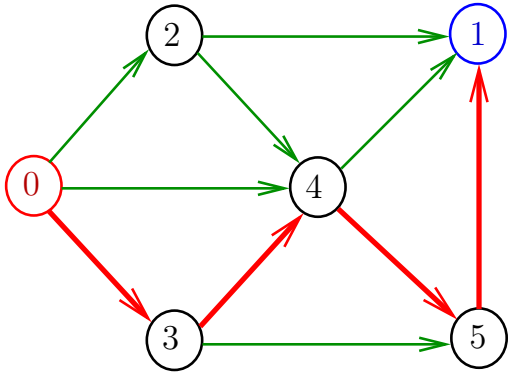
Na última aula...

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

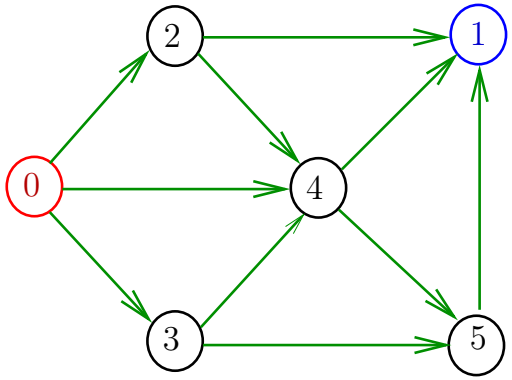
Exemplo: para `s` = 0 e `t` = 1 a resposta é SIM



Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

Exemplo: para `s` = 5 e `t` = 4 a resposta é NÃO



Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

Veremos questões deste tipo freqüentemente

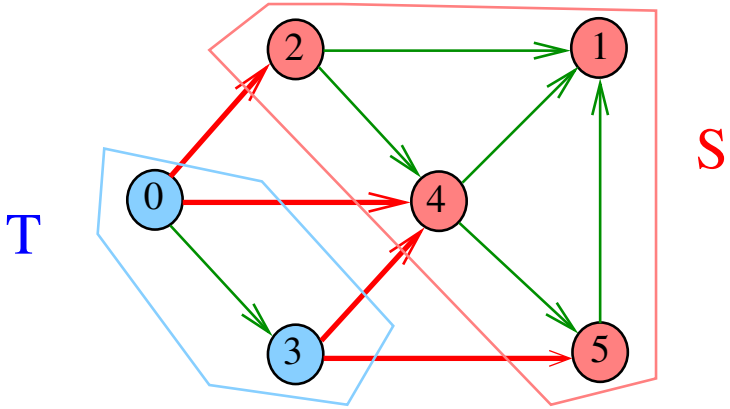
Certificado de inexistência

Para demonstrarmos que **não existe** um caminho de s a t basta exibirmos um st-corte (S, T) em que

todo arco *no corte tem ponta inicial em* T *e ponta final em* S

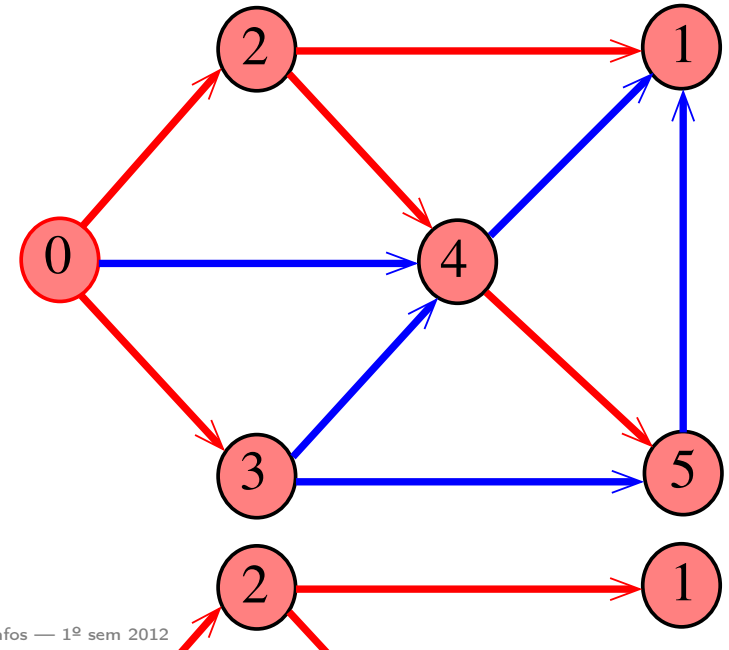
Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



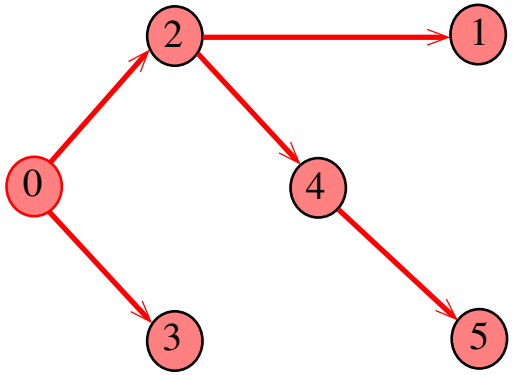
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



Arborescências no computador

Um arborência pode ser representada através de um **vetor de pais**: parnt[w] é o pai de w
Se r é a raiz, então parnt[r]=r



vértice	parnt
0	0
1	2
2	0
3	0
4	2
5	4

Teorema

Para quaisquer vértices s e t de um digrafo, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe st-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S.

Hoje

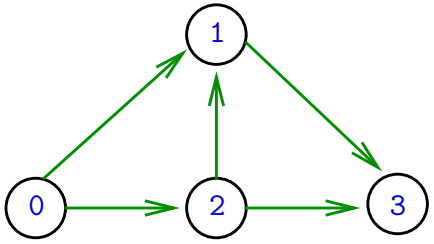
Vetor de listas de adjacência

S 17.4

Vetor de listas de adjacência de digrafos

Na representação de um digrafo através de **listas de adjacência** tem-se, para cada vértice v, uma lista dos vértices que são vizinhos v.

Exemplo:



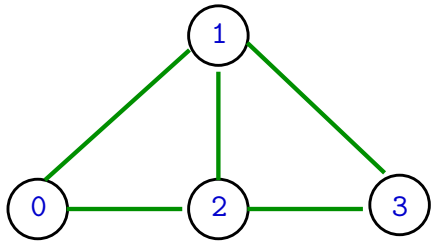

```
0:  1,  2
1:   3
2:  1,  3
3:
```

Consumo de espaço: $\Theta(V + A)$ (linear)
Manipulação eficiente

Vetor de lista de adjacência de grafos

Na representação de um grafo através de **listas de adjacência** tem-se, para cada vértice v, uma lista dos vértices que são pontas de arestas incidentes a v

Exemplo:



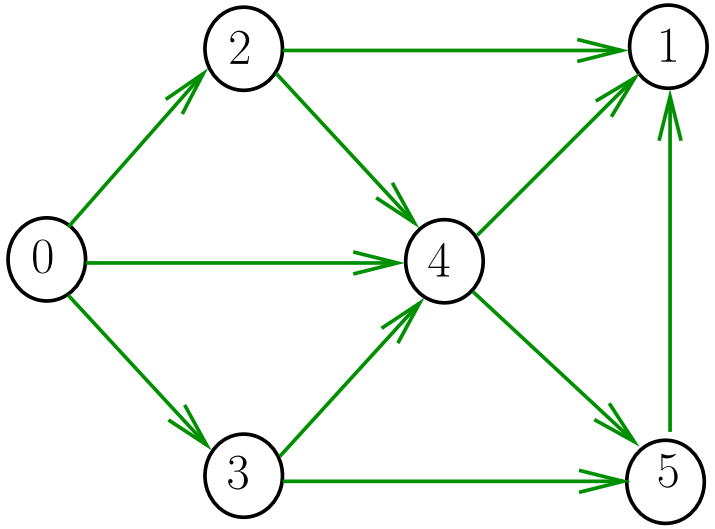

```
0:  1,  2
1:  3,  0,  2
2:  1,  3,  0
3:  1,  2
```

Consumo de espaço: $\Theta(V + A)$ (linear)

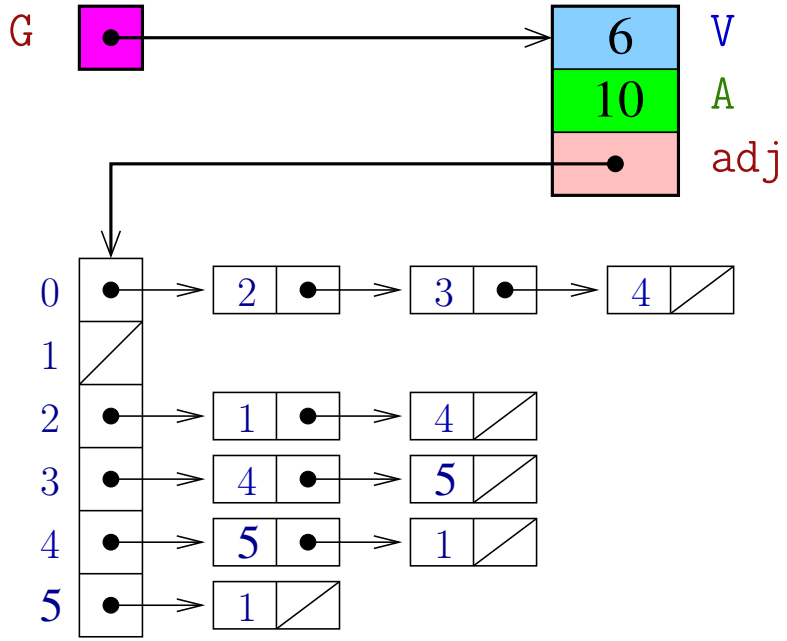
Manipulação eficiente

Digrafo

Digraph G



Estruturas de dados



Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo

V contém o número de vértices

A contém o número de arcos do digrafo

adj é um ponteiro para vetor de listas de adjacência

```
struct digraph {
    int V;
    int A;
    link *adj;
};
```

Estrutura Digraph

Um objeto do tipo Digraph contém o endereço de um digraph

```
typedef struct digraph *Digraph;
```


Estrutura node

A lista de adjacência de um vértice v é composta por nós do tipo node
Um link é um ponteiro para um node
Cada nó da lista contém um vizinho w de v e o endereço do nó seguinte da lista

```
typedef struct node *link;
struct node {
    Vertex w;
    link next;
};
```


NEW

NEW recebe um vértice w e o endereço next de um nó e devolve (o endereço de) um novo nó x com
x.w = w e x.next = next

```
link NEW (Vertex w, link next) {
    link p = malloc(sizeof *p);
    p->w = w;
    p->next = next;
    return p;
}
```


Estrutura graph e Graph

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo G é

```
(G->A)/2
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices 0,..,V-1 e nenhum arco

```
   Digraph DIGRAPHinit (int V) {
0      Vertex v;
1      Digraph G = malloc(sizeof *G);
2      G->V = V;
3      G->A = 0;
4      G->adj = malloc(V * sizeof(link));
5      for (v = 0; v < V; v++)
6          G->adj[v] = NULL;
7      return G;
   }
```


DIGRAPHinsertA

Insere um arco v-w no digrafo G.
A responsabilidade de evitar laços e arcos paralelos é do cliente/usuário.

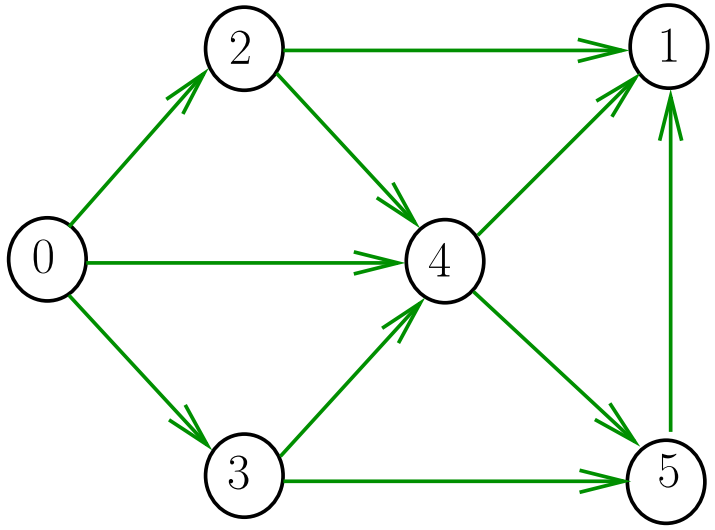
```
void
DIGRAPHinsertA (Digraph G,Vertex v,Vertex w)
{
   G->adj[v] = NEW(w,G->adj[v]);
   G->A++;
}
```


DIGRAPHinsertA

Insere um arco v-w no digrafo G.
Se v == w ou o digrafo já tem arco v-w; não faz nada

```
void
DIGRAPHinsertA (Digraph G,Vertex v,Vertex w)
{
   link p;
   if (v == w) return;
   for (p = G->adj[v];p != NULL;p = p->next)
       if (p->w == w) return;
   G->adj[v] = NEW(w,G->adj[v]);
   G->A++;
}
```


DIGRAPHshow




```
0:  2  3  4
1:
2:  1  4
3:  4  5
4:  1  5
5:  1
```

DIGRAPHshow

```
void DIGRAPHshow (Digraph G) {
    Vertex v;
    link p;
1   for (v = 0; v < G->V; v++) {
2       printf("%2d:", v);
3       for (p=G->adj[v];p!= NULL;p=p->next)
4           printf("%2d", p->w);
5       printf("\n");
    }
}
```


E para desenhar?

O pacote Graphviz (disponível para Linux e outros) tem programas que leem uma descrição de um grafo ou digrafo e desenham, com vários algoritmos alternativos.

Não é tópico deste curso, mas algoritmos para desenhar grafos são objeto de pesquisa atual.

Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha	
1	$= V + 1$	$= \Theta(V)$
2	$= V$	$= \Theta(V)$
3	$= V + A$	$= \Theta(V + A)$
4	$= A$	$= \Theta(A)$
5	$= V$	$= \Theta(V)$
total	$3\,\Theta(V) + \Theta(V + A) + \Theta(A)$	
	$= \Theta(V + A)$	

Conclusão

O consumo de tempo da função DigraphShow para vetor de listas de adjacência é $\Theta(V + A)$.

O consumo de tempo da função DigraphShow para matriz adjacência é $\Theta(V^2)$.

Funções básicas para grafos

```
#define GRAPHinit DIGRAPHinit
#define GRAPHshow DIGRAPHshow
```

Função que insere uma aresta v-w no grafo G

```
void
GRAPHinsertE (Graph G, Vertex v, Vertex w)
{
  DIGRAPHinsertA(G,v,w);
  DIGRAPHinsertA(G,w,v);
}
```

Exercício. Escrever a função GRAPHremoveE

Busca DFS

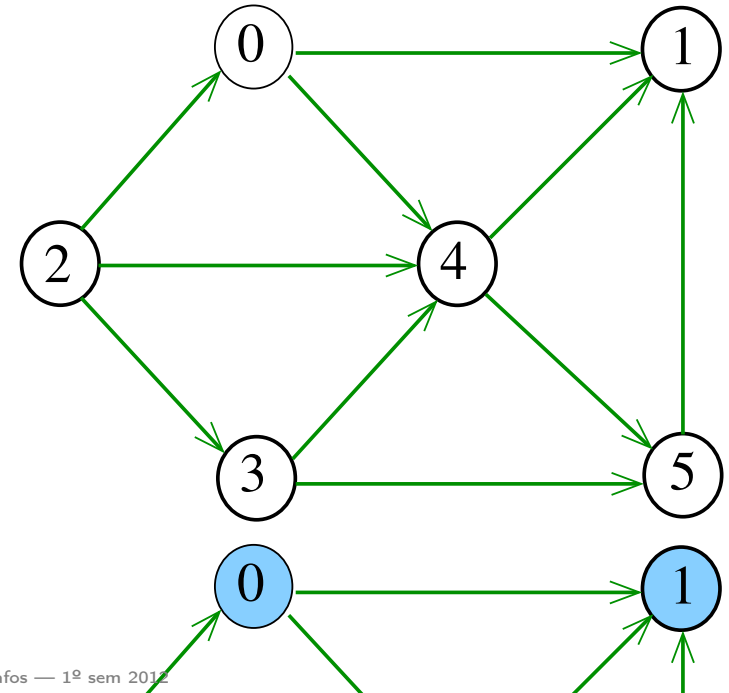
S 18.1 e 18.2

Busca ou varredura

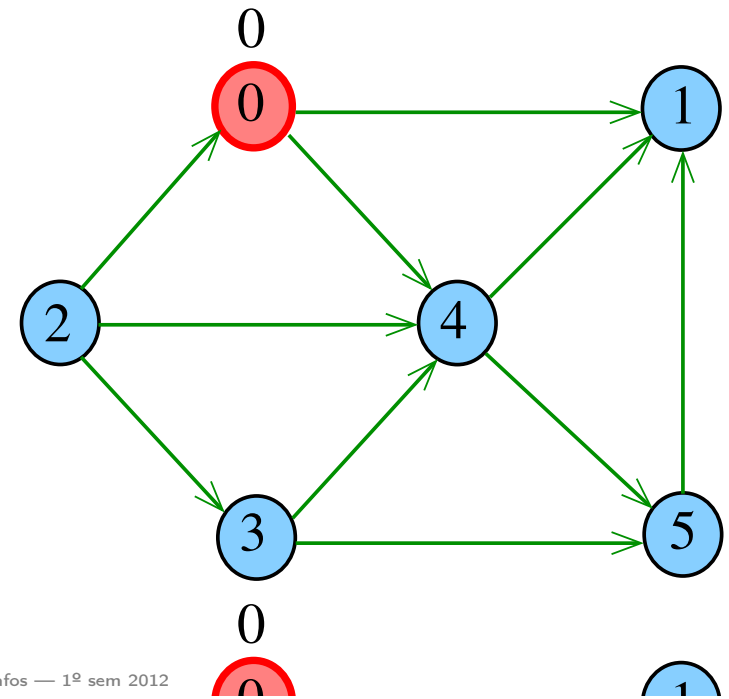
Um algoritimo de **busca** (ou **varredura**) examina, sistematicamente, todos os vértices e todos os arcos de um digrafo.

Cada arco é examinado **uma só vez**.
Despois de visitar sua ponta inicial o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final.

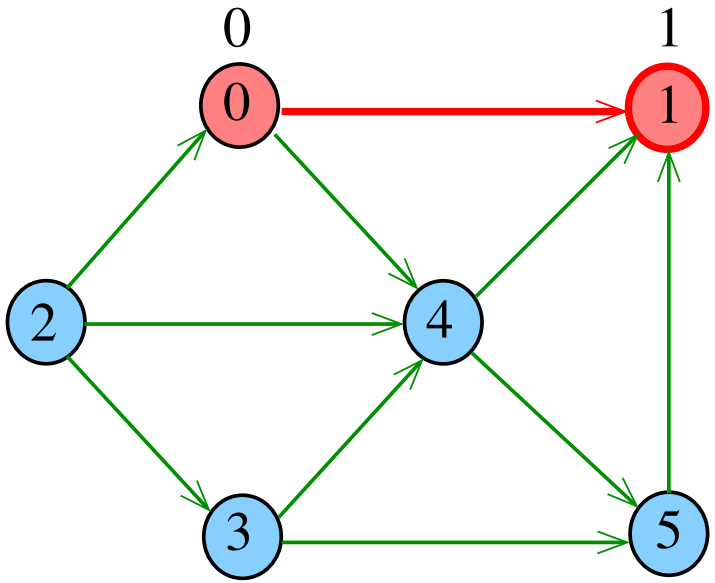
DIGRAPHdfs(G)



