MAT320 - Introdução à Análise Complexa

5^a **Lista de Exercícios - 27/04/2008**

1. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos, com $z_n = x_n + iy_n$. Mostre que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $z = x + iy$ se e somente se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y.

2. Obtenha o desenvolvimento das funções abaixo em séries de potências em torno do ponto indicado. Determine os respectivos discos de convergência e represente-os graficamente.

   a) $f(z) = \dfrac{1}{z}, \quad z = i.$ b) $f(z) = \dfrac{1}{z}, \quad z = -i.$

   c) $f(z) = \dfrac{i}{z+i}, \quad z = 1.$ d) $f(z) = \dfrac{1}{(2z-3)}, \quad z = 0.$

   e) $f(z) = \dfrac{1}{(2z-3)}, \quad z = -i.$ f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}, \quad z = 1.$

   d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}, \quad z = -2.$

3. Determine o raio de convergência das séries de potência abaixo:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^n.$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n.$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z-i)^n}{n!}.$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log(3n^2+5)(z+i)^n.$

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\text{ senh } n)z^n.$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n.$

   g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n})^n z^n.$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n} z^{2n}.$

   i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{n^2}.$ j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_n = 2^{2n}$ e $a_{2n+1} = 5^{2n+1}$.

   k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$ onde $a_n = n^2$ se n é primo e $a_n = 0$ se n não é primo.

4. Obtenha o desenvolvimento em série de potências nos exemplos abaixo e mostre que o eles são válidos para todo z:

   a) $\text{sen } z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ b) $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

   c) $\text{senh } z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ d) $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5. Desenvolva em série de potências em torno de $z=0$ as funções abaixo, com ramos determinados pela condições: $\arccos 0 = 1$, $\arctan 0 = 0$ $\sqrt[3]{1} = 1$.

   a) $\arccos\ z$. b) $\arctan\ z$. c) $\dfrac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$.

6. Desenvolva em série de potências em torno de $z=1$ a determinação principal ($\log 1 = 0$) de $f(z) = z\log z - z$.

7. Desenvolva em série de potências em torno de $z=0$ e $z=2$, respectivamente as funções abaixo:

   a) $f(z) = \dfrac{1}{(4-z)^3}$ b) $g(z) = \dfrac{1}{z^5}$

   (Sugestão para a): Desenvolva primeiro a função: $f(z) = \frac{1}{(4-z)}$ e derive duas vezes. Proceda de modo semelhante para g.)

8. Desenvolva em série de potências em torno de $z=0$ e as funções abaixo:

   a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ b) $g(z) = \dfrac{z}{(z+i)^3(z-1)}$.

   (Sugestão: Decomponha em frações simples.)