A CONSTANTE DE EULER

DATA DE ENTREGA: 27/10/2002

A *constante de Euler* é definida como

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \log n), \tag{1}$$

onde H_n é o *n-ésimo número Harmônico*:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k}, \tag{2}$$

e log denota o logaritmo natural. Sabe-se que

$$\gamma = 0.57721\,56649\,01532\,86060\,65120\,90082\,40243\ldots \tag{3}$$

Neste EP, você deve determinar o valor de γ o mais precisamente possível.

Você deve implementar as seguintes duas idéias, no mínimo.

Método "direto". Certamente, o método mais fácil é determinar aproximações para γ calculando $H_n - \log n$ para valores grandes de n. Quantas casas decimais de γ você consegue determinar dessa forma? (Compare seu resultado com (3).)

A fórmula da soma de Euler. Em 1732, Euler publicou um método importante para estimar somas. Este método, aplicado a (2), fornece que, para todo m e $n \ge 1$ inteiros, temos

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{1\le k\le m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \theta_{m,n}\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)n^{2m+2}}, \tag{4}$$

onde $\theta_{m,n}$ é um número entre 0 e 1, e os B_j são os *números de Bernoulli*:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \ldots$$

e

$$B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0.$$

Os números de Bernoulli satisfazem a equação

$$\sum_{0\le j\le m} \binom{m+1}{j} B_j = 0, \tag{5}$$

para todo inteiro $m \ge 1$.

Fixe m, como $m = 2$ e $m = 3$, e desenvolva explicitamente a equação (4). Fixado m, obtenha aproximações para γ usando (4) para valores apropriados de n. (Você consegue prever valores apropriados para n em função da precisão desejada?) Veja o que você consegue. (Para usar (4) com $m \geq 3$, determine $B_8, B_{10}, \ldots$ manualmente.)

O que o programa deve fazer.

(a) O seu programa deve imprimir uma tabela com valores de

$$n, \quad H_n - \log n, \quad \text{e} \quad -\log_{10} |\gamma - (H_n - \log n)|,$$

incluindo valores grandes de n (inclua valores maiores ou iguais a 10^8). Aqui, você deve usar o valor de γ dado em (3).

(b) Use (4) para valores adequados de m e n para determinar γ com grande precisão, a menos de um erro de no máximo 10^{-13} (se conseguir erros menores, melhor). Nesta parte, o seu programa deve imprimir uma tabela com valores

$$m, \quad n, \quad \gamma_{m,n}, \quad \text{e} \quad -\log_{10} |\gamma - \gamma_{m,n}|,$$

onde $\gamma_{m,n}$ é a aproximação de γ obtida a partir de (4). Esta tabela deve incluir aproximações $\gamma_{m,n}$ com grande precisão, a menos de um erro de no máximo 10^{-13} em relação ao valor exato de γ fornecido em (3). **Sugestão.** Tente com valores pequenos de m como $m = 2, 3, \ldots$ e veja o que você consegue.

Bônus (Só para GRANDES Aventureiros!) Use o método de Euler para determinar γ a menos de um erro de 10^{-100}.

Se você quiser, use que

$$\begin{aligned} \log 2 = 0.&69314718055994530941723212145817656807550013436025\\ &52541206800094933936219696947156058633269964186875\\ &42001481020570685733685520235758130557032670751635\\ &07596193072757082837143519030703862389167347112335\ldots \end{aligned}$$