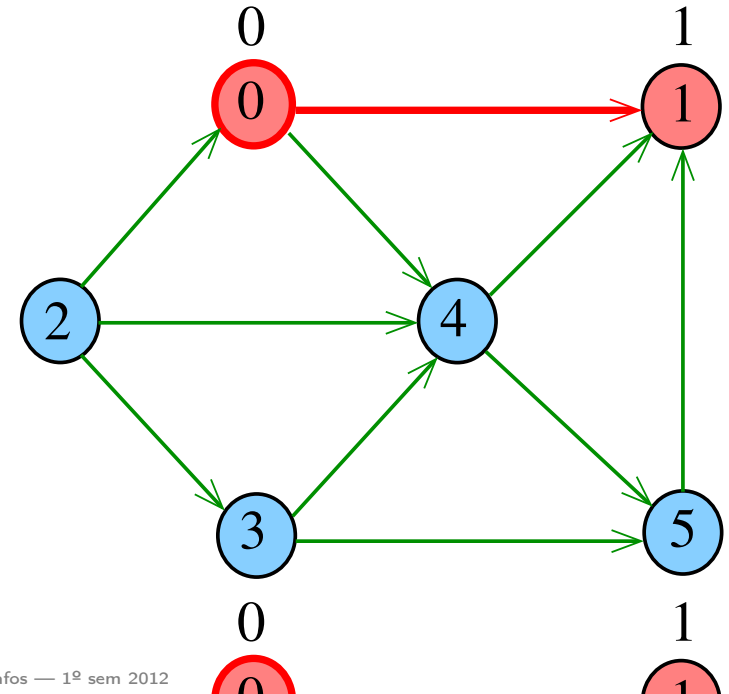
dfsR(G,0)



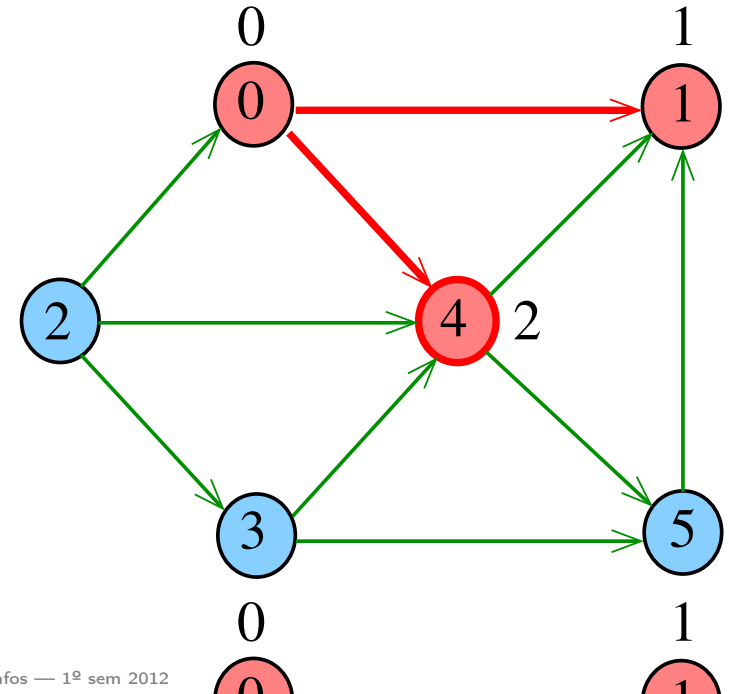
dfsR(G,1)



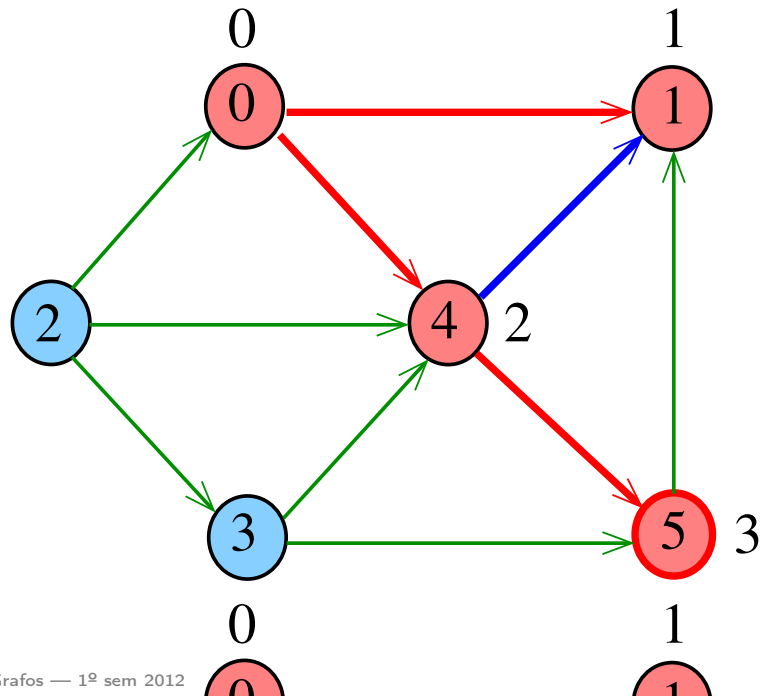
dfsR(G,0)



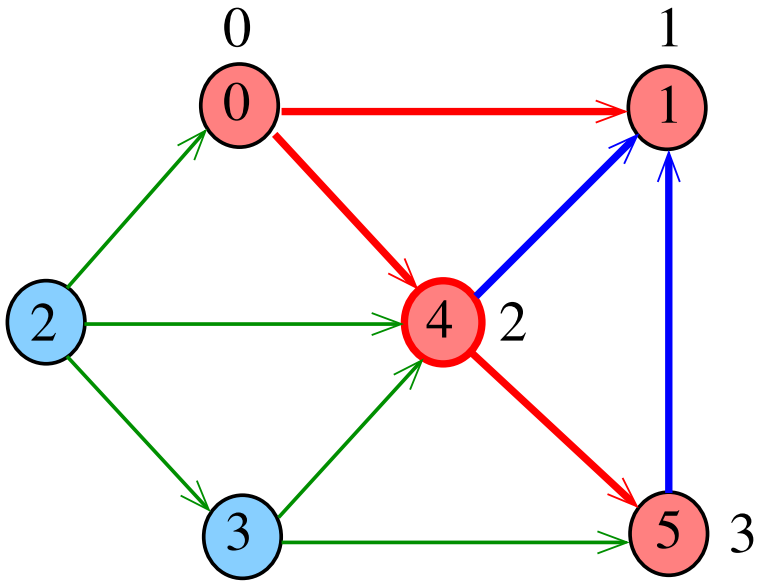
dfsR(G,4)



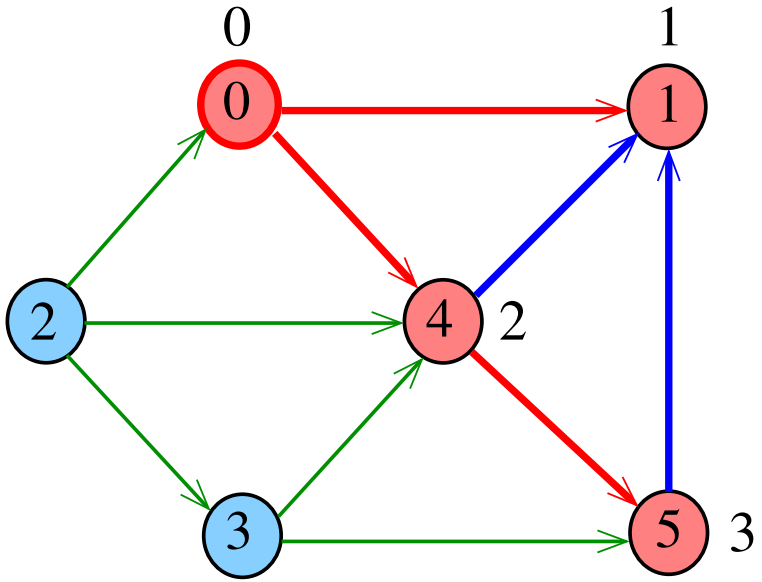
dfsR(G,5)



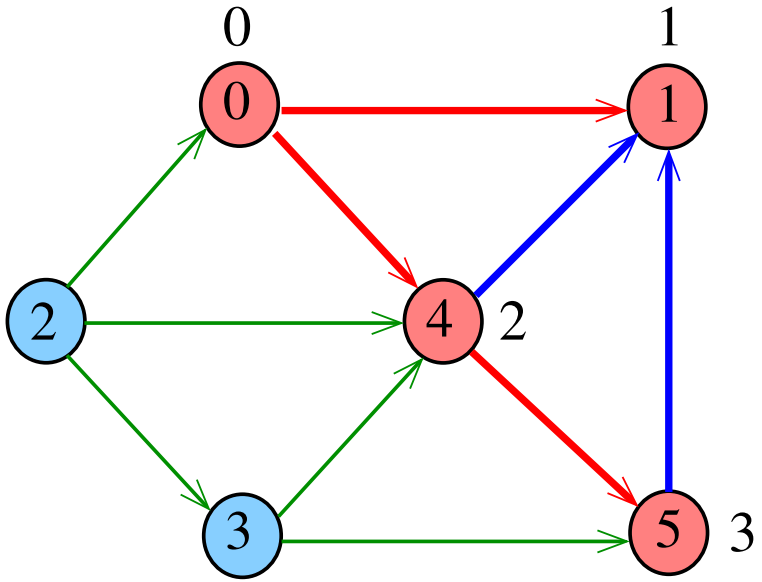
dfsR(G,4)



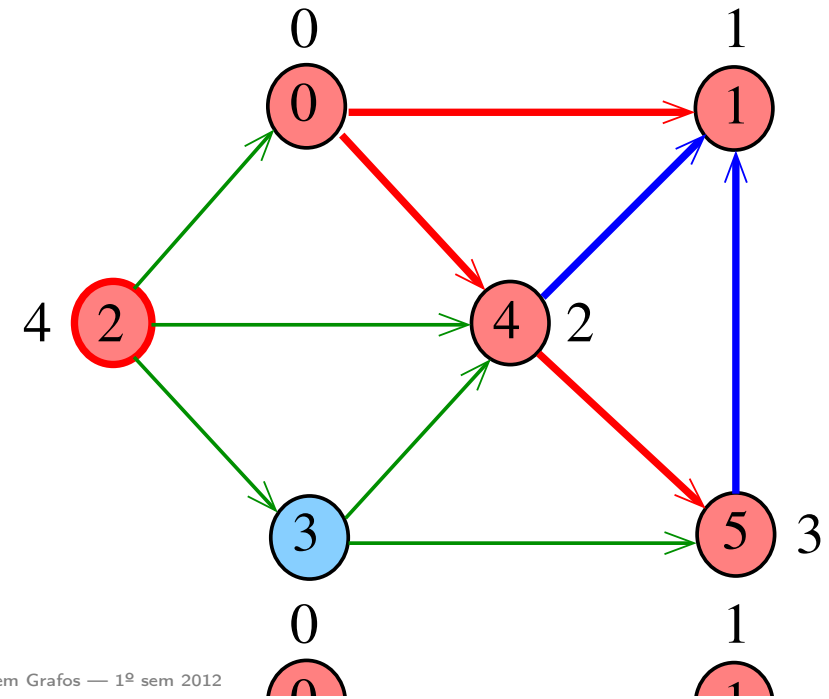
dfsR(G,0)



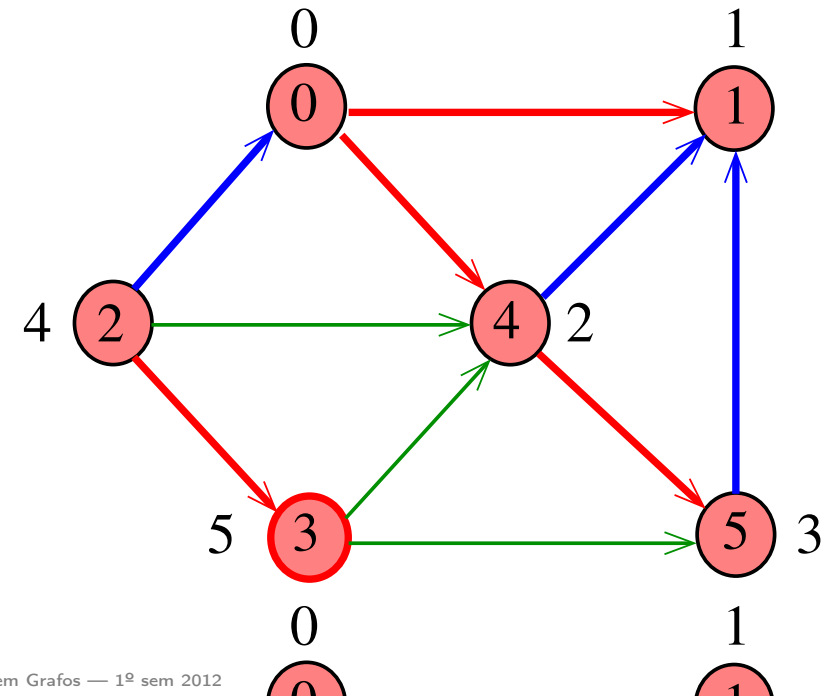
DIGRAPHdfs(G)



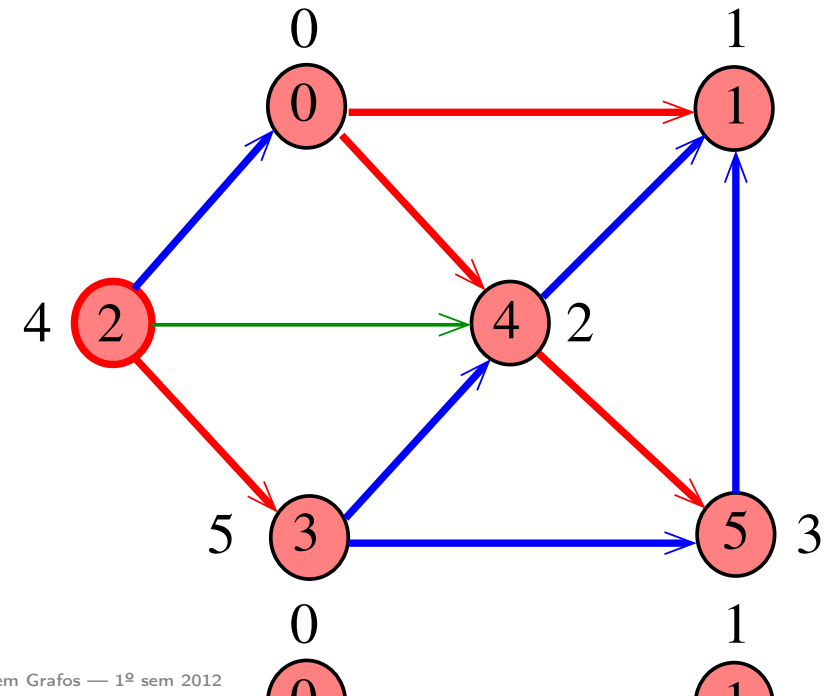
dfsR(G,2)



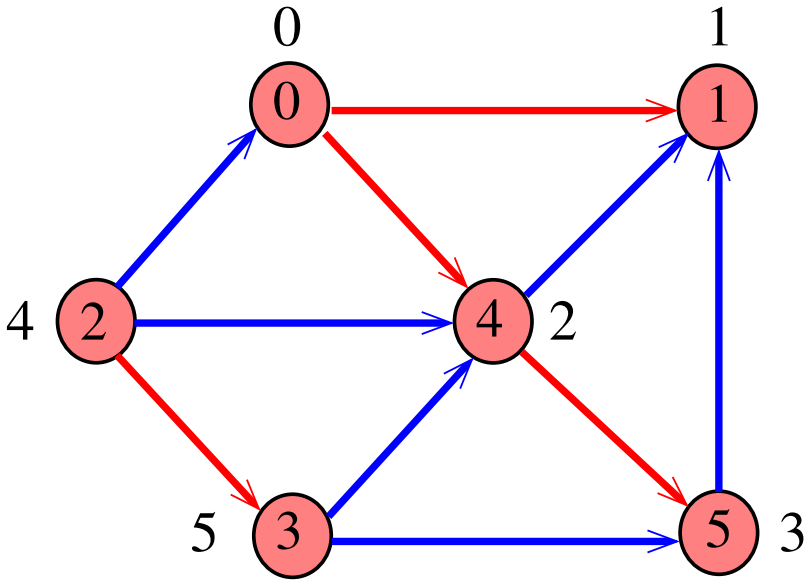
dfsR(G,3)



dfsR(G,2)



DIGRAPHdfs(G)



DIGRAPHdfs

```
static int cnt, lbl[maxV];
void DIGRAPHdfs (Digraph G) {
    Vertex v;
1   cnt = 0;
2   for (v = 0; v < G->V; v++)
3       lbl[v] = -1;
4   for (v= 0; v < G->V; v++)
5       if (lbl[v] == -1)
6           dfsR(G, v);
}
```


dfsR

dfsR supõe que o digrafo G é representado por uma matriz de adjacência

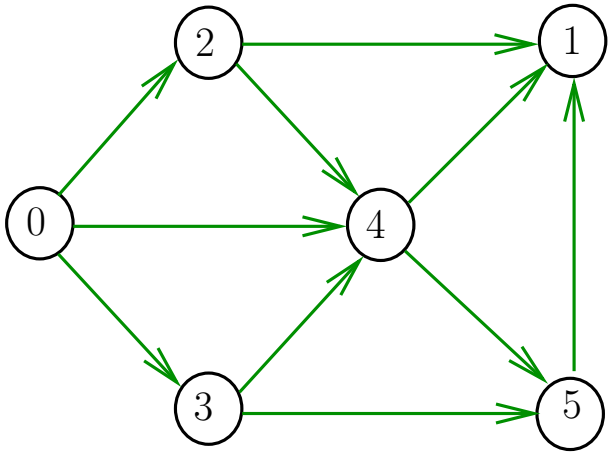
```
void dfsR (DigraphG, Vertex v) {
    Vertex w;
1   lbl[v] = cnt++;
2   for (w = 0; w < G->V; w++)
3       if (G->adj[v][w])
4           if (lbl[w] == -1)
5               dfsR(G, w);
}
```


dfsR

dfsR supõe que o digrafo G é representado por listas de adjacência

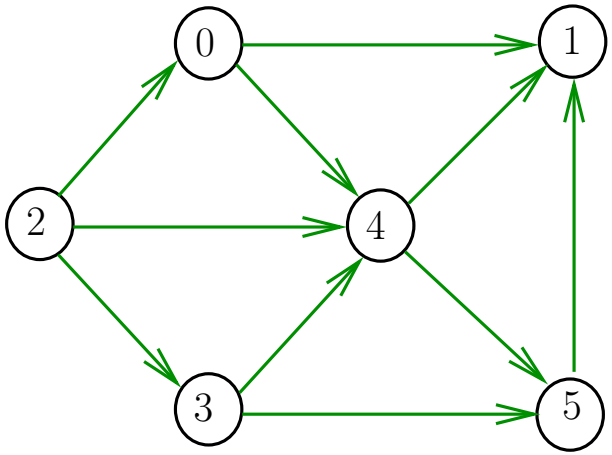
```
void dfsR (Digraph G, Vertex v) {
    link p;
1   lbl[v] = cnt++;
2   for (p = G->adj[v]; p != NULL; p= p->next)
3       if (lbl[p->w] == -1)
4           dfsR(G, p->w);
}
```


DIGRAPHdfs(G)




```
dfsR(G, 0)
  0-2 dfsR(G,2)
    2-1 dfsR(G,1)
    2-4 dfsR(G,4)
      4-1
      4-5 dfsR(G,5)
        5-1
  0-3 dfsR(G,3)
    3-4
    3-5
  0-4
```

DIGRAPHdfs(G)




```
dfsR(G, 0)
  0-1 dfsR(G, 1)
  0-4 dfsR(G, 4)
    4-1
    4-5 dfsR(G, 5)
      5-1
dfsR(G, 2)
  2-0
  2-3 dfsR(G, 3)
    3-4
    3-5
  2-4
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função DIGRAPHdfs para vetor de listas de adjacência é $\Theta(V + A)$.

O consumo de tempo da função DIGRAPHdfs para matriz de adjacência é $\Theta(V^2)$.

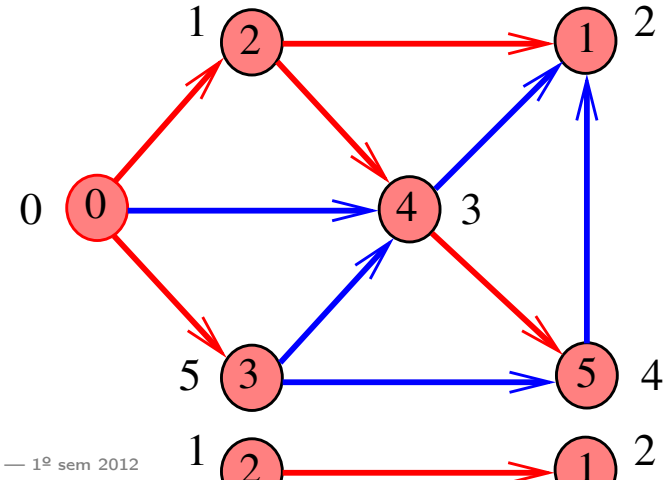
Arborescência de busca em profundidade

Classificação dos arcos

S 18.4 e 19.2
CLRS 22

Arcos da arborescência

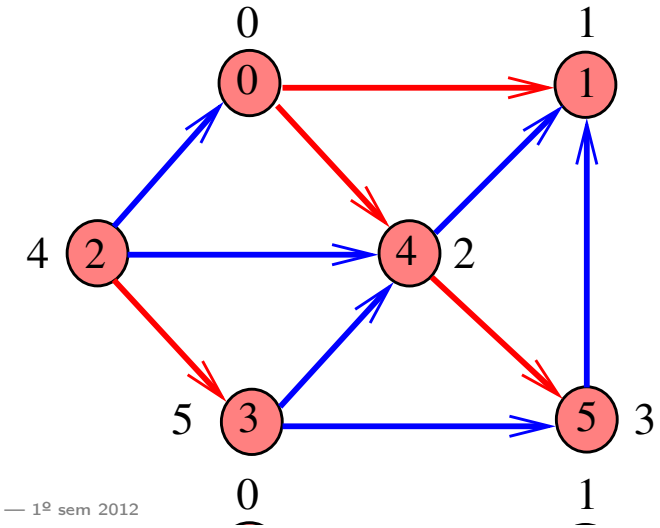
Arcos da arborescência são os arcos v-w que dfsR percorre para visitar w pela primeira vez
Exemplo: arcos em vermelho são arcos da arborescência



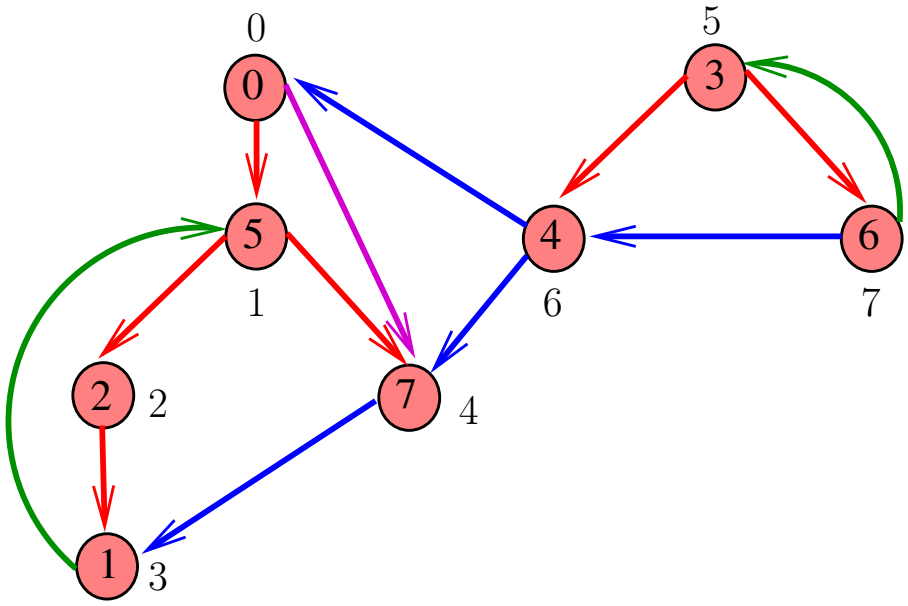
Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

