/2$ vezes o consumo de tempo da função DIGRAPHpath.

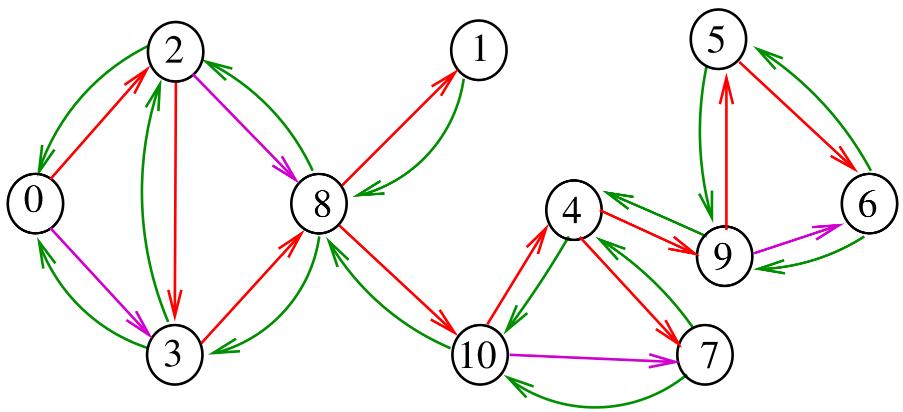
O consumo de tempo da função all_bridges1 para vetor de listas de adjacência é $O(A(V+A))$.

O consumo de tempo da função all_bridges1 para matriz de adjacência é $O(AV^2)$.

Pontes e busca em profundidade

Em uma floresta DFS, um dos dois arcos de cada ponte será um arco da arborescência

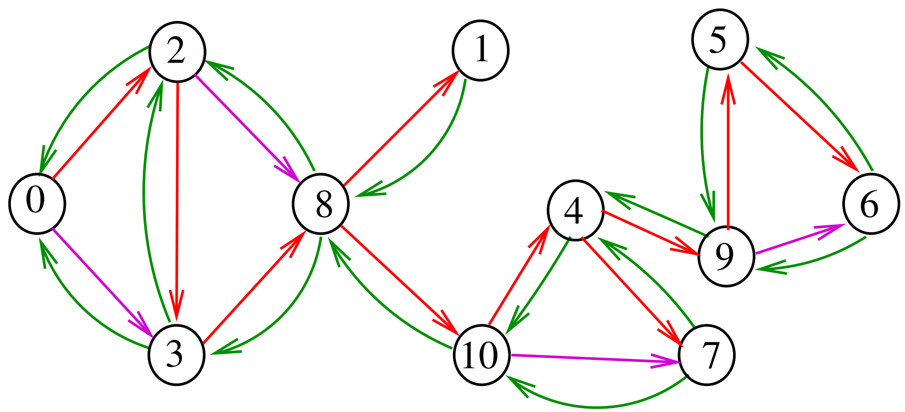
Exemplo: arcos em vermelho são da arborescência



Exemplo: arcos em vermelho são da arborescência

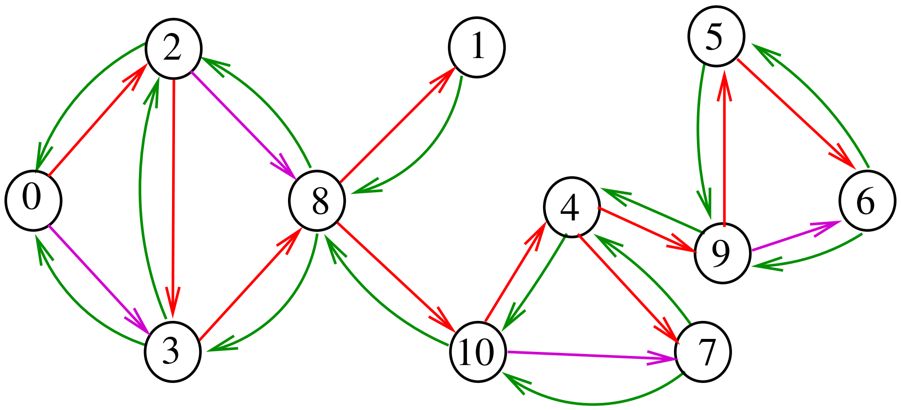
Propriedade

Um arco v-w da floresta DFS faz parte (juntamente com w-v) de uma ponte se e somente se não existe arco de retorno que ligue um descendente de w a um ancestral de v



Numeração pré-ordem

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pre[v]	0	**4**	1	2	6	8	9	10	3	**7**	**5**



Lowest Preorder Number

O menor **número de pré-ordem** que pode ser alcançado por v utilizando arcos da arborescência e **até um** arco de retorno ("arco-pai" não vale) será denotado por low[v]