MAT320 - Introdução à Análise Complexa

3a. Lista de Exercícios - 27/04/2008

1. Sejam $z = x+iy$ e $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. Se z for escrito em coordenadas polares, isto é, $z = r(\cos\theta + i\text{sen }\theta)$ e $f(z) = u(r(\cos\theta, \text{sen }\theta)) + iv(r(\cos\theta, \text{sen }\theta))$, então

   (a) Usando a regra da cadeia, mostre que

   $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\text{sen}\theta \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\text{sen }\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)$$
   $$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\text{sen}\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}(-r\text{sen }\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta)$$

   (b) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann ficam

   $$\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

2. Seja $f(z) = \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + i \text{ sen } \frac{\theta}{2})$, para $z = r(\cos\theta + i\text{sen }\theta)$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.. Usando o ex. 1, determine os pontos z para os quais existe $f'(z)$ e determine $f'(z)$.

3. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com u e v de classe $\mathcal{C}^2$ em D, para $z = x + iy$.

   (a) Mostre que, se f é analítica em D, então

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } D \qquad (1)$$

   (b) Uma função $u(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$, que satisfaz (1) é denominada *função harmônica*. As funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são ditas *funções harmônicas conjugadas* se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica.

      i. Mostre que $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ é função harmônica.

      ii. Determine a função harmônica conjugada de u, resolvendo o sistema

      $$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy \qquad (2)$$
      $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = -(3y^2 - 3x^2) \qquad (3)$$

      iii. Mostre que u é harmônica e determine sua conjugada harmônica em cada um dos casos abaixo

A. $u(x,y) = 2x(1-y)$
B. $u(x,y) = y(x^2+y^2)^{-1}$

4. (Funções hiperbólicas) Definimos o seno e o cosseno hiperbólico respectivamente, por

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

   (a) Mostre que o seno e o cosseno hiperbólicos são funções inteiras (analíticas em todo o plano complexo), e calcule suas derivadas.
   (b) Verifique que $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$.
   (c) Mostre que $\cosh(iz) = i\cos(z)$, $\operatorname{senh}(z) = i\operatorname{sen}(z)$.
   (d) Mostre que $\cosh(x+iy) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$ e $\operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$
   (e) Determine os valores de $z \in \mathbf{C}$ para os quais $\operatorname{senh}(z) = 0$. Idem para $\cosh(z) = 0$

5. Determine todos os valores de z para os quais
   a) $e^z = 1 - i$ b)$e^{2z-1} = 2$ c) $\cos(z) = 3$
   d) $\operatorname{senh}(z) = i$ $\cosh(z) = \frac{-1}{2}$

6. Calcule

a) $e^{2+3\pi i}$	b)$e^{2-3\pi i}$	c) $e^{\frac{2+\pi i}{4}}$	d) $Log(i)$
e) $Log(-ei)$	f) $Log(-3)$	g) $Log(2-2\sqrt{3}i)$	h) e^{-7z}
i) $Log(i+\sqrt{3})^3$	j) $Log(\sqrt{3}-i)^{-2}$	k) $(1+i)^i$	l) $(-2)^{i+1}$
m) $(1+i)^{3i}$	n) $(i)^{Logi}$	o) $Log(e^{1+i})$	p) $Log(3e^i)$
q) $((1+i)^{10})^i$	r) $(1+i)^{10i}$		

7. Esboçe o traço das curvas e calcule as integrais

   (a) $\int_\gamma \frac{1}{z-i}\,dz \quad \gamma(t) = e^{it} + i \quad t \in [0, 2\pi]$
   (b) $\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz \quad \gamma(t) = e^{it} \quad t \in [0, \pi]$
   (c) $\int_\gamma \frac{z+2}{z}\,dz \quad \gamma(t) = 2e^{it} + i \quad t \in [0, \pi]$
   (d) $\int_\gamma (z-1)\,dz \quad \gamma(t) = t \quad t \in [0, 2]$

8. Calcule a integral de f ao longo do contorno C nos casos seguintes

   (a) $f(z) = 2x - y + ix^2$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $1+i$.
   (b) $f(z) = |x|$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $-2+3i$.
   (c) $f(z) = y - x^2$, ao longo do segmento da origem ao ponto $(2,0)$, seguido do segmento de $(2,0)$ a $(2,1)$ e ao longo do segmento da origem ao ponto $(0,1)$, seguido do segmento de $(0,1)$ a $(2,1)$. Verique se os resultados são iguais ou diferentes. Comente.

9. Mostre que $|\int_C| \frac{dz}{z} \leq 1$ onde C é o segmento retilíneo que une 1 a $1+i$ sem efetuar a integração.

10. Seja γ uma curva cujo traço são os lados do quadrado de vértices $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = i$. Calcule $\int_\gamma e^{\pi \bar{z}}\, dz$.

11. Seja $z_0 \in \mathbf{C}$ e $\gamma(t) = r_0 e^{it} + z_0$, $r_0 > 0$ e $t \in [0, 2\pi]$. Mostre que $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2\pi i$ e $\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz = 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

12. Seja $z_0 \in \mathbf{C}$ e γ um caminho fechado qualquer ao redor de z_0. Calcule $\int_\gamma \frac{z^n}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$.

13. Calcule a) $\int_0^{1+i} (z^2 + z - 1)\, dz$ b)$\int_{-i}^{i} z^{1/2}\, dz$

14. Calcule a integral de f ao longo do contorno C nos casos seguintes

    (a) $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$ e C é o círculo $|z| = 2$.

    (b) $f(z) = \frac{3z^2}{z+2i}$ e C é o círculo $|z| = 3/2$.

    (c) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$.

    (d) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$.

    (e) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-z+iz-i}$.