Exemplo: arcos em vermelho formam a floresta DFS

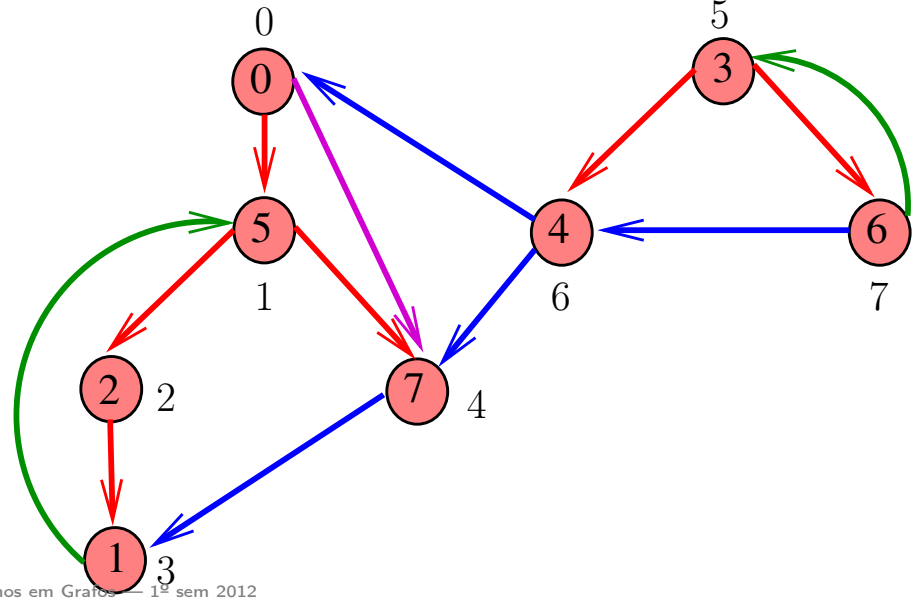


Classificação dos arcos



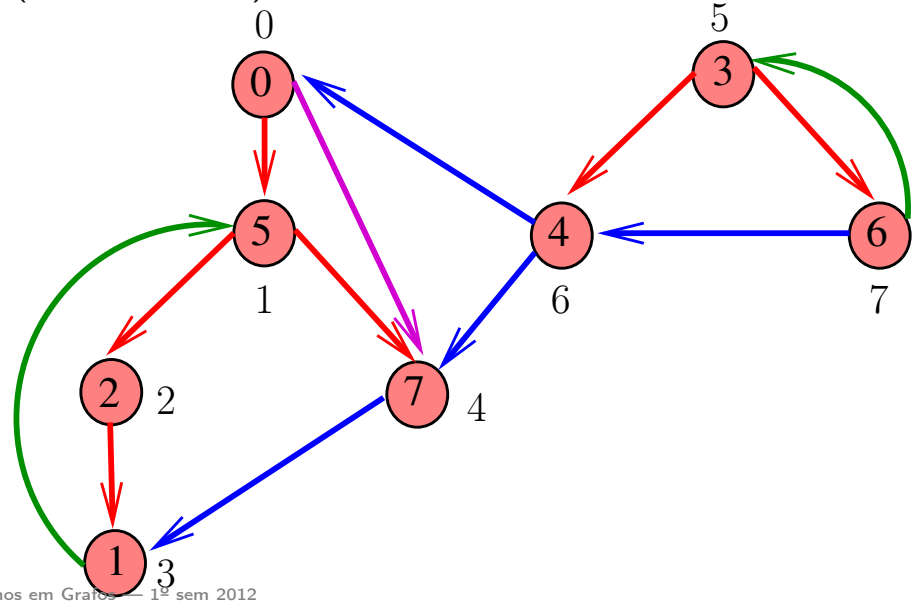
Arcos de arborescência

`v`-`w` é **arco de arborescência** se foi usado para visitar `w` pela primeira vez (arcos **vermelhos**)



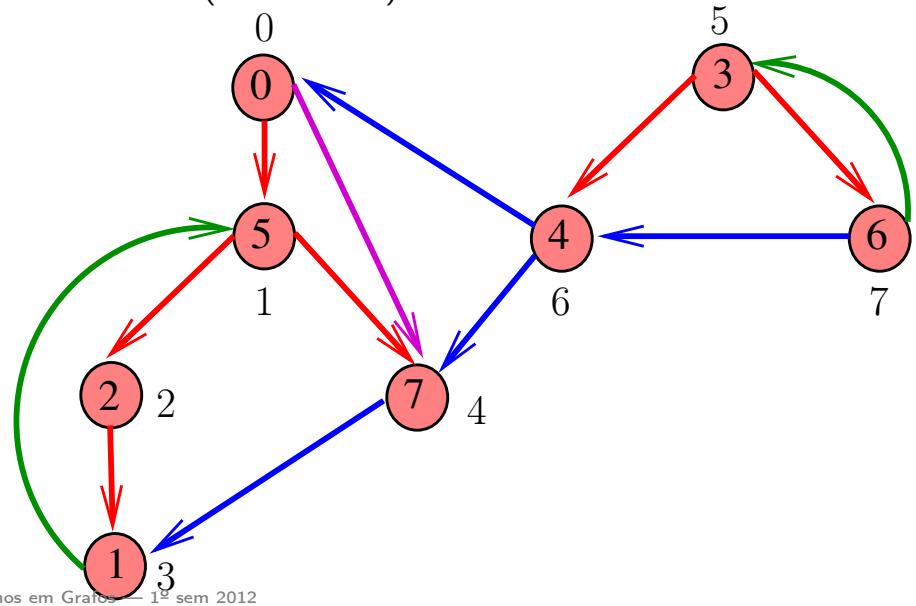
Arcos de retorno

`v`-`w` é **arco de retorno** se `w` é ancestral de `v` (arcos **verdes**)



Arcos descendentes

v-w é **descendente** se w é descendente de v, mas não é filho (arco **roxo**)



Arcos cruzados

v-w é **arco cruzado** se w não é ancestral nem descendente de v (arcos **azuis**)