

MAT320 - Introdução à Análise Complexa

4ª Lista de Exercícios (Revisão seqüências e séries reais) - 12/06/2008

I) Decida se cada uma das seqüências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \dots$

5) $c_k = \frac{\sqrt{k} + 1}{k - 1}, \quad k = 2, 3, \dots$

7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

11) $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$

12) $a_n = \operatorname{sen} n; b_n = \operatorname{sen}(n\pi); c_n = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}$

13) $a_n = \frac{2n + \operatorname{sen} n}{5n + 1}$

15) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

17) $a_n = \frac{3^n}{2^n + 10^n}$

19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

23) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

25) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}$

29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

33) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

35) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

37) $\left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$

2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

6) $a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2}$

8) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

10) $a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

14) $a_n = \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

16) $a_n = \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1}$

18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

20) $a_n = na^n, \quad a \in \mathbb{R}$

22) $a_n = n - n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

24) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ onde $0 < a < b$

26) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

28) $a_n = \sqrt[n]{n}$

30) $\frac{\ln(n)}{n^a}, \quad a > 0.$

32) $a_n = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$

34) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

36) $\left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

38) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

II) Verifique que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ se:

$$1) a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$$

$$2) a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)}$$

III)

1) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números positivos e seja α um número positivo. Mostre que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = 0$.

IV)

1) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e seja $f: A \rightarrow A$ uma função contínua em $a \in A$. Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência definida por: $a_0 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 0$. Suponha que $a_n \rightarrow a$. Prove que $f(a) = a$.

2) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

3) Mostre que a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ... converge para 2.

4) Calcule $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}$.

V) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências:

$$1) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^3}$$

$$2) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{e^r}$$

$$3) s_n = \sum_{r=3}^n \frac{1}{\ln r}$$

$$4) a_n = \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)}$$

$$5) a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$$

Calcule o limite nos casos 2) e 5).

VI) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n \right)$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{k}{2}} \quad \text{para } 0 < t < 1$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} u^n (1 + u^n) \quad \text{para } |u| < 1$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n \frac{\pi}{2} \quad \text{para } |x| < 1$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^{2n} x \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{n}{j} \right)$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$9) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\operatorname{sen} k}$$

$$11) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos k}{k}$$

$$10) \sum_{s=1}^{\infty} \cos \frac{1}{s}$$

VII) É convergente ou divergente? Justifique.

$$1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$11) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$13) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^p}\right), \quad p > 0$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$$

$$17) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k}$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda} \quad \lambda > 0$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3} \sqrt[5]{n^3+5}}$$

$$10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$12) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R} \quad p > 0$$

$$14) \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$$

$$18) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

VIII) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 3}$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}, p > 0$$

$$10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

IX) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

1) $1, \overline{29}$

2) $0, \overline{3117}$

X) Para cada n , seja a_n um dos dígitos $0, 1, 2, \dots, 9$. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

é convergente.

XI) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

XII) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

XIII) Verificar as seguintes relações:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - f(1)$, se o limite existir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1)$, se existir o limite.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n}{n+2} \right)$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n+1} \right)$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \dots (n+k)} \quad k \geq 2$.

XIV) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as séries convergem.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1+x^n)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos \frac{n\pi}{2}$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln x}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} \operatorname{sen} x$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$

RESPOSTAS

I) Respostas

- | | |
|--|---|
| 1) converge para 1 | 2) diverge |
| 3) diverge | 4) converge para 2 |
| 5) converge para 0 | 6) converge para $\frac{1}{4}$ |
| 7) converge para 0 | 8) converge para 1 |
| 9) converge para $\frac{3}{2}$ | 10) converge para $\frac{1}{2}$ |
| 11) converge para 0 | 12) a_n e b_n divergem ; $b_n \rightarrow 0$ |
| 13) converge para $\frac{2}{5}$ | 14) converge para 0 |
| 15) converge para 1 | 16) converge para 0 |
| 17) converge para 0 | 18) converge para e |
| 19) converge para 0 | 20) converge para 0 se $0 < a < 1$,
diverge para ∞ se $a \geq 1$,
diverge se $a \leq -1$ |
| 21) converge para 0 | 22) converge para 0 |
| 23) diverge | 24) converge para b |
| 25) converge para 0 | 26) converge para $\frac{1}{2}$ |
| 27) converge para 0 | 28) converge para 1 |
| 29) converge para 0, $\alpha \in \mathbb{R}$ | 30) converge para 0 |
| 31) diverge | 32) converge para 1 |
| 33) $1/e$ | 34) $+\infty$ |
| 35) 1 | 36) 0 |
| 37) $\exp(22/15)$ | 38) 1 |

IV) Respostas

- | | |
|------|------|
| 1) 2 | 3) 2 |
|------|------|

V) Respostas

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1) converge | 2) converge para $\frac{1}{e-1}$ |
| 3) diverge | 4) diverge. Dica: calcular $\ln a_n$ |
| 5) converge para 0. Dica: calcular $\ln a_n$ | |

VI) Respostas

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) diverge | 2) $\frac{1}{1 + \sqrt{t}}$ |
| 3) $\frac{2+u}{1-u^2}$ | 4) $\frac{1}{1+x^2}$ |
| 5) $\frac{1}{1 - \sin^2 x}$ | 6) diverge |
| 7) diverge | 8) diverge |
| 9) diverge | 10) diverge |
| 11) diverge | |

VII) Respostas

- | | |
|---|---|
| 1) diverge | 2) converge |
| 3) converge | 4) converge |
| 5) diverge | 6) diverge |
| 7) converge | 8) converge |
| 9) converge | 10) converge |
| 11) converge | 12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$ |
| 13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$ | 14) diverge |
| 15) diverge | 16) diverge |
| 17) converge | 18) diverge |
| 19) diverge | |

VIII) Respostas

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1) converge condicionalmente | 2) converge absolutamente |
| 3) converge condicionalmente | 4) converge condicionalmente |
| 5) converge condicionalmente | 6) converge absolutamente |
| 7) diverge | 8) diverge |
| 9) converge absolutamente se $p > 1$
converge condicionalmente se $p \leq 1$ | 10) converge absolutamente |
| | 11) converge condicionalmente |

XII) $2s - a_1$.

XIII) 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) $\sin(1)$ 6) converge para 1; 7) converge para $\frac{1}{k!(k-1)}$

XIV)

- | | |
|---|---|
| 1) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ | 2) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ |
| 3) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ | 4) $\{x = 0\}$ |
| 5) $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < x < 1\}$ | 6) $\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ |
| 7) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ | |