

Teoria dos Conjuntos - Uma introdução

Gladys Chalom e Angela Weiss

14 de setembro de 2009

Sumário

Prefácio	v
1 Introdução a Lógica	1
1.1 Uma Digressão Sobre Lógicas	1
1.2 Axiomas, Formalismo, Conceitos Primitivos?	4
1.3 Um Guia Rápido Para Andar Nesta Floresta	9
1.4 Indutivo? Como?????	15
1.5 Exercícios	17
2 Axiomas Básicos de Teoria dos Conjuntos	19
2.1 Axiomas e um Modelo	20
2.2 Digressões	31
2.3 Mais Axiomas	31
2.4 Exercícios	34
3 Ordem e Axioma da Escolha	43
3.1 Números Naturais	43
3.2 Conjuntos Ordenados	46
3.2.1 Alguns Exemplos de Boa Ordem	49
3.2.2 Axioma da Escolha em Várias Formas	51
3.3 Ideais e Filtros	54
3.4 Exemplos	60
3.5 Exercícios	66
4 Números Ordinais e Cardinais	69

5	Conjuntos Hereditariamente Finitos	73
5.1	Introdução	73
5.2	Conjuntos Hereditariamente Finitos	73
5.3	Exercícios	76
6	Mais de Lógica	77
7	Os Racionais e os Reais	81
8	Alguns Exercícios sugeridos por alunos	83
9	Além de ZFC: A teoria das Categorias	89
9.1	Primeiras Definições	90
	Bibliography	93

Prefácio

Este texto tem como público alvo alunos de bacharelado em matemática, licenciatura em matemática, ciência da computação e filosofia, alunos de pós graduação cujas áreas de interesses necessitem em lógica, álgebra, teoria dos conjuntos como ferramenta de trabalho.

Visamos, neste texto, formar uma ponte entre textos ingênuos, voltados apenas a divulgação científica e os textos mais elaborados, voltados especificamente ao público da área.

De posse desta versão, *LEMBRE-SE*: Como toda versão preliminar, e esta versão certamente não será uma exceção, possivelmente o leitor encontrará erros. Estes são de nossa responsabilidade e podem ser comunicados via e-mail (agchalom@ime.usp.br ou weiss@ime.usp.br).

Este texto **não** deve ser divulgado sem a permissão dos autores, citado em referências ou usado como material didático sem a expressa autorização dos autores.

Trataremos dos seguintes tópicos:

- Introdução, alguns paradoxos matemáticos visando motivar o leitor ao estudo dos fundamentos da matemática;
- Os axiomas de teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel, seguidos de uma discussão de seu significado;
- A construção de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{N}$. Algumas definições de *Número Natural*.
- Introdução da noção de *cardinalidade* e a prova de que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade, mas a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é maior do que a

cardinalidade de $\mathbb{N}$. O teorema de Cantor–Bernstein;

- Algumas noções de lógica matemática elementar (lógica de primeira ordem);
- Algumas teorias axiomáticas dos conjuntos: **ZF** e **KM**: união, intersecção;
- Uma Introdução à Teoria das Categorias.

Recomendamos, como leitura suplementar em teoria dos conjuntos [4]. Um livro excelente para acompanhar o curso é [2]. Professores Fitting e Smullyan são sempre ótimas recomendações. Vale a pena verificar em [6]. Sugerimos também, que leia um pouco da história dessas áreas no livro [1].

Capítulo 1

Introdução a Lógica

1.1 Uma Digressão Sobre Lógicas

Para que um livro de **Teoria dos Conjuntos**? Para que um curso de **Teoria dos Conjuntos**? Todos nós temos uma noção intuitiva de conjunto, e começamos a pensar em “conjuntos de alunos”, “conjuntos de carteiras”, etc. Houve uma época, há alguns anos atrás, em que a teoria dos conjuntos esteve na moda entre as correntes didáticas e era o foco das transformações da matemática moderna, onde “ensinávamos” conjuntos a crianças do ensino fundamental. Uma das razões para isso é que a **Teoria dos Conjuntos** pode ser vista como uma “linguagem”, linguagem essa que se presta a descrever de forma absolutamente axiomática os modelos que normalmente são usados para “modelar” ou descrever problemas matemáticos.

Muito do que nós criamos recebe inspiração em problemas de nosso dia-a-dia. Se formos pensar, muito do cálculo diferencial e integral que aprendemos se originou em problemas de balística. Temos tecnologias de CD's, originadas da experiência das naves *Voyager* que levavam mensagens em CD's e muitos outros exemplos dessa natureza. A matemática, por ser a linguagem comum de todas as ciências, deve receber inspiração, mesmo em seus fundamentos, de outras fontes.

Na matemática, aliás, em qualquer campo científico, em qualquer interação enquanto seres que vivem em uma coletividade, estamos preocupados em saber quando, ou se, uma afirmação é correta (dentro de um certo contexto), e portanto uma “linguagem matemática” apropriada e boa de se

trabalhar deve poder determinar isso para pelo menos algumas afirmações.

Veja por exemplo

- 1) Existem unicórnios ou não existem unicórnios.
- 2) O número de alunos em certa sala de aula é divisível por 7.
- 3) Todos os lógicos são malucos e alguns lógicos não são malucos.

Estes exemplos são do livro James MacCauley, [5].

Não é necessário uma teoria especial para saber que 1 é verdadeira (aliás, não diz nada....), a afirmação 2 pode ou não ser verdadeira, dependendo do dia, e a afirmação 3 é sempre falsa, pois contém uma contradição.

Mas, antes mesmo de decidir se as afirmações são ou não verdadeiras, devemos nos perguntar se mesmo que a gramática esteja correta, a afirmação faz ou não sentido. Veja os exemplos:

- 1) Uma velha formiga levou seu cão para passear.
- 2) Um elefante morto dorme ruidosamente à sombra das flores.
- 3) Almoçamos os axiomas vermelhos da teoria.

Exemplos tirados do Chomsky park, em

[http : //www.learnenglish.org.uk/games_frame.html](http://www.learnenglish.org.uk/games_frame.html)

Naturalmente, esta questão das afirmações fazerem ou não sentido, não existe dentro de certas “linguagens poéticas”, e assim vemos que existem “gramáticas” e “sentidos” diferentes em diferentes contextos. Assim, dentro do contexto da matemática, novamente nos perguntamos para que todo esse formalismo, e se não é natural quais as coisas corretas e quais não são.

Em muitas circunstâncias, em outras ciências, é fácil mostrar um exemplo, para ilustrar uma definição, como uma ponte, um edifício, ou um animal, mas como “explicar” o que é um grupo abeliano, sem uma definição clara?

Historicamente, foi isso o que ocorreu, ou seja, a teoria foi se desenvolvendo sem muita preocupação formal, até que foram encontrados **paradoxos** na teoria. Como funciona uma teoria que contém contradições?

Da necessidade de poder decidir o que é verdadeiro ou não, e de livrar a teoria das contradições, surgiu um “conjunto” de axiomas e um “conjunto” de regras (como a lógica formal) que permitem deduzir “verdades” (como teoremas) das nossas hipóteses originais.

Pois bem, nós não estamos interessados fazer a formulação matemática de conceito Platônico de *verdade universal*. Isso não existe, nem em física, biologia, psicologia ou matemática. A Ciência procura paradigmas, isto é, um conjunto de “fundamentos básicos” que, tomados como a base do conhecimento, expliquem razoavelmente os fatos observados. Como, por exemplo, o paradigma da Física Newtoniana foi reformulado, depois das experiências sobre as medidas da velocidade da luz, que comprovavam que a luz tinha sua velocidade constante, independentemente da velocidade do referencial. O paradigma da física moderna é dado pela equações da teoria da relatividade de Einstein. Mas usamos os modelos e equações da Mecânica Newtoniana para cálculos de engenharia. Afinal, usar outro tipo de abordagem, como teoria da relatividade, levaria a cálculo muito mais complexos, mais custosos, com resultados deveras semelhantes aos obtidos usando mecânica clássica. O paradigma natural da Engenharia é a *Mecânica Newtoniana*.

Vejamos mais alguns exemplos, de padrões lógicos:

Exemplo 1.1 *Tudo pode ser decidido com repostas simples: Sim ou Não. Então responda, sim ou não, você já parou de roubar?*

A frase acima, atribuída a Sir Winston Churchill, em resposta a um repórter que o entrevistava, insistindo em respostas mais objetivas, demonstra uma falha na decidibilidade de certas frases em relação ao critério: “*Se a sentença S não é verdadeira, então sua negação é verdadeira*”.

Como outro exemplo, considere a frase:

Exemplo 1.2 *Decida, verdadeiro ou falso: Chove?*

A resposta acima depende do contexto de tempo e lugar. Por exemplo, hoje, dia 12 de maio de 2010, em São Paulo, capital, chove.

Nossa melhor abordagem é que podemos ter modelos para “simular” certos raciocínios. Por exemplo, lógica intuicionista serve perfeitamente

para a ciência da computação. Lógica clássica, de primeira ordem, modela muito de nosso raciocínio em matemática. Falar sobre a “diferença” entre os números reais e os números racionais, fora o fato de serem corpos linearmente ordenados e densos, exige algo mais forte do que lógica de primeira ordem. Além da nossa teoria dos conjuntos básicas, em álgebra, precisamos de teoria das categorias.

Nosso objetivo é discutir uma proposta de axiomatização para os fundamentos da matemática.

1.2 Axiomas, Formalismo, Conceitos Primitivos?

Vamos passar Isso a Limpo?

Bem vindo, leitor! Agora você está abrindo uma porta nova em seus horizontes de conhecimento.

Essa base provavelmente não será usada diretamente em seu trabalho, mas o conhecimento da “pedra fundamental” da matemática certamente fará do leitor, seja ele um professor, um computólogo, um matemático, um profissional mais seguro dos seus caminhos de atuação.

Possuir conhecimentos da base dos fundamentos de uma ciência significa saber lidar com segurança, e sem medo de errar, com problemas pertinentes à sua área específica de atuação. Devemos sempre, para não pecar pela omissão gerada pela insegurança, nos calcar nos fundamentos.

A moral de nossa estória é: ninguém reforma uma casa sem ter conhecimento de suas fundações, ninguém é fluente em uma língua sem saber sua gramática.

Nossa linguagem deve ter regras básicas e rígidas. Essas regras são os axiomas. Axiomas são o código de regras do que é permitido ou não de se fazer. Note que esses códigos serão sempre rígidos: *Faça o que diz o axioma e nada mais*. Por exemplo:

Exemplo 1.3 *Vamos estipular as seguintes regras:*

1. vogais: a, e, i, o, u ;
2. consoantes $b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z$;

3. *palavras: junção de uma consoante com uma vogal é uma palavra;*

4. *palavras: junção de duas palavras é uma palavra.*

No nosso exemplo, **bu** é uma palavra (junção de uma consoante com uma vogal). Como junção de duas palavras é uma palavra, temos que **bubu** é uma palavra, assim como **bububu** e **bubububu**. Mas **ub** *não* é uma palavra pois não satisfaz os quesitos para ser palavra.

Palavras	Não Palavras
danimope	epominad
gadi	gladys
lexenadere	alexandre
gabile	gabriel
⋮	⋮

Num outro exemplo, poderíamos ter:

Exemplo 1.4 *Vamos estipular as seguintes regras:*

1. *vogais: a, e, i, o, u;*

2. *consoantes b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z;*

3. *palavras: junção de uma consoante com uma vogal é uma palavra;*

4. *palavras: junção de duas palavras é uma palavra;*

5. *toda palavra começa por uma vogal.*

Bem, nesse caso, as condições são contraditórias e *não* existem palavras.

As seguintes perguntas serão questões centrais de nosso texto:

1. Nosso sistema de axiomas é consistente? Os axiomas do Exemplo 1.4 não formam um sistema de axiomas consistente.

2. Nosso sistema de axiomas estabelece o modelo (no nosso caso teoria dos conjuntos) desejado?

A partir da leitura dos parágrafos anteriores, começamos a questionar se matemática é ciência ou filosofia. Bem, na prática estamos também perguntando se pessoas fazem psicologia ou biologia, filosofia ou teologia, medicina ou matemática e a resposta mais pragmática pode ser “FAZEM”. Nessa mesma linha, podemos formular, de vários pontos de vista, alguns modelos de teoria dos conjuntos.

Sem barreiras em nossos julgamentos, vamos propor a observação dos fundamentos de matemática sob vários ângulos. Vamos a essa tarefa.

Nosso propósito é, em primeiro lugar, olhar para a teoria dos conjuntos como o tijolo inicial, isto é, como formadora ou como gramática da linguagem matemática, como fundamentação para vários ramos da ciência, como computação, filosofia, lingüística, ensino de matemática.

Vamos discutir os paradoxos de Russel (1902), e de Euclides.

Vamos nos colocar mais formalmente nesse exemplo e discorrer sobre como “definir bem conjuntos”. Bem ilustrativos nesse caso são os contra-exemplos. Neste caso, de certa forma começamos com exemplos de como em não bem definir conjuntos.

Exemplo 1.5 *A lista de todas listas que jamais seriam listadas. Existe uma lista para tudo: suas compras da semana, suas roupas, aquilo que você levaria em uma viagem para o Alasca ou para Salvador. Se existe uma lista para tudo, existe uma lista para as coisas que não podem ser listadas. De fato, um conjunto universo – um conjunto de todos os possíveis conjuntos – implicaria na existência de todos seus possíveis subconjuntos, daí qualquer conjunto possível, em nosso caso específico, o conjunto de todas as listas que não podem ser listadas existiria. Pois bem, neste caso, a lista das coisas que não pode listada estaria nesta lista?*

Exemplo 1.6 *Considere dois “tipos” de conjuntos:*

- *o conjunto das idéias abstratas é uma idéia abstrata,*
- *o conjunto dos homens não é um homem,*
- *o conjunto de todos os conjuntos é um conjunto*

Veremos que a contradição. Provaremos que o conjunto de todos os conjuntos não existe.

Represente por M o conjunto de todos os conjuntos que pertencem a si mesmos, como no caso o conjunto das idéias abstratas, e por N , o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, como por exemplo, o conjunto dos homens não pertence ao conjunto dos homens. Agora, pense bem, N pertence a N ? Se N pertence a N , então é verdade que N não pertence a N . Logo, N pertence a M , o que novamente, é uma contradição.

Exemplo 1.7 *Considere o seguinte conjunto: $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{não mais do que 30 palavras da língua portuguesa são suficientes para definir } n\}$.*

Pois bem, estamos agora com dois problemas: Não é grave que esse conjunto, chamemo-lo de S , seja $\mathbb{N}$, mas não é um exercício fácil, ou sequer possível de ser resolvido, mostrar essa coincidência. Se $S \neq \mathbb{N}$, então podemos considerar o número natural p , definido como:

Def p p é o primeiro número natural que não pertence a S .

*Se sim, p pode ser definido em menos do que 30 palavras? Veja Def p acima, que usa **menos** do que 30 palavras para definir p !*

Exemplos dessa natureza ilustram a necessidade do uso de linguagem formal.

Até agora temos vários conceitos a discutir e algumas perguntas que, acreditamos, devem ter deixado o leitor curioso. Um bom método para obter alguma respostas é organizar nossas perguntas.

Vejamos:

Q1 Como definir precisamente um conjunto?

Q2 Como definir um número natural?

Q3 Como definir o conjunto de todos números naturais?

Q4 Como definir alguns conjuntos infinitos?

Façamos uma analogia:

Exemplo 1.8 *Ana visita a cidade de Zwrtztkrz, no leste Europeu. Ela deseja tomar uma condução que a leve do seu hotel a determinado museu bem perto do hotel. Ana tem a sua disposição quatro guias turísticos e pergunta a cada um deles qual é o melhor modo de chegar ao museu. As respostas de cada guia são*

1. “vá a nado”;
2. “ande até o museu”;
3. “tome o ônibus 61C. Um ônibus é facilmente reconhecível por ser um veículo automotor com uma a duas portas, situadas do lado oposto ao motorista. Esse, por sua vez, é facilmente reconhecível por usar um kepe azul. A propósito, o que é um kepe...” Ana, preocupada que a paciência do leitor se acabe, dirige-se ao guia número quatro;
4. “tome o ônibus 61C. Desça no terceiro ponto. À sua direita, você verá um sinal escrito ‘Metrô’. Ande até o sinal, vire para a direita e olhe a placa indicando **Museu**”.

Analisando a proposta 1, vemos que ela é contraditória. Possivelmente não existe caminho por água até o museu e, se existir, Ana não desejaria nadar até o museu. Você desejaria?

A resposta 2 é correta, mas faltam informações para Ana fazer seu caminho.

A resposta 3 tem muito mais informações do que Ana precisa. A melhor escolha seria a resposta 4.

Façamos uma teoria dos conjuntos nos moldes do item 4: Sem contradições, sem omitir informações, sem colocar muitas informações que não serão usadas.

Começamos definindo quesitos mínimos de existência de conjuntos. Faremos uma crítica ao que seria *um conjunto infinito*, introduzindo daí o conceito de número natural. Vamos discutir essas duas idéias em nossa introdução ao curso.

Objetivamos justificar a definição ingênua abaixo. Vamos colocar formalismos e justificar nossas operações com conjuntos.

Um conjunto será uma coleção de objetos bem definido por satisfazer certos axiomas. Cada um desses objetos é chamado de *elemento* do conjunto. Conjuntos estarão listados com seus elementos entre parêntesis, por exemplo:

Def 11 P é o conjunto dos 11 primeiros múltiplos naturais de 3.

Neste caso P é o conjunto $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\}$. Dado um conjunto, existe uma relação, $\in$ entre os elementos do conjunto e o conjunto. Denotaremos $p \in P$ essa relação, que é lida como p *pertence a* P .

1.3 Um Guia Rápido Para Andar Nesta Floresta

Neste capítulo tratamos de uma introdução deveras ingênua a lógica de *primeira ordem*, abreviada, neste texto, *f.o.l.*. Lógica de Primeira Ordem é o apoio a *quase* tudo aquilo que escrevemos na matemática de nosso dia-a-dia¹. O leitor que já tem alguma base em matemática deverá omitir a leitura desse capítulo sem perda de pré-requisitos para a compreensão do texto.

Iremos introduzir, por meio de exemplos, o uso de sentenças *tautológicas* (sentenças de valor verdade sempre igual a *Verdadeiro*). O leitor será apresentado, de uma maneira bem informal aos *conectivos* (sinais que ligam duas sentenças ou modificam o valor de uma sentença) $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$.

A leitura dese capítulo cobre a linguagem usada em um primeiro ano de graduação em ciências exatas.

Usaremos os símbolos a seguir, interpretados em sua expressão correspondente em português

$\forall$ Para todo;

$\exists$ Existe;

$\neg$ Não;

$\wedge$ E;

¹Veja Capítulo 6, sobre lógicas não clássicas para ver o que existem mais coisas além de f.o.l.

$\vee$ Ou;

$\rightarrow$ Implica (Se —, então —);

$\leftrightarrow$ Se e somente se, abreviado como *see*.

Os símbolos acima terão as seguintes *interpretações*:

Conectivo E: Se sabemos que duas sentenças A e B são ambas verdadeiras. Então $A \wedge B$ será verdadeira.

Exemplo: **Pedro é brasileiro** é uma sentença verdadeira. **Pablo é espanhol** é uma sentença verdadeira. Deste modo, **Pedro é brasileiro $\wedge$ Pablo é espanhol** é uma sentença verdadeira.

Caso contrário, *pelo menos uma* das sentenças é falsa, então a sentença é falsa.

Deste modo, se **Pablo é espanhol** é uma sentença falsa, então **Pedro é brasileiro $\wedge$ Pablo é espanhol** é uma sentença falsa, independentemente do valor (falso ou verdadeiro) de **Pedro é brasileiro**.

Conectivo OU: Tem valor *falso* se ambas sentenças forem falsas.

Exemplo: Se ambos **Pedro é brasileiro** é e **Pablo é espanhol** são sentenças falsas, então **Pedro é brasileiro $\vee$ Pablo é espanhol** é uma sentença falsa.

Caso contrário, *pelo menos uma* das sentenças é verdadeira, então a *disjunção* das sentenças é verdadeira.

Desse modo, se **Pablo é espanhol** é uma sentença verdadeira, então **Pedro é brasileiro $\vee$ Pablo é espanhol** é verdadeira, não importa qual é o valor (falso ou verdadeiro) da sentença **Pedro é brasileiro**.

Na linguagem coloquial, o conectivo **OU** tem uma conotação de exclusão, que não tem na matemática. Dizemos : vou ao cinema **OU** ao supermercado, do ponto de vista da matemática, a frase também é verdadeira se formos a ambos .

Conectivo Não: Modifica o valor de uma sentença.

Por exemplo, se (**Pedro é brasileiro**) é uma sentença verdadeira. Então, **Não (Pedro é brasileiro)** é uma sentença falsa.

Por outro lado, se (**Pedro é brasileiro**) é uma sentença falsa. Na verdade, (**Pedro é francês**), então, **Não (Pedro é brasileiro)** é uma sentença verdadeira.

Conectivo Implica: Este conectivo tem a seguinte interpretação:

- Se a sentença A é falsa, então $A \rightarrow B$ será verdadeira, independentemente do valor, falso ou verdadeiro, de B . Se A é verdadeira, $A \rightarrow B$ será verdadeira se e somente se B for verdadeira. A interpretação² do conectivo *implica* causa alguma polemica nas salas de aula com alunos de primeiro ano. Mas, vejamos algo:

Exemplo: **Pedro é brasileiro** é uma sentença falsa. Não importa se **Pablo é espanhol** é uma sentença verdadeira ou falsa,

– **Pedro é brasileiro $\rightarrow$ Pablo é espanhol.**

é uma sentença verdadeira, pois nós não estamos julgando nossa premissa A , mas $A \rightarrow B$ como um todo e, de uma premissa falsa, inferir qualquer sentença B é, de fato, muito plausível. Dai para A falsa, $A \rightarrow B$ sempre será verdadeira.

- Se A é verdadeira, então $A \rightarrow B$ será falsa se e somente se B for falsa.

– **Ouro é um metal $\rightarrow$ Pavão é um mamífero.**

É uma sentença falsa. A partir de uma sentença verdadeira *não se pode* inferir algo falso.

É importante notar que o conectivo $\rightarrow$ julga *toda* a sentença e não a sua premissa ou a sua consequência. Esse conectivo sequer dá um valor ao contexto dessa conexão. Por exemplo

– **Em São Paulo, SP, Brasil, há uma rua chamada Direita $\rightarrow$ Galinhas são aves.**

As duas sentenças são verdadeiras. Sua conexão via *implica* é verdadeira. Não importa o fato de eventualmente não haver, como no nosso exemplo, conexão entre as sentenças. Uma outra interpretação poderá dar o julgamento falso, visto que o conectivo $\rightarrow$ julga algo sobre ruas, não sobre aves. Mas esse tipo de interpretação não pertence ao campo da f.o.l. clássica.

²Vamos decidir se uma sentença é verdadeira ou não.

- Em São Paulo, Brasil, nenhuma rua tem nome $\rightarrow$ Galinhas são aves.

A primeira das sentenças é falsa. O que for inferido a partir de uma sentença falsa torna *toda* a sentença $A \rightarrow B$ verdadeira.

Símbolo Para Todo: Uma sentença do tipo $\forall xA(x)$ tem a seguinte interpretação, ingênua, sem formalismos: Ao se substituir x por **todo valor possível** a torna a sentença verdadeira, então $\forall xA(x)$ é verdadeira. Senão $\forall xA(x)$ é falsa.

Exemplos:

$$\forall xFotossíntese(x)$$

Ora, se nossa substituição for feita usando um compêndio de botânica que trata de árvores, teremos,

$$Fotossíntese(Ype) \quad Fotossíntese(Jacaranda) \quad Fotossíntese(Mogno) \quad \dots$$

Toda substituição pelo nome de uma árvore fará com que verifiquemos que essa árvore faz fotossíntese. Ora, nesse caso $\forall xFotossíntese(x)$ é verdadeira.

Vejamos esse exemplo:

$$\forall x(Ave(x) \rightarrow Voa(x))$$

Nosso exemplo admite substituição usando um livro de ornitologia canadense. Toda substituição de x por uma ave canadense, resulta que essa ave voa. A sentença é verdadeira. Agora vamos usar um guia de ornitologia brasileiro:

$Ave(tiriba) \rightarrow Voa(tiriba)$	<i>Verdadeiro</i>
$Ave(tucano) \rightarrow Voa(tucano)$	<i>Verdadeiro</i>
$Ave(urubu - rei) \rightarrow Voa(urubu - rei)$	<i>Verdadeiro</i>
$Ave(carará) \rightarrow Voa(carará)$	<i>Verdadeiro</i>
$Ave(ema) \rightarrow Voa(ema)$	<i>Falso</i>

Apesar de termos muito exemplos positivos, uma substituição de x por *ema* resultou falso. Nesse contexto, $\forall x(Ave(x) \rightarrow Voa(x))$ é falso. Em

conclusão, $\forall x A(x)$ é falso se em pelo menos uma substituição de x por um valor a resultar falso.

Símbolo Existe: Uma sentença do tipo $\exists x A(x)$ tem a seguinte interpretação: Se substituirmos x por **algum valor possível** a torna a sentença verdadeira, então $\exists x A(x)$ é verdadeira. Senão $\exists x A(x)$ é falsa.

Exemplos:

$$\exists x \neg \text{Fotossíntese}(x)$$

Ora, se nossa substituição for feita usando um compêndio de botânica que trata de vegetais em geral, teremos,

Fotossíntese(Musgo) Fotossíntese(Jacaranda) Fotossíntese(Mogno)
Fotossíntese(Bambu) Fotossíntese(Ype) Fotossíntese(cogumelo) ...

Uma substituição pelo nome de um vegetal fará com que verifiquemos que esse vegetal, cogumelo, *não* faz fotossíntese. Dai, $\exists x A(x)$ é verdadeira.

O leitor certamente irá discutir e, em muitos casos, contestar as interpretações de f.o.l., tentando fazer suas próprias interpretações usando os símbolos da f.o.l.. Uma boa tentativa, já em voga no campo da matemática há certo tempo e um campo vasto para pesquisa científica é trazer interpretações mais próximas da linguagem natural. Principalmente tratando-se do conectivo $\rightarrow$. Vamos, primeiramente discutir valorações de uma forma sintética, fazendo o uso de um número mínimo de conectivos e símbolos e fazendo com que os demais conectivos e símbolos possam ser *derivados*, isto é, possam ser deduzidos a partir desse conjunto mínimo. A partir daí, vamos discutir outras interpretações *não clássicas* pra os símbolos de f.o.l..

Exemplo 1.9 *A seguinte sentença é falsa:*

- *Ana ou Benê usam óculos.*

Ora, essa frase, sendo falsa, nos leva ao seguinte cenário:

1. *Não é esperado que Ana esteja com óculos e Benê sem óculos;*
2. *Não é esperado que Benê esteja com óculos e Ana sem óculos;*

3. Não é esperado que Ana e Benê estejam com óculos;

4. Pode ser que Ana e Benê estejam ambos sem óculos.

A frase 4 é verdadeira e pode ser representada por:

$$(\neg O(A) \wedge \neg O(B))$$

lida como não óculos em Ana e não óculos em Benê, negação de

$$O(A) \vee O(B)$$

a sentença original.

Em outras palavras

$$\neg(\neg O(A) \wedge \neg O(B)) \leftrightarrow (O(A) \vee O(B))$$

Vamos usar, motivados pelo exemplo acima,

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Da mesma forma, observe que $A \rightarrow B$ é verdadeira se A e B são verdadeiras ou se A é falsa, o que é equivalente a interpretação de $\neg A \vee B$, que é, do mesmo modo verdadeira se A e B são verdadeiras ou se A é falsa. Temos, então

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Dos exemplos do uso dos símbolos $\forall$ e $\exists$, vemos que

$$\neg \forall \neg A \equiv \exists A$$

Desta forma, temos, por exemplo

- Não é verdade que todo homem é careca. Equivalentemente, Existe pelo menos um homem que tem cabelos.
- Não é verdade que existe vida em outros planetas. Equivalentemente, Para todo planeta (que não a Terra), esse planeta não possui vida.

1.4 Indutivo? Como?????

Isso deverá “morar” no cap 1:

O que a gente entende por construir algo recursivamente? Essa fronteira deve ficar clara aqui. Vamos dar ao leitor o sabor de diferencial a parte *intuicionista* da matemática da parte puramente sintática, encontrada, por exemplo em “*Set Theoretic Topology*. Não iremos nos aprofundar, mas queremos deixar clara as linhas de fronteira de cada lado.

Vamos colocar a nossa matemática construtível em uma aparência mais clara.

Aqui a gente realoca alfabeto e fórmulas e o Blá todo do cap 1.

Definição 1.10 *Indutivo, etc*

Exemplos de linguagens contruídas recursivamente:

Exemplo 1.11 *Alfabeto: as funções básicas*

$$1, x, \sin x, \exp(x)$$

Conectivos unários

inversa,

Conectivos binários

$$+, \times, \div, \circ$$

Funções elementares:

1. *Todas as funções básicas são funções elementares;*
2. *Se f e g são funções elementares, então $f + g$, $f \times g$, $f \div g$ e $f \circ g$ são funções elementares;*
3. *Se f é função elementar então $\text{inversa}(f)$ é função elementar.*

Desse modo, já que 1 , $\sin x$ e $\exp(x)$, são funções elementares, então, por exemplo

$$1 + \sin x, 1 + \exp(x), \sin x + \exp(x), 1 \times \sin x, 1 \times \exp(x), \sin x \times \exp(x)$$

são funções elementares. E, recursivamente,

$$(1 + \sin x) + \exp(x), (1 + \sin x) \times \exp(x), \exp(1 + \sin x), \exp(\sin x \times \exp(x))$$

Definimos a função $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

Enfim, nós aumentamos a complexidade das funções que escrevemos, recursivamente construindo novas funções a partir das funções anteriores com o uso dos conectivos unário e binários.

Essas funções estão são apenas as sentenças que recursivamente construímos. Dentro, por exemplo, do contexto *Análise Real*, damos o contexto de associar a cada número real x um valor $f(x)$ e nos preocupamos com domínio de função. Por exemplo, $\frac{1}{x}$ é uma função elementar definida em todos reais excepto o 0.

Ora, podemos definir *derivadas* de modo igualmente indutivo, sobre a complexidade de construção de uma função. Abstraímos a noção geométrica de derivada, que se originou do limite

$$f'(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definimos derivada recursivamente como

Definição 1.12 *Funções básicas:*

- $1' = 0$;
- $x = 1'$;
- $\sin x' = \cos x$;
- $\exp(x)' = \exp(x)$.

Conectivos unários

- $\text{inversa}(f(x))' = \frac{1}{f'(\text{inversa}(f(x)))}$.

Conectivos binários

- $(f + g)' = (f' + g')$;
- $(f \times g)' = (f' \times g) + (f \times g')$;

- $(f \div g)' = \frac{(f' \times g) - (f \times g')}{g^2};$
- $(f \circ g)' = f'(g) \times g'.$

Desse modo, a função x^n , definida, recursivamente como

- $x^0 = 1;$
- $x^{n+1} = x \times x^n = x^n \times x.$

Tem a sua derivada dada por

- $(x^0)' = 1' = 0;$
- $(x^{n+1})' = (x \times x^n)' = (x' \times x^n) + (x \times (x^n)').$

1.5 Exercícios

Exercício 1.13 *Escreva de modo equivalente:*

1. *Não é verdade que você anda ou de moto ou de bicicleta.*
2. *Não é verdade que Ana canta e dança.*
3. *Não é verdade que toda cobra tem peçonha.*
4. *Não é verdade que todo homem mente.*
5. *Não é verdade que existem elefantes rosa-choque.*
6. *Não é verdade que existem ladrões em Nova Iorque.*

Capítulo 2

Axiomas Básicos de Teoria dos Conjuntos

Por que Axiomas Básicos? Porque estes axiomas, em si já justificam matemática finitista, intuicionista, construtivista - a Matemática que se preocupa em gerar, por meio de um algoritmo, uma resposta e se preocupa em analisar a *Complexidade* ao se calcular essa resposta. Isso é um bocado de coisa! Senão, vejamos: Estamos falando do que pode ser medido, calculado, computado. Estamos falando sobre problemas de decisão.

Teoria dos conjuntos *não* encerram todo o código matemático e, surpreendentemente, um pedaço de teoria dos conjuntos, que é a base para a justificativa dos conjuntos hereditariamente finitos, são o objeto de toda a matemática concreta, que envolve provar, decidir, construir um algoritmo ou codificar provas.

A partir da leitura das páginas que antecederam, percebemos que devemos nos calcar em bases sólidas de linguagem, senão nosso objeto de estudos fica ou muito banal (falamos de uma linguagem trivial, daí não temos modelos interessantes ou úteis) ou falamos de algo inconsistente e não temos *nada de útil* pra falar. Deste modo, primeiramente, precisaremos de alguns *postulados* básicos para a existência de conjuntos, caso contrário estaremos lidando com definição contraditórias. Devemos procurar *consistência*, i.e., não derivar, não provar, uma contradição. Deste modo, essa teoria pode ser proposta como ferramenta para modelagem de problemas que envolvam

matemática.

Vamos introduzir, discutir e analisar o sistema de axiomas de *Zermelo–Frankel*, **ZFC**. A partir desses postulados, vamos descrever um *Modelo Canônico da Teoria dos Conjuntos*.

Procuramos agora postulados consistentes para definir conjuntos.

A abordagem axiomática de **ZFC** vai justificar a abordagem ingênua que temos a partir de nosso conhecimento de ensino médio. A linguagem formal que vamos introduzir aqui usará como partículas atômicas o sinal pertence, $\in$, que é uma relação binária, e um átomo inicial, o conjunto vazio, denotado $\emptyset$. Vamos, recursivamente, nesse estágio construir conjuntos e dar valor *Falso* ou *Verdade* a sentenças $x \in y$, para conjuntos x e y .

Um dos axiomas de existência que deve estabelecer a existência de um conjunto *inicial*. Este conjunto, o conjunto vazio, será o mínimo necessário, já que todos os conjuntos serão obtidos a partir de operações válidas (i.e., usando os axiomas de **ZFC**), onde o conjunto vazio é o “tijolo inicial”.

2.1 Axiomas e um Modelo

Vamos enunciar os três primeiros axiomas básicos e, a partir dele, fazer o nosso modelo (semântico da Teoria dos Conjuntos).

Axioma 2.1 (Existência do Conjunto Vazio) *Existe um conjunto, denotado por $\emptyset$ e chamado de vazio, que não possui elementos.*

$$\exists \emptyset \forall x \neg(x \in \emptyset)$$

Axioma 2.2 (Formação de Pares) *Para todo x e y , existe z tal que $x \in z$ e $y \in z$. Em símbolos,*

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

Axioma 2.3 (Extensionalidade) *Se A e B são dois conjuntos tais que $x \in A$ se e somente se $x \in B$, então $A = B$.*

Queremos um modelo matemático em conformidade com os axiomas acima. Assuma um ente Φ . Vamos, então dar um modelo para o axioma

da existência do vazio criando um ente Φ e a correspondência (a valoração) que manda o $\emptyset$, que pertence a parte de sintaxe de teoria dos conjuntos ao elemento Φ , que pertence a parte semântica de teoria dos conjuntos. Mais ainda, criamos a relação binária:

- Se x é um conjunto, a sentença $x \in \Phi$ recebe sempre o valor **Falso**.

Ora, nosso modelo consiste apenas de um conjunto, o vazio, Φ e apenas uma sentença relacional $\Phi \in \Phi$, cujo valor é **Falso**.

Nosso modelo não pode ser limitada a uma só palavra. Vamos usar os Axiomas de Extensionalidade e pares para justificar a construção a seguir:

A formação de pares, em nosso modelo é dada por

Definição 2.4 *Se x e y são conjuntos, então $\{x, y\}$ é um conjunto e vale*

$$x \in \{x, y\} = \text{Verdade} \quad y \in \{x, y\} = \text{Verdade}$$

Escrevemos o par formado pelo vazio, Φ como $\{\Phi, \Phi\}$ e temos a propriedade de que $\Phi \in \{\Phi, \Phi\}$. Usaremos a abreviatura

$$\{\Phi, \Phi\} \equiv \{\Phi\}$$

em geral,

Notação 2.5 *Dado um conjunto x no modelo, o conjunto correspondente ao par formado por x , $\{x, x\}$ em nosso modelo é denotado por $\{x\}$.*

O *Axioma da Extensionalidade* a ser definido para o nosso modelo de *Teoria dos Conjuntos* nos permitirá definir a relação binária de *Igualdade* em nossos modelos. O leitor, que está aprendendo fundamentos decerto está questionando o porque da igualdade não ser um conceito óbvio, primitivo. Vejamos um exemplo para ilustrar a idéia de igualdade.

Exemplo 2.6 *O exemplo mais algbico de igualdade da Gladys cabe aqui!*

A noção de igualdade *precisa ser bem definida*. Isto é, queremos que todos sejam bem informados, e com o uso de regras claras, o que entendemos por igual. Igual é ter o mesmo nome? A mesma altura? Ter nascido na mesma cidade?

Um critério claro para a relação de igualdade deve ser estabelecido e deve satisfazer

Definição 2.7 *Propriedades de equivalência:*

- $x = x$ (*reflexividade*);
- $x = y$ implica $y = x$ (*simetria*);
- $x = y$ e $y = z$ implica $x = z$ (*transitividade*).

Usando o jargão matemático, igualdade é uma *relação de equivalência*.

Definição 2.8 *Dados dois conjuntos A e B , diremos que A é igual a B , denotamos $A = B$ se todo elemento t de A também pertence a B e vice-versa. Em outras palavras,*

$$A = B \equiv (t \in A \leftrightarrow t \in B)$$

Analogamente a noção de igualdade, outra noção derivada da relação de pertinência é a relação (binária) de subconjunto:

Definição 2.9 *Dados dois conjuntos A e B , diremos que A é subconjunto de B , denotamos $A \subseteq B$ se todo elemento t de A também pertence a B . Em outras palavras,*

$$A \subseteq B \equiv (t \in A \rightarrow t \in B)$$

Voltemos ao conjunto dado pela formação de pares, $\{x\} = \{x, x\}$. Esse conjunto possui a propriedade que x é o único elemento de $\{x\}$. Isto é, a sentença

$$x \in \{x\}$$

é **Verdade** e qualquer outra sentença

$$z \in \{x\}$$

Para $x \neq z$ é **Falsa**.

Então, o conjunto denotado por $\{\Phi\}$ pertence a nosso modelo, é o conjunto tal que $\Phi \in \{\Phi\}$,

Usando pares, dados dois conjuntos x e y , temos os conjuntos $\{x, y\}$ e $\{y, x\}$. É útil notar que

Lema 2.10 *Dados dois conjuntos x e y , então $\{x, y\} = \{y, x\}$.*

Prova: Por propriedade de pares, temos que $x \in \{x, y\}$ e $y \in \{x, y\}$. Pela mesma propriedade aplicada a $\{y, x\}$, temos $x \in \{y, x\}$ e $y \in \{y, x\}$.

Usando a definição de igualdade, temos que $\{x, y\} = \{y, x\}$. ■

Na verdade, estabelecemos como nossos tijolos de construção um sistema de regras consistente, os axiomas, ou postulados, de uma teoria e, a partir desse conjunto de regras, e só usando essas regras, obtemos nossos modelos.

Note que apresentamos também, o símbolo $\in$, de natureza *relacional*, estabelecendo a verdade da frase: Se x é um conjunto, então *não* é verdade que $x \in \emptyset$.

Estamos, a medida que formamos as regras (recursivas, no momento) para construir conjuntos, na verdade decidindo pelo valor **Falso** ou **Verdade** para uma relação binária $\in$ entre conjuntos, definida a medida que enunciamos os axiomas de teoria dos conjuntos. Podemos até com o uso de uns poucos axiomas fazer uma teoria dos conjuntos recursiva (algo que pode ser descrito em um algoritmo) onde vamos, recursivamente¹ consruir nosso modelo. Os demais conceitos aos quais o leitor está acostumado e, muitas vezes “guarda no baú” dos *conceitos primitivos*, quer seja: subconjunto e contém serão derivados (definidos a partir) da relação de pertinência.

Trataremos da decisão pelo valor $\top$, para verdadeiro, ou $\perp$, falso, para sentenças da forma

$$x \in y \text{ ou } \neg(x \in y)$$

para x e y conjuntos em função da complexidade da formação dos conjuntos x e y .

Temos, para nosso modelo de teoria dos conjuntos e para modelos matemáticos em geral, que se a sentença $P(a)$ é **Falsa**, então sua negação $\neg P(a)$ é **Verdade**. Temos que $P(a)$ e $\neg\neg P(a)$ são equivalentes.

Elementos de conjunto são conjuntos e as relações $\subseteq$ de subconjunto e $=$, de igualdade, são noções derivadas da relação binária $\in$.

No momento, só com nossos axiomas, já podemos ver que os conjuntos foram (até o momento) recursivamente construídos:

¹A palavra *INDUTIVAMENTE* deverá ser bem explicada no CAP 1. Aqui, coloco o que entendo por indutivo num apêndice, a ser anexado no CAP 1

24CAPÍTULO 2. AXIOMAS BÁSICOS DE TEORIA DOS CONJUNTOS

- Existe um conjunto: O conjunto vazio é um átomo de nossa teoria e sua valoração em nosso modelo fez com que, pelo menos, o conjunto Φ pertença a esse modelo e a propriedade de que algum conjunto pertence ao Φ é falsa;
- Recursivamente, defina, se x e y são conjuntos em nosso **modelo**, então $\{x, y\}$ é um conjunto, $x \in \{x, y\}$ e $y \in \{x, y\}$.

Mais conjuntos poderão ser recursivamente construídos: Temos, por exemplo, os conjuntos

- Φ . Decorre do axioma de existência;
- $\{\Phi\}$. Decorre do fato que Φ é um conjunto. Dai, pela formação de pares, $\{\Phi, \Phi\}$ é um conjunto. Mais ainda, $\Phi \in \{\Phi, \Phi\} = \{\Phi\}$.
Em conclusão, $\{\Phi\}$ é um conjunto e $\Phi \in \{\Phi\}$.

- Φ e $\{\Phi\}$ são conjuntos. dai, usando pares e identidade, temos que
 - $\{\{\Phi\}, \{\Phi\}\}$ é um conjunto e $\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}, \{\Phi\}\} = \{\{\Phi\}\}$.
 - $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ é um conjunto, $\Phi \in \{\Phi, \{\Phi\}\}$ e $\{\Phi\} \in \{\Phi, \{\Phi\}\}$.

Vamos continuar a brincadeira de armar feita acima. Já temos no nosso modelo os conjuntos

$$\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}$$

e as propriedades:

Φ	para todo conjunto x , $x \in \Phi = \text{Falso}$
$\{\Phi\}$	$\Phi \in \{\Phi\} = \text{Verdade}$
$\{\{\Phi\}\}$	$\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}\} = \text{Verdade}$
$\{\Phi, \{\Phi\}\}$	$\Phi \in \{\Phi, \{\Phi\}\} = \text{Verdade}$, $\{\Phi\} \in \{\Phi, \{\Phi\}\} = \text{Verdade}$

Note que a relação de pertinência foi deduzida como verdadeira ou falsa a partir de nossa construção de novos conjuntos usando *Pares*. Usando pares nos quatro conjuntos acima, poderíamos formar $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$ conjuntos. Para não repetir conjuntos anteriores e fazer uso do Lemma 2.10,

Os conjuntos, dados pela construção de *Pares* em nosso modelo, usando o Φ , $\{\Phi\}$, $\{\{\Phi\}\}$, $\{\Phi, \{\Phi\}\}$, são

$\{\{\{\Phi\}\}\}$	$\{\{\Phi\}\} \in \{\{\{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$
$\{\{\Phi, \{\Phi\}\}\}$	$\{\Phi, \{\Phi\}\} \in \{\{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$
$\{\Phi, \{\{\Phi\}\}\}$	$\Phi \in \{\Phi, \{\{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$ $\{\{\Phi\}\} \in \{\Phi, \{\{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$
$\{\{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}\}$	$\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$ $\{\{\Phi\}\} \in \{\{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$
$\{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$	$\Phi \in \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$ $\{\Phi, \{\Phi\}\} \in \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$
$\{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$	$\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$ $\{\Phi, \{\Phi\}\} \in \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$
$\{\{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$	$\{\{\Phi\}\} \in \{\{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$ $\{\Phi, \{\Phi\}\} \in \{\{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$

Podemos também decidir, sentenças tais como

$$\{\Phi\} \in \{\{\{\Phi\}\}\} = \text{Falso}$$

Em verdade, o conjunto $\{\{\{\Phi\}\}\}$ foi formado por pares a partir do $\{\{\Phi\}\}$. Temos que a sentença $\{\{\Phi\}\} \in \{\{\{\Phi\}\}\} = \text{Verdade}$.

Veja mais sobre pertinência nos Exercícios.

Agora o leitor tem conhecimento para criticar os conceitos mais “primitivos” sobre fundamentos:

Folclore 2.11 *Não confunda conjunto com elemento de conjunto. Pertence é uma relação entre conjuntos e seus elementos.*

Cabe aqui uma pequena digressão sobre o Folclore 2.11. Teremos, se aceitarmos o enunciado acima, que definir **elemento do conjunto**. Então nossa tarefa é dividida em duas “missões”: Definir conjunto e elemento do conjunto.

Mais ainda, teremos que distinguir conjunto e seus elementos. Ora, vimos que, com o uso de apenas três axiomas, “conjunto” e uma relação

binária de pertinência foi bem definida. Os demais conceitos são derivados e não foi necessário nada mais do que esse três axiomas, daí porque carregar mais a notação? Não há necessidade de se carregar mais ainda a teoria, quando já temos algo que funciona da mesma forma.

O bom de definir-se "conjunto" e a relação "pertence" é que elemento de conjunto também é conjunto e o conceito de subconjunto será um conceito derivado.

Por outro lado, uma axiomatização de teoria dos conjuntos que parte da idéia de elemento de conjunto necessitaria também de uma relação pertence definida entre um conjunto e um elemento de um conjunto. Nossa "teoria" já está ficando muito "larga e pesada" para carregarmos via uma escrita legível esses dois "conceitos", elemento de conjunto e conjunto.

Nossa justificativa para as "noções primitivas" de conjuntos, elementos de conjuntos, subconjuntos e pertinência já está bem fundada. De fato, formamos os conjuntos $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$. Ora, se formamos conjuntos $x_1, x_2, x_3, \dots$ já temos justificadas as sentenças:

- $\{x_1\}$ é um conjunto e $x_1 \in \{x_1\}$. Na verdade x_1 é o único elemento de $\{x_1\}$;
- $\{\{x_1\}\}$ é um conjunto e $\{x_1\} \in \{\{x_1\}\}$. Não é verdade que x_1 é o elemento de $\{\{x_1\}\}$. O conjunto $\{\{x_1\}\}$ foi formado usando Pares e Extensionalidade:
 - Por Pares, $\{\{x_1\}, \{x_1\}\}$ é um conjunto e $\{x_1\} \in \{\{x_1\}, \{x_1\}\}$;
 - Por Definição, $\{\{x_1\}, \{x_1\}\} = \{\{x_1\}\}$.
- Se $\{x_1, x_2\}$ e $\{x_2, x_3\}$ são conjuntos, então

$$\begin{aligned} x_1 &\in \{x_1, x_2\}, \quad x_2 \in \{x_1, x_2\}, \quad , \\ \{x_2, x_3\} &\in \{\{x_1, x_2\}, x_3\} \end{aligned}$$

Os elementos de $\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$ são $\{x_1, x_2\}$ e $\{x_2, x_3\}$.

Observe que ainda *não* podemos justificar que $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ seja um conjunto. É necessário um axioma para justificar a existência de um conjunto infinito.

Já podemos construir muitos conjuntos, mas não justificamos *todos* os fundamentos da matemática. Vamos acrescentar (e analisar) os seguintes axiomas:

Axioma 2.12 (União) *Para todo conjunto S , existe um conjunto X tal que $x \in X$ se e somente se existe $A \in S$ e $x \in A$. Em símbolos,*

$$\forall S \exists X \forall A \forall x (x \in A \wedge A \in S \leftrightarrow x \in X)$$

Em nosso modelo, esse axioma resulta na regra para formação de conjuntos dada abaixo:

Definição 2.13 *Dados os conjuntos S , A e x , existe um conjunto X tal que se*

1. *A relação $x \in A$ é **Verdade**;*
2. *A relação $A \in S$ é **Verdade**;*

*então a relação $x \in X$ é **Verdade**. Mais ainda, a relação de pertinência resulta **Falsa** para qualquer outro conjunto y fora das condições dadas acima.*

Nesse ponto, justificadas as formações de conjuntos por pares e união e dada a relação de igualdade, usaremos a seguinte notação:

Notação 2.14 *Se X é um conjunto tal que para os conjuntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ a relação*

$$x_1 \in X = \text{Verdade}, x_2 \in X = \text{Verdade}, \dots, x_n \in X = \text{Verdade}$$

e para todo conjunto y diferente dos $x_1, x_2, \dots, x_n$ a relação

$$y \in X = \text{Falso}$$

denotamos X por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Vamos escrever como fica a união em alguns dos conjuntos que formamos:

Φ	Nada a fazer. Não existem elementos em Φ
$\{\emptyset\}$	Nada a fazer. $\emptyset \in \{\emptyset\}$, mas $\emptyset$ não tem elementos

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ pertencem a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\emptyset \in \{\emptyset\}$. A união de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é, portanto $\{\emptyset\}$.
$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset\}$ é o único elemento de $\{\{\emptyset\}\}$. $\emptyset$ é o único elemento de $\{\emptyset\}$. A união de $\{\{\emptyset\}\}$ é, portanto $\{\emptyset\}$.
$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	Temos que $\emptyset$ não tem elementos. Os elementos de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ são $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$. Desse modo, a união do conjunto dado é $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$	$\emptyset$ não tem elementos. O único elemento de $\{\{\emptyset\}\}$ é $\{\emptyset\}$. O resultado da união acima é $\{\{\emptyset\}\}$.
$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	$\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. A união do conjunto acima é $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

*Leitor muito indignado exclama: “Opa, perai!!!!!! Essa não é a operação de união que eu aprendi nos cursos elementares de matemática!!!! Devo jogar o conhecimento velho fora? Bem, na verdade, vamos derivar o conceito de união que conhecemos a partir dessa definição. A operação de união que conhecemos no nível informal será definida a partir do axioma de união. Essa operação vai coincidir com o conceito de *União* que o leitor trouxe de seus cursos básicos.*

Definição 2.15 *Dados dois conjuntos x e y a operação binária $x \cup y$ é dada pelo axioma de união sobre o par $\{x, y\}$.*

Vamos usar a Definição 2.15 para tomar a união dos conjuntos

Usando o Axioma da União, nós podemos “descascar” a estrutura de um dado conjunto e extrair os (conjuntos) *elementos* dos *elementos*. A união, como temos de nossos conceitos mais elementares de operações matemáticas deve coincidir com essa definição de formar pares e extrair elementos. De fato, dados os conjuntos x e y , por pares, formamos o conjunto $\{x, y\}$, cujos elementos são x e y . Aplicando-se o axioma da união, teremos o conjunto de todos os elementos de x e de todos elementos de y , o que coincide com a nossa definição de união.

Se a relação $t \in x$ é verdade, digamos, para $t = w_1, t = w_2, \dots, t = w_n$ e falsa ao contrário e se a relação $t \in y$ é verdade, para $t = v_1, t = v_2, \dots$,

$t = v_m$, então a relação

$$u \in x \cup y = \text{Verdade} \leftrightarrow \begin{array}{l} u = w_1 \text{ ou } u = w_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } u = w_n \text{ ou} \\ u = v_1 \text{ ou } u = v_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } u = v_m \end{array}$$

e falsa caso contrário. Usando a notação 2.14, temos que

$$x \cup y = \{w_1, w_2, \dots, w_n, v_1, v_2, v_m\}$$

Lema 2.16 *Se $x_1, x_2, \dots, x_n$, para $n \geq 1$ são conjuntos, então $w = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto e para cada $1 \leq i \leq n$, $x_i \in w$.*

Prova: Se $n = 1$, por pares $\{x_1, x_1\}$ é um conjunto e $x_1 \in \{x_1, x_1\}$. Denotamos, $\{x_1, x_1\} = \{x_1\}$, Logo $\{x_1\}$ é um conjunto com $x_1 \in \{x_1\}$.

Para $n = 2$, use axioma dos pares e forme $\{x_1, x_2\}$ com $x_1 \in \{x_1, x_2\}$ e $x_2 \in \{x_1, x_2\}$.

Temos que $\{x_1, x_2\}$ e $\{x_3\}$ são conjuntos com $x_1 \in \{x_1, x_2\}$. $x_2 \in \{x_1, x_2\}$ e $x_3 \in \{x_3\}$.

Por pares, faça $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$. Aplique a união a esse conjunto e obtenha $\{x_1, x_2, x_3\}$ com $x_i \in \{x_1, x_2, x_3\}$ para todo $1 \leq i \leq 3$.

O raciocínio se aplica indutivamente até obtermos w com $x_i \in w$ para todo $1 \leq i \leq m$. ■

Vamos “emoldurar” em uma definição a operação de construção de um número natural, Seção 3.1.

Definição 2.17 (sucessor) *Dado um conjunto x , seu sucessor é o conjunto $x \cup \{x\}$ e será denotado por $s(x)$.*

Com o axioma da união, temos a partícula $\vee$.

Ganhamos agora a partícula $\wedge$, que é derivada do $\vee$ e do $\neg$ como

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

cuja interpretação informal de seu significado é dado no Exemplo 1.9.

Já temos todos os conjuntos finitos. A partir do átomo Φ , temos conjuntos dos tipos

1. Φ é um conjunto e $x \in \Phi$ é falso para todo conjunto x ;

2. $\{\Phi\}$ é um conjunto. A sentença $x \in \{\Phi\}$ é verdade apenas para $x = \Phi$;
3. Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são conjuntos, então $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto. A sentença $y \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é verdade para $y = x_1, y = x_2, \dots, y = x_n$ apenas.

Os próximos axiomas estendem mais a noção de conjunto (finito) dado acima.

Axioma 2.18 (Conjunto Infinito) *Existe um conjunto infinito. Formalmente,*

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\mathfrak{s}(y) \in x))$$

Usaremos esse axioma para definirmos o conjuntos dos números naturais. No nosso modelo de conjuntos, temos agora o conjunto

$$\mathbb{N}_0 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

com a propriedade de $y \in \mathbb{N}_0$ é verdade para

1. $x_0 = \Phi$;
2. $x_1 = \{\Phi\}$;
3. $x_2 = \{\Phi, \{\Phi\}\}$;
4. $x_3 = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$;
5. $x_4 = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}\}$;
6. Em geral, definidos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{N}_0$, temos que

$$x_{n+1} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{N}_0$$

Axioma 2.19 (Potenciação)

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

Dado um conjunto A , existe um conjunto $\mathcal{P}(A)$ cujos elementos são todos os subconjuntos de A .

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \rightarrow z \in y)$$

Esses ainda não são todos os axiomas da teoria **ZFC**, mas esses axiomas já são suficientes para que possamos iniciar uma discussão.

Com o uso de potenciação, temos que se $x_1, x_2, x_3, \dots$ são conjuntos, então $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é um conjunto. Além disso, $x_1 \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, $x_2 \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, etc.

2.2 Digressões

O leitor deve tomar nota que:

1. O vazio $\emptyset$ é subconjuntos de qualquer conjunto;
2. O vazio *não necessariamente* pertence a um conjunto.

Para verificar a primeira afirmação, temos que

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq x \text{ see} \\ t \in \emptyset &\rightarrow t \in x \end{aligned}$$

Ora, temos que a asserção, $t \in \emptyset$ é sempre *falsa*, usando o axioma do conjunto, nenhum conjunto pertence ao $\emptyset$, donde $t \in \emptyset$ é uma afirmação falsa e, portanto, a implicação verdadeira. I.e., $t \in \emptyset \rightarrow t \in x$ é verdadeira. Portanto, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Para justificar a segunda afirmação, basta um contra-exemplo:

O conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ é formado, usando-se o axioma dos pares, por $\{\emptyset\}$ e $\{\emptyset\}$. Usando-se o axioma da identidade, $\{\emptyset\}$ é o único elemento de $\{\{\emptyset\}\}$.

2.3 Mais Axiomas

Axioma 2.20 (ACom) Axioma da Compreensão: *Se P é uma propriedade e A é um conjunto, então existe um conjunto B tal que $x \in B$ se e somente se $x \in A$ e P é verdadeira em x .*

Esse axioma requer o conhecimento preciso do que é uma propriedade. Na prática, essa noção não é univocamente definida. tente a seguinte “propriedade”

- $P \in S$ se P é um grande compositor brasileiro.

Os exemplos do uso do axioma da compreensão e uma idéia mais clara sobre o conceito de “propriedade” serão abordados no texto, a medida que introduzimos mais axiomas.

Está claro que devemos definir *propriedade*, analogamente a igualdade ou relação de pertinência usando o que temos, apenas o que temos a mão: Os axiomas de teoria dos conjuntos e nenhuma definição exótica à linguagem que estamos desenvolvendo.

Nesse caso, façamos:

Definição 2.21 (Propriedade) *Uma propriedade em um conjunto x é definida por uma fórmula bem formada com axiomas da teoria.*

*Em suma, uma propriedade é uma combinação finita de axiomas da nossa teoria e é dada por uma asserção **Verdade** ou **Falso** em nosso modelo.*

Nosso problema é a contagem de fórmulas que podemos escrever (um número enumerável delas e as possibilidades infinitas de conjuntos.

Ora, o axioma das partes e os axiomas da escolha farão o papel de assegurar a existência desses conjuntos, mas estamos na fronteira da matemática que pode ser construída e da grande matemática.

Exemplo 2.22 *Essas sentenças ilustram o uso do conceito de propriedade*

$$\begin{aligned} \{x | x \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \wedge x \neq \emptyset\} \\ \{x | x \in \{\{\{\emptyset\}\}\} \wedge x \notin \{\{\{\emptyset\}\}\}\} \end{aligned}$$

No primeiro caso, temos o conjunto $x = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ e no segundo caso $x = \emptyset$.

O *Axioma da Compreensão* nos dá liberdade de formar subconjuntos de um conjunto dado. Esses subconjuntos estão sujeitos a formulação de uma propriedade P . Eles são os subconjuntos de um conjunto A dado que

satisfazem a propriedade P . Note que isso não é a arbitrária formação de subconjuntos.

Os *Axiomas do Conjunto Infinito, Potenciação e União* serão discutidos nas construções de cardinais e ordinais.

O que falta para descrever **ZFC**? Vejamos mais axiomas a serem transformados nas regras semânticas do modelo de conjuntos.

Axioma 2.23 (Substituição) *Se $P(x, y)$ é uma propriedade tal que para todo x existe um único y onde $P(x, y)$ é verdadeira. Então para todo conjunto A , existe um conjunto B onde*

$$\forall x \in A \exists y \in B (P(x, y) = \text{Verdade})$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.24 *Dado um conjunto x , existe um único conjunto $y = \mathfrak{s}(x)$ o sucessor de x (veja a Definição de sucessor, 2.17)*

Seja A o conjunto dos pares, isto é, A é recursivamente definido como

1. $0 \in A$;
2. Se $x \in A$, então $\mathfrak{s}(x) \in A$.

O conjunto B é o conjunto dos ímpares:

1. $1 \in A$;
2. Se $x \in A$, então $\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(x)) \in A$.

Finalmente, vamos estabelecer que, de certo modo, o conjunto vazio é o nosso tijolo inicial e nada mais tem complexidade menor em construção.

Axioma 2.25 (Fundação) *Todo conjunto é bem fundado:*

$$\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists w (w \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in w)))$$

Todo conjunto x não vazio possui um elemento disjunto de x . O conjunto x possui uma partícula inicial.

Vamos entender melhor o enunciado do Axioma da Fundação. Suponha que x é o conjunto dos naturais, $\{0, 1, 2, \dots\}$. Estabelecemos que

$$0 \in 1, 0 \in 2, 1 \in 2, 0 \in 2, 1 \in 3, 2 \in 3, \dots$$

e que todo natural $j \in x$. Ora, procuramos por um conjunto w que pertença a x porém w e x não possuem elementos em comum. Esse w é o vazio.

Toda a matemática que escrevemos está calcada no axioma da fundação. Esse axioma, em outra formulação nos conta que todo conjunto foi recursivamente construído a partir dos axiomas **ZFC**. Isto é, todo conjunto tem uma partícula mínima. Vejamos: $\exists y(y \in x)$ é equivalente a dizer que x não é vazio. Nesse caso, existe um w elemento de x cuja intersecção com x é vazia.

Em resumo, não podemos fazer conjuntos sem um “tijolo” inicial.

2.4 Exercícios

Acho que se eu souber resolver isso eu já aprendi a linguagem! Por isso vou resolver exercícios e discuti-los com os colegas e com o professor.

Exercício 2.26 *De acordo com a teoria que foi aprendida, decida se são conjuntos:*

1. $\emptyset$;
2. $\{\emptyset\}$;
3. $\{\{\emptyset\}\}$;
4. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$;
5. $\dots\{\{\{\emptyset\}\}\}\dots$ (não precisa dar uma justificativa formal. Intuitivamente, decida se é conjunto);
6. $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$;
7. $\{\emptyset\}, \emptyset$;
8. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$;

9. $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\};$
10. $\{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\};$
11. $\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\};$
12. $\{\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}\};$
13. $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}.$

Exercício 2.27 *Sejam x, y, z conjuntos. Decida se é verdadeiro ou falso. Justifique*

1. $x \in \{x, y, z\};$
2. $x \subseteq \{x, y, z\};$
3. $\{x\} \in \{x, y, z\};$
4. $\{x, y\} \subseteq \{x, y, z\};$
5. $\{\{x\}\} \in \{x, y, z\};$
6. $\{z, \{x, y\}\} \subseteq \{x, y, z\}$
7. $\emptyset = \{\emptyset\};$
8. $\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\};$
9. $\{0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2\} \neq \{0, 1, 2\};$
10. $\{\{\{\emptyset\}\}$ *é um conjunto*;
11. $\{\{\{\emptyset\}\}\} \neq \{\{\emptyset\}\}.$

Para resolver os exercícios que se seguem, suponha que conjuntos são denotados por letras minúsculas, $x, y, z, \dots$

Exercício 2.28 *Sejam x, y, z conjuntos. Escreva a união de.*

1. $x, y, z;$

2. $\{x, y\}, z;$
3. $\{x, \{x\}, \{\{\{x\}\}\}, x, \{x\}, \{\{x, y\}, z\};$
4. $x, \{x\}, \{\{x, y\}, z\};$
5. $x;$
6. $\{x\};$
7. $\{\{\{x\}\}\};$
8. $\{x\}, \{\{\{x\}\}\}.$

Exercício 2.29 *Forme o sucessor e o conjunto de potência de:*

1. $x;$
2. $\{x, \{x\}\};$
3. $\{\{x\}\};$
4. $\{x, \{x, \{x\}\}\};$
5. $\{\{x, \{x, \{x\}\}\}\};$
6. $\{x, y, z\};$
7. $\{\{x\}, \{y, z\}\};$
8. $\{x, \{x\}, \{y, z\}\};$
9. $\{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\};$
10. $\{\{x, y, z\}, \{x, \{x\}, \{y, z\}\}\};$
11. $\{\{\{\{x, y, z\}, \{x, \{x\}, \{y, z\}\}\}\}\}.$

Definição 2.30 (sucessor) *Dado um conjunto x , a enézima iteração da operação sucessor é denotada por $\mathfrak{s}^n(x)$.*

Uma definição análogos para $\mathcal{P}^n(x)$.

Por exemplo, dado o conjunto x , temos:

1. $\mathfrak{s}(x) = \{x, \{x\}\};$
2. $\mathfrak{s}(x)^2 = \{\{x, \{x\}\}, \{\{x, \{x\}\}\}\}$
3. $\mathfrak{s}(x)^3 = \{\{\{x, \{x\}\}, \{\{x, \{x\}\}\}\}, \{\{\{x, \{x\}\}, \{\{x, \{x\}\}\}\}\}\}.$

Dado o conjunto $\{x, y\}$, temos

1. $\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\};$
2. $\mathcal{P}(\{x, y\})^2 =$

$$\left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \\ \{\emptyset\}, \{\{x\}\}, \{\{y\}\}, \{\{x, y\}\}, \\ \{\emptyset, \{x\}\}, \{\emptyset, \{y\}\}, \{\emptyset, \{x, y\}\}, \{\{x\}, \{y\}\}, \{\{x\}, \{x, y\}\}, \{\{y\}, \{x, y\}\}, \\ \{\emptyset, \{x\}, \{y\}\}, \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}, \{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}, \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}, \\ \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\} \end{array} \right\}$$

conte os subconjuntos com nenhum, um, dois, três e quatro elementos!

Exercício 2.31 Dado o conjunto x , escreva $\mathfrak{s}^4(x)$ e $\mathcal{P}\mathfrak{s}^2(x)$.

Exercício 2.32 O símbolo $\cup$ representa, a partir de agora, a união de conjuntos dada pelo axioma da união.

Decida então se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique a sua resposta.

1. $\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1\};$
2. $\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1, \{\{0\}, \{1\}\}\};$
3. $\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1, \{0\}, \{1\}\}.$

Exercício 2.33 Dado A um conjunto e P uma propriedade, prove que existe um único $B = \{x \in A \mid P(x) = V\}$. Lembre-se de que $P(x) = V$ abrevia P é verdadeira em x .

Exercício 2.34 Justifique a intersecção de conjuntos: $\forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w \in x \wedge w \in y))$. Denote a operação de intersecção de x por y de $x \cap y$. Você tem alguma representação de diagrama para a intersecção?

Exercício 2.35 Justifique o complementar de conjuntos: $\forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w \in x \wedge w \notin y))$. Denote a operação de intersecção de x por y de $x \cap y$. Você tem alguma representação de diagrama para o complementar?

Exercício 2.36 Prove que $x \cup y = x$ se e $y \subset x$.

Exercício 2.37 Prove que $x \cap y = x$ se e $x \subset y$.

Exercício 2.38 1. Prove que $A \cap B = B \cap A$;

2. Prove que $A \cup B = B \cup A$;

3. De um contraexemplo para mostrar que $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Exercício 2.39 Prove:

1. $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

3. $A \setminus B \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ ²;

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Leis Distributivas);

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Leis Distributivas);

6. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (Leis de DeMorgan);

7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (Leis de DeMorgan).

Exercício 2.40 Prove as Leis de DeMorgan generalizadas. Denote a união de um conjunto em S por $\bigcup\{B_i | i \in S\}$ e a intersecção em S por $\bigcap\{B_i | i \in S\}$. Mostre que

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup\{B_i | i \in S\} &= \bigcap\{A \setminus B_i | i \in S\} \\ A \setminus \bigcap\{B_i | i \in S\} &= \bigcup\{A \setminus B_i | i \in S\} \end{aligned}$$

²Leia $A \setminus B \setminus C$ como $(A \setminus B) \setminus C$.

RESPOSTAS

2.26

1. $\emptyset$ é um conjunto definido pelo Axioma do vazio;
2. $\{\emptyset\}$ é um conjunto. O conjunto $\emptyset$, com o uso do axioma de pares, gera o conjunto $\{\emptyset, \emptyset\}$. Usando extensionalidade, temos $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$;
3. $\{\{\emptyset\}\}$. Mesma justificativa, pares sobre $\{\emptyset\}$;
4. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$. É conjunto e originou-se de pares sobre $\{\{\emptyset\}\}$;
5. $\dots\{\{\{\emptyset\}\}\}\dots$. Não é conjunto. Senão teríamos que é um conjunto que pertence a si mesmo;
6. $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$. Não é conjunto. No mínimo está *mal indentado* o que me permite dizer que não posso reduzir a ordem hierarquica de sua formação;
7. $\{\emptyset\}, \emptyset$. Não é conjunto. Mesma justificativa do exercício anterior
8. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$. É conjunto. Por extensionalidade, igual a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Temos que $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são conjuntos. daí, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, por pares, é conjunto;
9. $\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$. Não é conjunto. Mesma justificativa do item 6;
10. $\{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$. Não é conjunto. Idem;
11. $\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$. Não é conjunto. Idem;
12. $\{\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}$. Se é conjunto, veio de formação de pares de $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$. O último já sabemos que é conjunto.
Se $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ é conjunto, então nossa resposta é Afimativa.
 $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ é conjunto se $\{\emptyset\}$ e $\emptyset$ e $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ são conjuntos. A resposta é afirmativa para os dois primeiros, mas o terceiro decompõe-se em $\{\emptyset$ e $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$. Dois são conjuntos e o terceiro não foi construído por nenhuma de nossas estruturas de conjuntos: os axiomas. Não é conjunto. Não é bem formado usando os axiomas de nossa teoria.
13. $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}$.
É conjunto se e somente se $\{\emptyset\}$ e $\emptyset$ e $\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ são conjuntos. Os dois primeiros são conjuntos. Os dois últimos são iguais a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ que sabemos ser um conjunto.

2.27

1. $x \in \{x, y, z\}$ Pelo Lema 2.16, $x \in \{x, y, z\}$ assim como $y \in \{x, y, z\}$ e $z \in \{x, y, z\}$. Verdade;
2. $x \subseteq \{x, y, z\}$. Seria verdade se $t \in x$ implica $t \in \{x, y, z\}$. Os elementos de $\{x, y, z\}$ são x, y e z . Falso;
3. $\{x\} \in \{x, y, z\}$. Verdadeiro se $t \in \{x\}$ implica $t \in \{x, y, z\}$. Agora $t \in \{x\}$ se $t = x$, o qual pertence a $\{x, y, z\}$. Verdade;

4. $\{x, y\} \subseteq \{x, y, z\}$. Verdade. Mesmo raciocínio acima;
5. $\{\{x\}\} \in \{x, y, z\}$. Seria verdade se $t \in \{\{x\}\}$ implica $t \in \{x, y, z\}$. Agora, $t \in \{\{x\}\} \Leftrightarrow t = \{x\}$ e sabemos que $\{x\}$ não é elemento de $\{x, y, z\}$. Falso;
6. $\{z, \{x, y\}\} \subseteq \{x, y, z\}$, Vamos verificar se $t \in \{z, \{x, y\}\}$ implica em $t \in \{x, y, z\}$.
Temos que $t \in \{z, \{x, y\}\}$ se $t = z$ e $t = \{x, y\}$. Como $\{x, y\}$ não é elemento de $\{x, y, z\}$, a afirmação é falsa;
7. $\emptyset = \{\emptyset\}$. Falso, Se não $t \in \emptyset$ se $t \in \{\emptyset\}$, Não existe $t \in \emptyset$ e o único elemento de $\{\emptyset\}$ é $\emptyset$;
8. $\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\}$. Verdade. Possuem os mesmos elementos;
9. $\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2\} \neq \{0, 1, 2\}$. Falso. São iguais;
10. $\{\{\emptyset\}\}$ é um conjunto. Falso. Mal formado;
11. $\{\{\{\emptyset\}\}\} \neq \{\{\emptyset\}\}$. Verdadeiro. Ambos não possuem os mesmos elementos

2.28 Em uma redefinição de $\vee$ informal,

1. $\{t \in x \vee t \in y \vee t \in z\}$;
2. $\{t \in \{x, y\} \vee t \in z\} = \{t = x \vee t = y \vee t \in z\}$;
3. $\{x, \{x\}, \{\{\{x\}\}\}, x, \{x\}, \{\{x, y\}, z\} =$

$$\{t \in \{x, \{x\}, \{\{\{x\}\}\} \vee t \in x \vee t \in \{x\} \vee t \in \{\{x, y\}, z\}\} = \{x, \{x\}, \{\{\{x\}\}\}, \{x, y\}, z, t \in x\}$$

4. $x, \{x\}, \{\{x, y\}, z\} = \{t \in x \vee t \in \{\{x, y\}, z\}\} = \{\{x, y\}, z \vee t \in x\}$;
5. $x = \{t \in x\} = x$;
6. $\{x\} = \{t \in \{x\}\} = \{x\}$;
7. $\{\{\{x\}\}\} = \{t \in \{\{\{x\}\}\} = \{\{\{x\}\}\}$;
8. $\{x\}, \{\{\{x\}\}\} = \{t \in \{x\} \vee t \in \{\{\{x\}\}\}\} = \{\{x\}, \{\{\{x\}\}\}\}$.

2.29

- 1 x . O sucessor de x , $\mathfrak{s}(x) = x \cup \{x\} = \{t \in x \vee t \in \{x\}\} = \{t \in x \vee t = x\}$.
O conjunto das partes de x , $\mathcal{P}(x) = \{t \subseteq x\}$;
- 3 $\{\{x\}\}$. $\mathfrak{s}(\{\{x\}\}) = \{\{x\}\} \cup \{\{\{x\}\}\} = \{\{\{x\}\}, \{\{\{x\}\}\}\}$.
 $\mathcal{P}(\{\{x\}\}) = \{t \subseteq \{\{x\}\}\}$. esse conjunto é unitário, com um elemento, $\{x\}$.
Seu conjunto de partes tem 2^1 elementos e é dado por $\{\emptyset, \{x\}\}$.
- 5 O conjunto $\mathfrak{s}(\{\{x, \{x, \{x\}\}\}\})$ é igual a $\{\{x, \{x, \{x\}\}\}\} \cup \{\{\{x, \{x, \{x\}\}\}\}\} = \{\{x, \{x, \{x\}\}\}, \{\{x, \{x, \{x\}\}\}\}\}$.
O conjunto dado tem um elemento. Seu conjunto de partes tem 2^1 elementos, o vazio e o conjunto dado;

$$7 \quad \mathfrak{s}(\{\{x\}, \{y, z\}\}) = \{\{x\}, \{y, z\}, \{\{x\}, \{y, z\}\}\}.$$

$$\mathcal{P}\{\{x\}, \{y, z\}\} = \{\emptyset, \{x\}, \{y, z\}, \{\{x\}, \{y, z\}\}\};$$

$$9 \quad \mathfrak{s}(\{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\}) \text{ é dado por } \{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\} \cup \{\{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\}\} = \{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}, \{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\}\}.$$

$$\mathcal{P}\{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\} = \{\emptyset, \{\{x, \{x\}, \{y, z\}\}\}\}.$$

$$2.31 \quad \mathfrak{s}^0(x) = x, \mathfrak{s}(x) = x \cup \{x\}, \mathfrak{s}^2(x) = \mathfrak{s}(x \cup \{x\}) = x \cup \{x\} \cup \{x \cup \{x\}\}$$

Dado o conjunto x , escreva $\mathfrak{s}^4(x)$ e $\mathcal{P}\mathfrak{s}^2(x)$.

$$2.34 \quad \text{Justifique a intersecção de conjuntos: } \forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w \in x \wedge w \in y)).$$

Denote a operação de intersecção de x por y de $x \cap y$. Voce tem alguma representação de diagrama para a intersecção?

$$2.35 \quad \text{Justifique o complementar de conjuntos: } \forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w \in x \wedge w \notin y)).$$

Denote a operação de intersecção de x por y de $x \setminus y$. Voce tem alguma representação de diagrama para o complementar?

$$2.36 \quad x \cup y = x \Leftrightarrow ((t \in x \cup y) \Leftrightarrow t \in x) \Leftrightarrow ((t \in x \vee t \in y) \Leftrightarrow t \in x).$$

Escreva a última sentença como $p \vee q \Leftrightarrow p$. Ora, trivialmente temos a tautologia $p \Rightarrow p \vee q$, Agora, $p \vee q \Rightarrow p$ é logicamente equivalente (é uma tautologia em Lógica Booleana) a $q \Rightarrow p$. Isto é, $y \Rightarrow t \in x$.

Isto é $x \cup y = x$ se e $y \subset x$.

2.39 Prove:

$$1 \quad A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B); \text{ Temos que } t \in A \setminus B \Leftrightarrow t \in A \wedge \neg(t \in B).$$

$$\text{Agora, } t \in (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow (t \in (A \cup B) \wedge \neg(t \in B)) \Leftrightarrow ((t \in A \vee t \in B) \wedge \neg(t \in B)).$$

Lembre-se de que $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$. Distribuindo a última sentença, temos a equivalência $(t \in A \vee \neg(t \in B)) \wedge (t \in B \vee \neg(t \in B))$ ou, equivalentemente, $(t \in A \vee \neg(t \in B))$, isto é, $t \in A \setminus B$.

$$\text{Finalmente, } t \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow (t \in A \wedge \neg(t \in (A \cap B))) \Leftrightarrow (t \in A \wedge \neg(t \in A \wedge t \in B)).$$

Lembrando que $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, temos que a última sentença é equivalente a $t \in A \wedge (\neg t \in A \vee \neg t \in B)$. Isto é, $(t \in A \vee \neg t \in A) \wedge (t \in A \vee \neg t \in B)$. Equivalentemente, $t \in A \vee \neg t \in B$, isto é, $t \in A \setminus B$.

$$3 \quad t \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow (t \in (A \setminus B) \wedge \neg(t \in C)) \Leftrightarrow (t \in A \wedge \neg(t \in B) \wedge \neg(t \in C)).$$

$$\text{Agora, } t \in (A \setminus (B \cup C)) \Leftrightarrow (t \in A \wedge \neg(t \in (B \cup C))) \Leftrightarrow (t \in A \wedge \neg(t \in B \vee t \in C)) \Leftrightarrow (t \in A \wedge \neg(t \in B) \wedge \neg(t \in C)), \text{ ou seja, } t \in (A \setminus B) \setminus C.$$

$$5 \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ (Leis Distributivas);}$$

$$7 \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ (Leis de DeMorgan).}$$

2.40 Prove as Leis de DeMorgan generalizadas. Denote a união de um conjunto em S por $\bigcup\{B_i | i \in S\}$ e a intersecção em S por $\bigcap\{B_i | i \in S\}$. Mostre que

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup\{B_i | i \in S\} &= \bigcap\{A \setminus B_i | i \in S\} \\ A \setminus \bigcap\{B_i | i \in S\} &= \bigcup\{A \setminus B_i | i \in S\} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Ordem e Axioma da Escolha

Nesse capítulo, discorreremos sobre conjuntos ordenados e tipos de ordens. Nossos objetivos principais são a discussão sobre o *Axioma da Escolha* em suas várias versões.

Vamos antes

3.1 Números Naturais

Vamos, indutivamente, construir cada número natural, fazendo uso dos axiomas básicos que apresentamos no capítulo anterior.

Nossa partícula inicial, **o número Zero** é justificado usando o axioma da existência, de modo que o átomo, conjunto vazio, é associado ao número zero.

Usamos daí o axioma dos pares para, dado $\emptyset$, obtermos, formando pares, o par $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$. O conjunto $\{\emptyset\}$ é identificado ao número 1.

E o número dois? Este é identificado ao conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Indutivamente, faremos,

- O número *zero*, 0 é identificado com o conjunto vazio;
- O número *um*, 1 é identificado com o conjunto $\{\emptyset\}$. Dai, $1 = \{0\}$ e $0 \in 1$;
- O número *dois*, 2 é identificado com o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Dai, $2 = \{0, 1\}$ e $0 \in 2$ e $1 \in 2$;

- O número *três* é identificado com o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Dai, $3 = \{0, 1, 2\}$;
- Uma vez “construído” n , o número $n + 1$ é o conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$.

O leitor deverá notar que um número natural é formado, indutivamente, pela operação de tomar sucessor a partir do vazio.

Definição 3.1 *Seja x um natural. Lembre-se que o suceso de um conjunto y é dado por $y \cup \{y\}$.*

Temos que o sucessor de x , $\mathfrak{s}(x)$, satisfaz

1. $x \in \mathfrak{s}(x)$;
2. Se $y \in x$, então $y \in \mathfrak{s}(x)$.

O conjunto acima é chamado de *hereditário*. Em particular, estamos falando dos conjuntos *hereditários finitos*. Veja o Capítulo 5.

Ora, nossa questão básica deverá ser: temos bases consistentes para fazermos as construções de um número natural como acima? Vamos a essa questão.

Lembre-se de que se n é um número natural, seu sucessor está bem definido e é denotado por $\mathfrak{s}(n)$ e que denotamos o conjunto vazio por $\emptyset$.

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\mathfrak{s}(y) \in x))$$

Repare bem, não parece com algo que você já viu?

A partir do que foi, provavelmente, nosso primeiro contato com as idéias matemáticas descontextualizadas (a matemática que não faz uso do clássico saco de balinhas de Maria ou as figurinhas de João), fomos imbuídos de uma idéia que nós, ou boa parte de nós, aceitamos sem muitas críticas ou maturidade: A idéia de que existe um conjunto infinito, que seria a união de todos conjuntos. Vejamos:

O conjunto dos naturais é a união de todos conjuntos finitos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\}$$

Essa fórmula é passível de críticas, uma vez que fizemos uma definição de $\mathbb{N}$ em função de $\mathbb{N}$ e nossos objetivos são certas definições primitivas, bem formuladas e certas consequências dessas definições, que seria conceitos derivados. Vejamos agora com certa crítica essa idéia intuitiva de conjunto de todos os conjuntos, que alguns de nós conhecemos de nossos cursos básicos. Existe um certo conceito de um chamado “conjunto universo”, que seria o conjunto de todos conjuntos, a união de todos esses conjuntos. Ora, a existência de tal conjunto cria um *paradoxo* (implicaria uma contradição): O conjunto universo U é o conjuntos de todos os conjuntos. Então, $U \cup \{U\} \in U$.

Temos agora um problema mais básico, menos transcendente que o Platonico conjunto universo, mas de natureza um pouco mais prática: O que é o conjuntos dos números (todos eles!) naturais?

Precisamos do axioma da existência de um conjunto infinito, 2.18. Temos que a sentença

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\mathfrak{s}(y) \in x))$$

é identificada com o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. O conjunto dos números naturais é esse conjuntos x que assertamos existir.

O que é de fato um número natural?? Para os leitores que fizeram o curso de Álgebra 1, os números naturais são construídos usando os axiomas abaixo, conhecidos como Axiomas de Peano. Verifique que os conjuntos construídos acima de fato satisfazem os primeiros quatro axiomas. Para verificar o último precisamos da teoria que desenvolvemos na próxima seção.

Definição 3.2 Defina $x < y$ em $\mathbb{N}$ se $x \in y$

Princípio da Tricotomia Para todo $x, y \in \mathbb{N}$, $x = y \vee x < y \vee y < x$.

Axiomas de Peano: Os Axiomas de Peano admitem três conceitos primitivos: *número natural*, *zero* e *sucessor* relacionados por 5 axiomas.

Denotamos, como antes $Suc(x)$ ao sucessor do número natural x .

Os axiomas são os seguintes:

- Zero é um número natural;

- Todo número natural x tem um sucessor $Suc(x)$;
- Zero não é sucessor de nenhum número natural;
- se $Suc(x) = Suc(y)$ então $x = y$
- Princípio da Indução Completa:

Seja S um conjunto de números naturais tal que:

- a) $0 \in S$
- b) Se $n \in S$ então $Suc(n) \in S$.

Então S é o conjunto de todos os números naturais.

Vamos agora justificar o conceito de conjunto finito:

Definição 3.3 (Conjunto Finito) *Vamos definir que um conjunto A é finito se e só se existe um número natural n e uma bijeção de n em A .*

Assim, se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, podemos definir uma bijeção $1 \rightarrow f(x_1)$, $2 \rightarrow f(x_2)$, e assim sucessivamente.

3.2 Conjuntos Ordenados

Temos a definição de ordem em $\mathbb{N}$, derivada da relação $\in$, definida por

$$x \leq y \text{ se } x \in y \vee x = y$$

Assim, por exemplo, $4 \leq 9$ pois $4 \in 9$ e $4 \leq 4$ desde que $4 = 4$.

Dado um conjunto A , vamos especificar as propriedades que uma ordem sobre A deverá satisfazer.

Antes de tornar a noção de ordem mais formal, perceba que uma ordem é uma relação entre dois elementos de um dado conjunto A . Não são bem formadas as frases

$$\begin{aligned} 0 &\leq \\ 1 &\leq 3, 4 \\ 3 &\leq \leq \leq \end{aligned}$$

Desse modo, devemos deixar claro que uma ordem sobre um conjunto A é uma relação binária sobre esse conjunto.

Ora, recorde que já sabemos o que é um par ordenado (veja Axioma da Formação de Pares 2.2). O conjunto $A \times B$ é definido como

$$\{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

A partir daí, definimos:

Definição 3.4 *Sejam A e B dois conjuntos, R é dito uma relação binária se R é um subconjunto não vazio do conjunto $A \times B$.*

Chamaremos relações binárias simplesmente de relações. Denotamos um par ordenado (x, y) pertencente a relação R como xRy .

Uma função é f de A em B uma relação univariada. Isto é, se $x f y$ e $x f z$, então $y = z$.

Vamos formalizar o que mais precisamos para definir uma relação de ordem. Temos:

Definição 3.5 *Dado um conjunto A , uma relação binária $\leq$ sobre A é dita uma ordem parcial sobre A se*

PO1 Para todo x, y, z em A , se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$; (transitividade)

PO2 Para todo $x \in A$, $x \leq x$; (reflexividade)

PO3 Para todo $x, y \in A$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. (anti-simetria)

Definição 3.6 *Uma relação de ordem em X é chamada de ordem total ou linear se para todo $x, y \in X$ tem-se que $x \leq y$ ou $y \leq x$ (isto é, quaisquer dois elementos em X são comparáveis).*

Vejamos, na Seção 3.5 alguns exemplos de tipos de ordem. Vamos agora fixar uma notação

Definição 3.7 *Dado um conjunto ordenado $(A, \leq)$ e $x, y \in A$,*

- $x < y$ se $x \leq y \wedge x \neq y$;
- $x \geq y$ se $y \leq x$;
- $x > y$ se $y < x$.

Observação 3.8 Poderíamos ter como definição primitiva $(A, <)$. A partir das relações $=$ e $<$, definimos $\leq$ como $x \leq y$ se

$$x < y \vee x = y$$

Podemos destacar outros tipos de ordem:

Definição 3.9 Um conjunto ordenado $(A, \leq)$ tem

1. *Ordem densa*, se para quaisquer elementos comparáveis, x, y , digamos, $x < y$, existe z tal que $x < z < y$;
2. *Ordem linear* se para todo x e y temos $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.

Um conjunto ordenado $(A, \leq)$ pode possuir relações e propriedades derivadas da relação $\leq$. Vamos usar alguns desses conceitos no que se segue.

Definição 3.10 Dado um conjunto ordenado $(A, \leq)$ e $X \subseteq A$, definimos majorante, maximal, máximo, minorante, minimal e mínimo:

<i>Majorante</i>	$x \in A$ é majorante de X se para todo $y \in X$, $y \leq x$;
<i>Maximal</i>	$x \in A$ é maximal se $\forall y \in X$, se é possível comparar x com y , então $y \leq x$;
<i>Máximo</i>	$x \in A$ é máximo se x é majorante e pertence a X ;
<i>Minorante</i>	$x \in A$ é minorante de X se para todo $y \in X$, $y \geq x$;
<i>Minimal</i>	$x \in A$ é mínimo se $\forall y \in X$, se é possível comparar x com y , então $y \geq x$;
<i>Mínimo</i>	$x \in A$ é minimal se x é minorante e pertence a X .

Para o leitor que está se perguntando qual a relação entre esses conceitos, ou, se nenhuma relação é estabelecida, que contra-exemplos podem ser dados, referimo-nos a Seção 3.5.

Definição 3.11 Dado um conjunto X , uma boa ordem é uma ordem em X é uma relação de ordem $\leq$ sobre X tal que:

BO Todo $D \subseteq A$ tal que $D \neq \emptyset$ tem um mínimo.

É muito interessante notar que muitas propriedades interessantes podem ser inferidas usando-se *BO*. Parte de nosso trabalho é “podar” o excesso de definições, de modo a obter um corpo mínimo de axiomas. Vamos ilustrar esse ponto usando definição 3.11

Lema 3.12 *Seja $(A, \leq)$ um conjunto bem ordenado. Então*

1. *A é linearmente ordenado;*
2. *Todo $x \in A$ tem sucessor ou é o máximo de A ;*
3. *A tem primeiro elemento.*

Prova: Para provar 1. é necessário demonstrar que dois elementos de A são comparáveis. Suponha que A tem pelo menos dois elementos, senão temos a ordem (linear) trivial. Tome $x \neq y$ em A . O conjunto $\{x, y\}$ é um subconjunto de A e, por *BO* tem um mínimo. Suponha, sem perder a generalidade, que esse mínimo é x . Temos então que $x \leq y$, donde, dois elementos de A são comparáveis, i.e., a ordem sobre A é linear.

2) Suponha que A é bem ordenado e seja $x \in A$. Então o conjunto $\{y \in A | y > x\}$ pode ser vazio ou não.

No primeiro caso, então, para todo y em A , $y \leq x$ e x é máximo.

Senão, $\{y \in A | y > x\} \neq \emptyset$ e, sendo A Bem Ordenado, esse conjunto tem mínimo x' . Vejamos que x' é o sucessor de x :

Como x' é o primeiro elemento de $\{y \in A | y > x\}$, para todo $x < y$, temos $x' \leq y$. Dai não existe y tal que $x < y < x'$. Isto é, x' é sucessor de x

3) O conjunto A é um subconjunto particular de A e, portanto, possui primeiro elemento. ■

3.2.1 Alguns Exemplos de Boa Ordem

O primeiro exemplo de conjunto ordenado é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. esse exemplo será nosso “gabarito” quando pensarmos em boa ordem.

Lema 3.13 $\mathbb{N}$ é Bem Ordenado.

Prova: Vamos mostrar que todo $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ tem primeiro elemento.

Usaremos aqui a propriedade que todo subconjunto X de $\mathbb{N}$ não vazio é linearmente ordenado. Isto é, para todo x e y de X , $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Se $0 \in X$, 0 é o mínimo de X . Senão temos que $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Verifiquemos se $1 = \mathfrak{s}(0) \in X$. Caso tenhamos sucesso, 1 é o mínimo de X . Senão temos que $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Repita até que para certo $n = \mathfrak{s}^n(0)$ pertença a X .

Note que esse algoritmo tem um fim porque $X \neq \emptyset$, donde, existe um número $x \in X$. Nosso algoritmo não tem mais do que x repetições porque o mínimo de X é menor ou igual a x . De fato, par.

Eu não gostei muito dessa prova. aw ■

Conjuntos ordenados serão usados como base para construirmos outros conjuntos ordenados.

Definição 3.14 Dado o conjunto ordenado $(I, \leq)$ e a família de conjuntos ordenados $(A_i, \leq_i)_{i \in I}$, defina a união disjunta de da família $(A_i, \leq_i)_{i \in I}$ como

$$\cup_{i \in I} A_i \times \{i\}$$

Defina a ordem lexicográfica¹ $\leq_{lx}$ como

$$\begin{aligned} (m, j) \leq_{lx} (n, j) &\Leftrightarrow m \leq_i n \\ \forall (j <_i k) \forall m \in A_j \forall n \in A_k &((m, j) <_{lx} (n, k)) \end{aligned}$$

Definição 3.15 Dado um conjunto ordenado $(A, \leq)$, seja B um subconjunto não vazio de A . Defina a ordem induzida de A em B como

$$m \leq_B n \Leftrightarrow m \leq n$$

O leitor não terá dificuldade em demonstrar que ordem lexicográfica e ordem induzidas possuem as propriedades de ordem definidas em 3.5. Nós de fato construímos novos conjuntos ordenados a partir de outros conjuntos ordenados.

¹Esse nome não é uma homenagem ao vilão dos quadrinhos, Lex Luthor! Seu sentido é colocar numa ordem de dicionário.

Exemplo 3.16 O conjunto $\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$ na ordem lexicográfica é bem ordenado.

Prova: A ordem lexicográfica sobre $\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$ é dada por:

- $(m, 0) \leq (n, 0) \Leftrightarrow m \leq n$;
- $(m, 1) \leq (n, 1) \Leftrightarrow m \leq n$;
- Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, 0) \leq (n, 1)$.

Vamos provar que $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$ possui mínimo.

Se $X \cap \mathbb{N} \times \{0\} \neq \emptyset$, então como $\mathbb{N} \times \{0\}$ é bem ordenado, na ordem herdada da ordem de $\mathbb{N}$, esse conjunto tem um mínimo, que é o mínimo de X em $\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$.

Caso $X \cap \mathbb{N} \times \{0\} = \emptyset$, como $X \neq \emptyset$, então $X \subseteq \mathbb{N} \times \{1\}$. Repita o raciocínio anterior sobre o conjunto bem ordenado $\mathbb{N} \times \{1\}$. ■

3.2.2 Axioma da Escolha em Várias Formas

Temos agora as ferramentas básicas para enunciar o *Axioma da Escolha*. Várias versões (enunciados equivalentes) do Axioma da Escolha estão disponíveis “no mercado”. É bom tomar conhecimento de algumas dessas versões, as quais apresentamos a seguir.

O Axioma da Escolha, pelo seu sabor intuitivo e óbvio foi (ou ainda é) objeto de algumas confusões.

Na verdade esse axioma estabelece que as propriedades de indução que temos no conjunto dos números naturais podem ser mantidas em outros conjuntos.

AEsc Axioma da Escolha. Versão ZERO. Seja A um conjunto não vazio.

Então podemos escolher $a_0 \in A$.

Versão UM. Seja $\{A_s\}_{s \in S}$ uma família de conjuntos não vazios. Então existe uma função f definida em S tal que para todo $s \in S$, $f(s)$ pertence a A_s ;

Versão DOIS. Para todo conjunto A , existe uma relação $\leq$ que *bem ordena* A (veja definição 3.11).

Versão TRÊS. (Também chamado de **Lema de Zorn**) Seja A um conjunto *Parcialmente Ordenado*, i.e., A satisfaz *PO1*, *PO2* e *PO3*, na Definição 3.5. Se toda *cadeia* em A (todo o subconjunto de A que satisfaz *Lin*) tem um elemento majorante, então A tem um elemento maximal.

Essas quatro versões do Axioma da Escolha sempre serão usadas, em uma de suas formas, em Álgebra, Análise, Topologia.

A versão **UM** também tem seu apelo intuitivo como: Existe um conjunto X_S tal que para todo $s \in S$, $X_S \cap A_s$ é um conjunto unitário.

Lema 3.17 *As quatro formas de axioma da escolha enunciadas acima são equivalentes.*

Prova. **ZERO** se e somente se **UM**: É claro que zero é uma versão mais simplificada de **UM**. Precisamos provar que **ZERO** implica **UM**.

Aplicando seguidamente **ZERO**, podemos escolher $s_0 \in S$ e $a_{s_0} \in A_{s_0}$. Uma função definida em todo $s \in S$ pode ser obtida da seguinte forma: Caso f esteja definida em $X \subseteq S$ e $X \neq S$, então $S \setminus X \neq \emptyset$ e, de novo, por **ZERO**, podemos escolher $s_X \in S \setminus X$ e $a_X \in A_{s_X}$, extendendo, desse modo, f para $f(s_X) = a_X$.

Posto isso, temos:

UM $\Rightarrow$ **DOIS**: Seja A um conjunto. Pela forma **ZERO**, existe $x_0 \in A$. Ordene $\{x_0\}$ pela a ordem trivial. Isto é, $x_0 = x_0$ e, portanto $x_0 \leq x_0$.

Se $A \setminus \{x_0\}$ não é vazio, podemos *escolher* $x_1 \in A \setminus \{x_0\}$ e ordenar $x_0 \leq x_1$. Suponha que temos $O \subseteq A$ bem ordenado. Se $O \neq A$, então $A \setminus O$ não é vazio e podemos *escolher* $x_M \in A \setminus O$.

Ordenando $x \leq_M x_M$ para todo $x \in O$ e fazendo $x \leq_M y$ se $x \leq y$ em O , temos o resultado desejado.

DOIS $\Rightarrow$ **UM**: Seja $\{A_s\}_{s \in S}$ uma família de conjuntos não vazios. Como para cada $s \in S$, o conjunto A_{s_0} pode ser bem ordenado, por uma ordem $\leq_{s_0}$, existe $a_s \in A_s$, primeiro elemento de A_s .

Definindo $f(s) = a_s$, temos o resultado desejado.

UM $\Rightarrow$ TRÊS: Seja A um conjunto parcialmente ordenado e tal que toda cadeia em A tem um majorante. Vamos, usando **UM**, provar que A tem um maximal.

Por **UM**, podemos escolher unitários $a_0 \in A$. Esses subconjuntos de A são linearmente ordenados pela ordem herdada de A .

Podemos, continuamente usando **UM**, escolher $C \subseteq A$ maximal e linearmente ordenado. De fato, o passo zero, de escolha de um conjunto linearmente ordenado, dado por um unitário em A já foi tomado e, dado $C \subseteq A$ linearmente ordenado, podemos, caso $A \setminus C \neq \emptyset$ tomar, novamente usando **UM**, $c \in A \setminus C$. Caso $C \cup \{c\}$, com a ordem herdada de A , seja linearmente ordenado, podemos estender C para $C \cup \{c\}$. Senão, tomamos $(A \setminus \{c\}) \setminus C$ e podemos continuar o processo de modo a tomar C subconjunto de A linearmente ordenado e maximal para essa propriedade.

Por hipótese, C possui um majorante. Esse majorante é maximal em A . De fato, caso contrário, teríamos $m \in A$ onde $c \leq m$, para todo $c \in C$ e $m \notin C$ (recorde-se da definição de majorante: onde é possível comparação, m é o máximo).

TRÊS $\Rightarrow$ DOIS: Seja A um conjunto não vazio.

Sejam P todos os subconjuntos de A que podem ser bem ordenados. Claramente os unitários em A são bem ordenados.

Ordene P por $\forall r, s \in P, r \preceq s$ se $r \subseteq s$ e a ordem de r coincide com a ordem de s . Provemos que toda cadeia em P tem um majorante. Teremos, então que P tem um maximal. Vamos mostrar que esse maximal é A :

Toda cadeia em P tem um maximal: Se C é uma cadeia na ordem definida acima, então para todo $r, s \in C, r \preceq s$ ou $s \preceq r$. Desta forma, dado $x, y \in \cup C$, existe $r \in C$ tal que $x, y \in r$ e para todo $s \in C$, se $r \preceq s$, então $x, y \in r$. Desta forma, para todo $s \in C$, se $r \preceq s$, então $x \leq y$ em $r, x \leq y$ em s . Deste modo, $x \leq y$ em $\cup C$ e $\cup C$ é um *majorante* para $\cup C$.

Por **TRÊS**, P tem um maximal. **O maximal de P é A :** Seja M o maximal de P . Se $M \neq A$, então $A \setminus M \neq \emptyset$. Dai, para todo $x \in A \setminus M$, podemos, preservando a ordem de M , impor que esse x seja o máximo. Desse modo, $M \cup \{x\}$ tem, na ordem $\preceq$ um majorante, contradizendo que M é majorante. Donde, $A \setminus M = \emptyset$. Isto é $M = A$.

3.3 Ideais e Filtros

Uma das formas *equivalentes* de axioma da escolha muito usada em álgebra e topologia geral é a o seu enunciado na forma para filtros.

Definição 3.18 *Dado um conjunto não vazio X , um conjunto $\mathcal{F}$ contido no conjunto das partes de X (um conjunto formado por subconjuntos de X) é um filtro se*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Para todos A e B em $\mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$;
3. Para todo A em $\mathcal{F}$ e $B \supseteq A$, $B \in \mathcal{F}$.

Lema 3.19 *Seja $\mathcal{F}$ um filtro sobre um conjunto X , Temos que*

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $\mathcal{F}$ é fechado para intersecções finitas;
3. $\mathcal{F}$ é fechado para uniões.

Prova: 1) Como para todo $A \in \mathcal{F}$ e $B \supseteq A$, temos que $B \in \mathcal{F}$, então, como $X \supseteq A$ para todo $A \in \mathcal{F}$, temos que $X \in \mathcal{F}$.

2) Para todo conjunto finito $\{A_1, \dots, A_n\}$ de elementos de $\mathcal{F}$, temos que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$, donde, $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 \in \mathcal{F}$.

Indutivamente, suponha $(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \in \mathcal{F}$. Pela propriedade 3.182, temos que $(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n \in \mathcal{F}$.

3) Se $\{A_s\}_{s \in S}$, $S \neq \emptyset$ é uma família de conjuntos em $\mathcal{F}$, temos que para $s_0 \in S$, o conjunto $\cup_{s \in S} A_s$ está contido em A_{s_0} , donde, por 3.183 pertence a $\mathcal{F}$. ■

Vamos fixar essa noção com exemplos. (Refira exemplos na prox. sec.)

No exemplo (refira qual prox sec. Ultimo ex) faremos uso de:

Lema 3.20 *Dado um conjunto não vazio X e $\emptyset \neq Y \subseteq X$, o conjunto $\mathcal{F}$ ado pore todos subconjuntos de X que contem Y é um filtro.*

Prova: 1) Como Y não é vazio, temos que $\neg(Y \subseteq \emptyset)$ (o único subconjunto de vazio é o vazio) e desse modo, $\neg(\emptyset \in \mathcal{F})$.

2) Considere A e B em $\mathcal{F}$. Então $Y \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Desse modo, $Y \subseteq (A \cap B)$.

3) Considere $A \in \mathcal{F}$. Então $Y \subseteq A$. Dai, para todo $B \supseteq A$, temos que $B \supseteq A \supseteq Y$. Donde, $B \in \mathcal{F}$. ■

Vamos definir *base de um filtro*. Provar que certos conjuntos são base de um filtro é algo mais concreto e acessível do que mostrar que o filtro gerado por essa base é, de fato, um filtro.

Definição 3.21 Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, um conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é chamado de base de um filtro se

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
2. Para todo A e B em $\mathcal{B}$, existe um conjunto $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Lema 3.22 O conjunto $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \exists C \in \mathcal{B}(C \subseteq A)\}$ é um filtro, chamado de filtro gerado por $\mathcal{B}$.

Prova: Vamos provar que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Senão $\emptyset \in \mathcal{F}$ implica que existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $\emptyset \supseteq C$. Ora, então $\emptyset = C$ e $\emptyset \in \mathcal{B}$, contra a definição de $\mathcal{B}$.

Vamos provar que $\mathcal{F}$ é fechado por intersecções finitas. Ora, se A_1 e A_2 são dois elementos de $\mathcal{F}$, então existem C_1 e C_2 em $\mathcal{B}$ tal que $C_1 \subseteq A_1$ e $C_2 \subseteq A_2$. Por hipótese, existe $C_3 \in \mathcal{B}$ tal que $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$. Ora,

$$((C_1 \subseteq A_1) \wedge (C_2 \subseteq A_2) \wedge (C_3 \subseteq C_1 \cap C_2)) \Rightarrow (C_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$$

donde, por definição $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

Finalmente, se $A \in \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A$. Donde, para todo $A' \supseteq A$, $C \subseteq A \subseteq A'$. Isto é $A' \in \mathcal{F}$. ■

Observe que duas bases diferentes podem gerar um mesmo filtro. (tem exemplo disso???)

Filtros podem ser ordenados de acordo com a ordem do $\subseteq$:

Definição 3.23 Dados dois filtros $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ sobre um conjunto X , diremos que $\mathcal{F}_1$ é mais fino do que $\mathcal{F}_2$ se todo A em $\mathcal{F}_1$ pertence a $\mathcal{F}_2$.

Um exemplo de dois filtros $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ com $\mathcal{F}_1$ é mais fino do que $\mathcal{F}_2$ é dado em 3.40

O *dual* da definição de filtro é dado pela *Ideais*. Filtros em lógica e ideais em álgebra são um conceito chave nessas áreas da matemática. Vamos fazer caminho do não algebrista (mesmo que os autores “torçam” para o time da álgebra) e definir ideal dual a definição de filtro:

Definição 3.24 *Dado um conjunto não vazio X , um conjunto $\mathcal{I}$ contido no conjunto das partes de X (um conjunto formado por subconjuntos de X é um ideal se*

1. $X \notin \mathcal{I}$;
2. Para todos A e B em $\mathcal{I}$, $A \cup B \in \mathcal{I}$;
3. Para todo A em $\mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{I}$.

A palavra *dual* tem a sua justificativa no lemma abaixo:

Lema 3.25 *$\mathcal{I}$ é um filtro sobre um conjunto X se e seu dual $\mathcal{F}$ dado por*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{I}\}$$

é um filtro sobre X .

Prova: Vamos provar que duais de ideais são filtros:

1. $X \notin \mathcal{I}$ se e $X \setminus X = \emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Para todo A e B em $\mathcal{I}$, $A \cap B \in \mathcal{I}$. Equivalentemente, para todo $X \setminus A$ e $X \setminus B$ em $\mathcal{F}$, $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$.
Agora, por hipótese, $A \cap B \in \mathcal{I}$, donde $X \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$;
3. Para todo A em $\mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{I}$. Equivalentemente, $X \setminus A$ em $\mathcal{F}$ e $X \setminus B \supseteq X \setminus A$, $X \setminus B \in \mathcal{F}$.

Os filtros que são máximos no sentido que nenhum filtro seja mais fino do que um filtro maximal. Uma das equivalências do *Axioma da Escolha* é que todo filtro $\mathcal{F}$ admite um *refinamento* de modo que existe um filtro $\mathcal{F}'$ que é maximal e refina $\mathcal{F}$. Vejamos a definição de filtros maximais ou **ultrafiltros**.

Definição 3.26 *Seja $\mathcal{F}$ um filtro sobre um conjunto X . Diremos que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro se para todo $A \subseteq X$, temos que $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Ultrafiltros são maximais no sentido que esses filtros não admitem extensão própria. Uma das equivalências do axioma da escolha é que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro. Vejamos asserções equivalentes para ultrafiltros antes de provar o Teorema 3.28

Lema 3.27 *Seja $\mathcal{F}$ um filtro sobre um conjunto X . São equivalentes:*

1. $\mathcal{F}$ é ultrafiltro;
2. $\mathcal{F}$ é maximal no sentido de não admitir extensões próprias;
3.

Prova: $1 \Rightarrow 2$: Se $\mathcal{F}$ não é maximal, então existe $\mathcal{F}'$, extensão própria de $\mathcal{F}$ e, desse modo, $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$.

Temos que $A \notin \mathcal{F}$. Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ não é ultrafiltro mostrando que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

Considere o filtro gerado por $\mathcal{F} \cup A$. Como esse conjunto é base de um filtro, para todo $B \in \mathcal{F}$, existe $B' \in \mathcal{F} \cup A$ tal que

$$B' \subseteq A \cap B$$

Ora, podemos supor que $B' \in \mathcal{F}$. Como

$$(B' \subseteq A \cap B) \Rightarrow (B' \subseteq A)$$

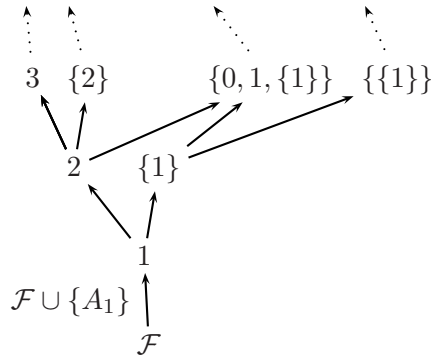
então $B' \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

$2 \Rightarrow 1$ Como para todo $A \subseteq X$ temos que $A \in \mathcal{F}$ ou $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$, então temos as duas hipóteses:

1. $A \in \mathcal{F}$ implica que o filtro gerado por $\mathcal{F} \cup \{A\}$ é o próprio $\mathcal{F}$; item $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$ que um filtro gerado por $\mathcal{F} \cup \{A\}$ teria por elemento $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

de modo que $\mathcal{F}$ não admite extensão própria. Isto é $\mathcal{F}$ é maximal. ■

Uma das formas equivalentes do Axioma da Escolha é que o Axioma de que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro. Em um esquema, sejam $\{\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ um conjunto de filtros, $\{A_1, A_2, A_3\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{GF}_{A_i}$ o filtro gerado por o conjunto de $\mathcal{F} \cup \{A_i\}$ ou o conjunto $\mathcal{P}(X)$. Temos, então o seguinte esquema:



Teorema 3.28 *O Axioma de Zorn é equivalente ao seguinte axioma:*

- *Todo filtro $\mathcal{F}$ pode ser estendido a um ultrafiltro.*

Prova: Seja $\mathcal{F}$ um filtro não trivial. Escolha $A \notin \mathcal{F}$. Temos que

1. $\mathcal{F} \cup \{A\}$ gera um filtro;
2. $\mathcal{F} \cup \{X \setminus A\}$ gera um filtro.

De fato, vamos provar que

$$(\forall B_1 \in \mathcal{F}(B \cap A \neq \emptyset)) \vee (\forall B_2 \in \mathcal{F}(B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset))$$

Caso contrário, teríamos

$$(\exists B_1 \in \mathcal{F}(B_1 \cap A = \emptyset)) \wedge (\exists B_2 \in \mathcal{F}(B_2 \cap (X \setminus A) = \emptyset))$$

Agora,

$$\begin{aligned} & ((B_1 \cap A = \emptyset) \wedge (B_2 \cap (X \setminus A) = \emptyset)) \Rightarrow \\ & ((B_1 \cap B_2 \cap A = \emptyset) \wedge (B_2 \cap B_1 \cap (X \setminus A) = \emptyset)) \end{aligned}$$

Mas $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ e é, portanto, não vazio, uma contradição com o fato de ambas as suas intersecções com A e $X \setminus A$ são o conjunto vazio.

Ora, temos então que o filtro $\mathcal{F}$ admite extensões não triviais e podemos, desse modo, considerar o conjunto **FILTROS** de todos os filtros que estendem $\mathcal{F}$ ordenados pela relação $\subseteq$.

Considere uma cadeia $\mathcal{C} \in \mathbf{FILTROS}$. Vamos provar que $\overline{\mathcal{C}} = \cup\{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \in \mathcal{C}\}$ é um filtro e estende cada elemento de $\mathcal{C}$ e é, portanto, um majorante:

- Se $\emptyset \in \overline{\mathcal{C}}$, então existe $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{G}$, o que não ocorre. Portanto, $\emptyset \notin \cup\{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \in \mathcal{C}\}$;
- Para todo A e B em $\overline{\mathcal{C}}$, temos que existem $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tais que

$$A \in \mathcal{G}_1 \wedge B \in \mathcal{G}_2$$

Como $\mathcal{C}$ é cadeia, podemos supor sem perder a generalidade que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$. donde, A e B pertencem a $\mathcal{G}_2$. Portanto $A \cap B \in \mathcal{G}_2$ e, portanto, pertence a $\overline{\mathcal{C}}$;

- Se $A \in \mathcal{G}_2$, então existe $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{G}$ e, portanto, todos os sobreconjuntos de A pertencem a $\overline{\mathcal{C}}$.

Como cadeias em **FILTROS** tem majorante, então **FILTROS** tem algum maximal. Esse maximal, denotado por $\overline{\mathcal{F}}$ é ultrafiltro, senão poderia ser estendido a um certo $A \notin \overline{\mathcal{F}}$ ou $X \setminus A \notin \overline{\mathcal{F}}$.

Reciprocamente, suponha que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro.

(Esboço: Escreva cadeias em Ideais. Use o fato de todo ideal ter uma extensão maximal e use o gerador disso como MÁXIMO.)

■

Ultrafiltros não são uma ferramenta capaz de gerar exemplos triviais excepto no caso de filtros gerados por subconjuntos de um conjunto X , onde temos:

Lema 3.29 *Seja X um conjunto e $\mathcal{F}$ o filtro gerado por um subconjunto $A \neq \emptyset$. Então os ultrafiltros que estendem $\mathcal{F}$ são todos os ultrafiltros gerados pelos unitários $\{a\}$, para qualquer $a \in A$.*

Prova: Considere $\mathcal{F}$ um filtro gerado por um conjunto $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

Se A não é unitário, para todo $\{a\} \in A$, temos que

$$\forall B \in \mathcal{F}(\{a\} \cap B \neq \emptyset)$$

donde $\{a\} \cup \mathcal{F}$ é base para um filtro $\mathcal{G}$ que estende $\mathcal{F}$.

Esse filtro é um ultrafiltro porque para todo $Y \subseteq X$, temos que $a \in Y$ ou $a \notin Y$. Isto é, para todo $Y \subseteq X$, temos que $a \in Y$ ou $a \in X \setminus Y$. ■

3.4 Exemplos

Temos por objetivo nessa sessão, ilustrar e, desse modo, contextualizar, a teoria exposta nesse capítulo.

No próximo exemplo, vamos mostrar uma ordem obre o corpo $\mathbb{C}$ não compatível com as operações de corpo de $\mathbb{C}$. Isto é, a relação de ordem *não* satisfaz

$$a \geq b \wedge c > 0 \Rightarrow ac \geq bc$$

Exemplo 3.30 Considere $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Aqui, vamos considerar $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$, com as operações usuais, e definimos em $\mathbb{C}$ a seguinte ordem:

$a + bi < c + di$ se e somente se $a < c$ ou $a = c$ e $b < d$. Observe que esta é, na verdade, a ordem lexicográfica (como no exemplo 3) nos pares ordenados (a, b) e (c, d) , e se baseia na ordem total definida sobre os números reais. Vejamos que esta é, de fato, uma relação de ordem:

PO1 Para qualquer número complexo $a + bi$, temos $a + bi \leq a + bi$; (reflexiva)

PO2 Suponhamos que $a + bi \leq c + di$ e que $c + di \leq e + fi$ então temos que $a \leq c$ e $c \leq e$ logo $a \leq e$ pois a relação é transitiva nos reais. Se $a < e$ temos que $a + bi \leq e + fi$ pela definição. Por outro lado, se $a = e$ então $a = c = e$ e $b \leq d \leq f$ assim, $a = e$ e $b \leq f$, portanto $a + bi \leq e + fi$ (transitiva).

PO3 Suponhamos que $a + bi \leq c + di$ e $c + di \leq a + bi$ então, temos que $a \leq c$ e $c \leq a$ logo $a = c$. Mas como $a + bi \leq c + di$ e $c + di \leq a + bi$ então

$b \leq d$ e também $d \leq b$ e assim, $a = c$ e $b = d$ portanto $a + bi = c + di$ (anti-simétrica).

Vejamos, também que esta é uma ordem linear, pois:

suponhamos que $a + bi \not\leq c + di$ então, necessariamente, temos que não vale ($a < c$ ou ($a = c$ e $b \leq d$)) então: ($\text{não } a < c$) e não ($a = c$ e $b \leq d$). Mas ($\text{não } a < c$) é equivalente a ($a \geq c$) e não ($a = c$ e $b \leq d$) é equivalente a ($a \neq c$ ou $d \geq b$). Então, se $a + bi \not\leq c + di$ temos que $a \geq c$ e além disso $a \neq c$ ou $b \geq d$, portanto $a + bi \geq c + di$.

Agora, vejamos que esta ordem não é compatível com a multiplicação: em primeiro lugar, quais são os números complexos “positivo”, isto é, tais que $a + bi \geq 0$? São os complexos com $a \geq 0$ ou $a = 0$ e $b \geq 0$. Em particular, i é positivo, e claramente $0 + 2i < 0 + 3i$, como $i \geq 0$ temos que $(2i) \cdot i < (3i) \cdot i$ o que implica que $-2 + 0i < -3 + 0i$, contrariando a definição da ordem.

De um modo geral, qualquer ordem $\leq$ sobre $\mathbb{C}$ não é compatível com a multiplicação no corpo $\mathbb{C}$. Senão, vejamos. Tome uma ordem $\leq$ sobre $\mathbb{C}$ e compatível com as operações de corpo em $\mathbb{C}$.

Suponha que, nessa ordem, $i \leq 1$ e $i \geq 0$. daí,

$$i \leq 1 \Rightarrow i^2 \leq i \Rightarrow i^3 \leq i^2$$

donde, $-i \leq -1$, e, portanto, $i \geq 1$.

Exemplo 3.31 Vamos ilustrar algumas ordens sobre conjuntos já conhecidos.

1 As ordens usuais nos números inteiros ou nos números reais são exemplos de relações de ordem. Essas relações são definidas de modo intuitivo, dizemos que $a \leq b$ se e somente se $b - a$ é um número positivo, isto é, se $b - a$ é maior do que zero!!

2 Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e seja $\mathcal{P}$ o conjunto de seus subconjuntos, (verifique quais axiomas nos garantem a existência de $\mathcal{P}$). Em $\mathcal{P}$ definimos a relação de ordem dada pela inclusão, isto é, diremos que o conjunto A é menor ou igual ao conjunto B se (e somente se, pois lembre-se, isto é uma definição) se A está contido ou

é igual a B . É fácil ver que, de fato, esta relação satisfaz os axiomas $P01$, $P02$ e $P03$. Além disso, observe que há conjuntos A e B para os quais nem $A \leq B$ nem $B \leq A$, diremos então que A e B são incomparáveis.

3 Chame de X ao conjunto das palavras de um dicionário. As palavras estão ordenadas por uma ordem chamada lexicográfica, e quem se interessa por álgebra ou por computação vai ouvir falar muito dessa ordem, porque ela é usada em algoritmos tradutores, e em álgebra comutativa, por exemplo.

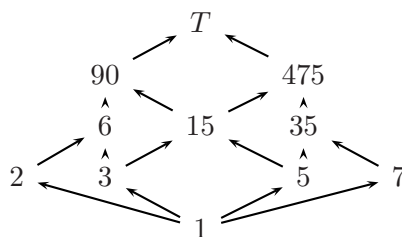
4 Considere um número natural qualquer, por exemplo 60, e seja

$\mathcal{D}_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ o conjunto dos divisores (inteiros e positivos) de 60. Em $\mathcal{D}_{60}$, diremos que $x \leq y$ se x for um divisor de y , assim, por exemplo $4 \leq 12$, $12 \leq 60$, $5 \leq 15$, $5 \leq 20$, mas atenção, $4 \not\leq 5$ nem $15 \not\leq 20$.

Os exemplos 1 e 3 acima nos mostram ordens totais e os exemplos 2 e 4, ordens que não são totais, por isso chamadas de ordens parciais.

Vamos ilustrar conjuntos ordenados através do uso de diagramas de Hasse ou desses diagramas com algumas modificações. Em geral, vamos representar conjuntos ordenados $(A, \leq)$ com pontos $x \in A$ representados como pontos do plano Cartesiano e pontos $x < y$ são representados por vertices $x \rightarrow y$. A ordem é dada pelo fecho transitivo do digrafo acima definido. Vamos deixar mais claro em exemplos:

Exemplo 3.32



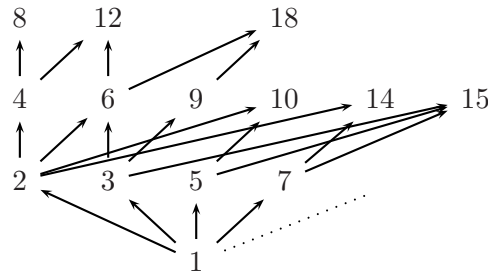
O digrafo acima representa um conjunto

$$A = \{1, 3, 5, 6, 7, 15, 35, 90, 475, T\}$$

com a ordem $<$ dada por

$$\begin{aligned}
 &1 < 2, 1 < 3, 1 < 5, 1 < 6, 1 < 7, 1 < 15, 1 < 35, 1 < 90, 1 < 475, 1 < T, \\
 &2 < 6, 2 < 90, 2 < T \\
 &3 < 6, 3 < 15, 3 < 90, 3 < 475, 3 < T \\
 &5 < 15, 5 < 35, 5 < 90, 5 < 475, 5 < T \\
 &7 < 35, 7 < 475, 7 < T \\
 &6 < 90, 6 < T \\
 &90 < T, 475 < T
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.33 Vamos representar o conjunto dos números naturais positivo, $\mathbb{N}_+$ com a ordem $\leq$ dada por $m < n$ se e só se m divide n . Essa ordem é representada pelo fecho transitivo do digrafo



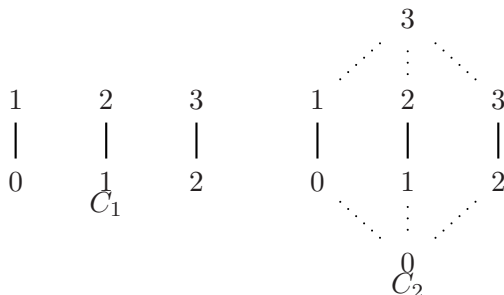
Exemplo 3.34 Considere os intervalos $]0, 1[$, $]1, 2[$ e $]2, 3[$ em $\mathbb{R}$.

Seja C_1 a união desses intervalos com a condição que pontos em intervalos distintos não são comparáveis e pontos no mesmo intervalo herdam a ordem usual em $\mathbb{R}$.

Considere agora C_2 o conjunto obtido pela união de C_1 ao conjunto $\{0, 3\}$ com a ordem dada pela ordem em C_1 mais as condições:

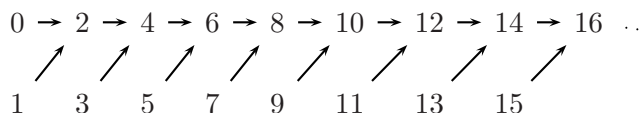
- $\forall m \in C_2 (0 \leq m);$
- $\forall m \in C_2 (m \leq 3).$

Represente o conjunto por:



C_1 não tem majorante, máximo, maximal, minorante, mínimo ou minimal. Os pontos 0 e 3 são, respectivamente C_2 minorante, mínimo e minimal e majorante, máximo e maximal.

Exemplo 3.35 Considere a ordem em $\mathbb{N}$ dada pelo fecho transitivo de



Seja $A = \{2\}$. Note que A não tem mínimo ou minorante em $\mathbb{N}$ poré tem por mimal os elementos 0 e 1.

Considere $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Temos que o conjunto de seus majorantes é dado por $\{4, 6, 8, \dots\}$. Seus maximais são 2 e 3, Como não temos majorantes em B , então não temos máximo em B .

Exemplo 3.36 Dado um conjunto não vazio X , o conjunto X é um filtro sobre X mas $\mathcal{P}(X)$ não é um filtro.

Prova: Para provar que X é um filtro sobre X , veja que o único elemento de $\mathcal{F}$ é X , o qual não é vazio. Portanto $\mathcal{F}$ contém X e não contém o vazio.

No mais, como $\mathcal{F}$ é unitário, ele é fechado por intersecções.

Como os sobreconjuntos de X são apenas X , $\mathcal{F}$ é fechado para sobreconjuntos.

Para provar que $\mathcal{P}(X)$ não é um filtro, observe que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$, o que não caracteriza um filtro.

Exemplo 3.37 Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todos subconjuntos em $\mathbb{N}$ cujo complementar é finito. Temos que $\mathcal{F}$ é um filtro sobre $\mathbb{N}$.

Prova: O conjunto vazio tem como complementar $\mathbb{N}$, que *não* é finito. Portanto $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Dados A e B em $\mathcal{F}$, temos que $A \cap B$ é tal que

$$\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$$

O segundo membro da identidade acima é uma união finita de conjuntos finitos, portanto, um conjunto finito e, desse modo, pertencem a $\mathcal{F}$.

Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \supseteq A$, temos que

$$(B \supseteq A) \Rightarrow ((\mathbb{N} \setminus B) \subseteq (\mathbb{N} \setminus A))$$

desse modo $\mathbb{N} \setminus B$ é um subconjunto de um conjunto finito e, portanto, finito.

■

Exemplo 3.38 Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todos subconjuntos em $\mathbb{N}$ que estão contidos no conjunto dos múltiplos de 3. Então $\mathcal{F}$ é um filtro.

Prova: Para todo $X \in \mathcal{F}$, o conjunto

$$3\mathbb{N} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

é subconjunto de X e, portanto $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Se A e B estão em $\mathcal{F}$, temos que $3\mathbb{N}$ é subconjuntos de ambos, A e B e portanto, é subconjunto de $A \cap B$. Pela definição de $\mathcal{F}$, temos que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Se $A \in \mathcal{F}$, e $B \supseteq A$, temos que

$$3\mathbb{N} \subseteq A \subseteq B$$

donde $3\mathbb{N} \subseteq B$. Isto é $B \in \mathcal{F}$. ■ Vamos usar a definição de base para discorrer sobre o exemplo abaixo.

Exemplo 3.39 Seja X o conjunto de todas as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Defina o conjunto $\mathcal{F}$ como o conjunto de todo $Y \subseteq X$ tal que existe F um conjunto finito não vazio tal que para todo $x \in F$ e $f \in Y$, $f(x) = 0$.

Prova: Considere $\mathcal{D} = \{F \subseteq \mathbb{R} \mid F \text{ é finito}\}$. Para cada $F \in \mathcal{D}$, seja $X_F = \{f \in X \mid f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F\}$. Seja $\mathcal{B} = \{X_F \mid F \in \mathcal{D}\}$.

Vamos provar que $\mathcal{B}$ é a base de um filtro:

1) Para todo $F \in \mathcal{D}$, a função identicamente nula, $\mathbf{0}$, definida por $\mathbf{0}(x) = 0$ pertence a X_F , donde não existe $X_F \in \mathcal{B}$ tal que $X_F = \emptyset$. Isto é, $\emptyset \notin \mathcal{B}$,

2) Sejam F_1 e F_2 dois subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ e seja $F = F_1 \cup F_2$. Toda função f em X_F pertence a X_{F_1} e a X_{F_2} , donde $X_F \subseteq X_{F_1} \cap X_{F_2}$. Em conclusão, para todo X_{F_1} e X_{F_2} em $\mathcal{B}$, existe um conjunto $X_F \in \mathcal{B}$ tal que $X_F \subseteq X_{F_1} \cap X_{F_2}$. ■

Exemplo 3.40 Considere os subconjuntos de $\mathbb{N}$, $\{0, 17\}$ e $\{17\}$. O filtro dado pelos sobreconjuntos de $\{17\}$, isto é todos os subconjuntos $X \in \mathbb{N}$ tal que $17 \in X$ é mais fino do que o filtro dado pelos sobreconjuntos de $\{0, 17\}$.

Provar esse exemplo é tarefa do leitor.

3.5 Exercícios

Exercício 3.41 Prove que o conjunto definido em 3.14 é em Bem Ordenado.

Exercício 3.42 Prove que dado um conjunto não vazio X e $\emptyset \neq Y \subseteq X$, o conjunto $\mathcal{F}$ como o conjunto de todos subconjuntos de X que contêm Y é um filtro.

Exercício 3.43 Para todo $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $\mathcal{I} = \dots$ (Tarefa para Gladys: colocar os ideais de $\mathbb{Z}n$ e observar o que são os ideais primos).

Exercício 3.44 Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ os subconjuntos de $(P)(\mathbb{N})$ dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} &\{X \subseteq \mathbb{N} \mid 7 \in X \wedge (\exists p(p \text{ primo} \wedge \forall n \in \mathbb{N} np \in X)), \\ &\{0, 7, 12\}, \{1, 7, 12, 21\}, \{7, 21, 35\}, \{4, 7, 21, 35\}\} \end{aligned}$$

Prove que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ geram o mesmo filtro, quer seja o filtro dado por todos os sobreconjuntos de $\{7\}$.

Exercício 3.45 Prove que o o conjunto gerado pelas condições 3.18'

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Para todos A e B em $\mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$;
3. Para todo A em $\mathcal{F}$ e $B \supseteq A$, $B \in \mathcal{F}$.

é $(P)(X)$.

Exercício 3.46 Seja $\mathcal{F}$ o filtro em $\mathbb{N}$ gerado por $\{3, 7, 13\}$. Quais são os ultrafiltros que estendem $\mathcal{F}$?

Capítulo 4

Números Ordinais e Cardinais

Introduzimos nessa seção o conceito de números ordinais e números cardinais.

Sabemos que todos conjunto pode ser bem ordenado. Ora, então nosso próximo passo é estabelecer propriedades de conjuntos bem ordenados.

Nós adicionamos ao nosso sistema de axiomas o axioma da escolha. Equivalentemente, nós aceitamos como axioma que todo conjunto pode ser bem ordenado. Ordenar e contar serão formas de estabelecermos ordem em conjuntos. As palavras contar, ordenar, comparar ganham os conceitos, a primeira vista distintos de cardinal e ordinal.

Os resultados obtidos serão bastante interessantes.

Vamos, em primeiro lugar estabelecer a noção de cardinais. Essa noção tem o sabor intuitivo de contar e comparar elementos de dois conjuntos sem levar em conta possíveis relações de ordem nos conjuntos. É a idéia mais próxima da intuição de contagem.

Vamos ilustrar essa estória de contar com uma conto

Folclore 4.1 *Existia na Hungria uma vila onde, incrivelmente, os seus habitantes não sabiam contar. Isso foi há muito tempo, muito tempo, muito tempo atrás. Ora, o chefe da vila era escolhido, por uma ano, como a pessoa que tinha mais ovelhas na cidade. Como esse chefe era escolhido, se as pessoas não sabiam contar?*

Uma resposta: As pessoas poderiam fazer dois cercados para as ovelhas e dois candidatos a chefe poriam suas ovelhas, cada rebanho em um dos cercados.

Abre-se a porta dos dois cercados e faz-se passar uma ovelha de cada candidato. Sucessivamente até que o candidato que tem mais ovelhas é o dono do rebanho onde sobram ovelhas. Repete-se o processo de compração com o vencedor da primeira comparação e um novo candidato, até serem esgotadas as contagens. O vencedor é aquele que, comparadas ovelha a ovelha de cada rebanho, fica com ovelhas sobrando no cercado.

E em caso de empate? A aldeia fica sem chefe porque as pessoas discutem os critérios de desempate por um ano, mas, na minha experiência, *nós* não precisamos do chefe! ■

Vamos transportar essa idéia de comparação para dois conjuntos.

Definição 4.2 *Sejam A e B dois conjuntos. Diremos que A e B tem a mesma cardinalidade, denotada por $|A| = |B|$ se existe uma função f bijetora de A em B .*

Exemplo 4.3 *Os conjuntos dos naturais e dos pares dos naturais tem a mesma cardinalidade.*

Prova: Seja $2\mathbb{N}$ o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} | (\exists m \in \mathbb{N})(n = 2m)\}$$

Defina $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ como $f(x) = 2x$. Essa função é

Injetora: Se $f(x) = f(y)$, então $2x = 2y$. Dai, $x = y$.

Sobrejetora: Se $m \in 2\mathbb{N}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2n$. Dai, $f(n) = m$. ■

Exemplo 4.4 *Os conjuntos dos naturais e dos naturais maiores do que 50 tem a mesma cardinalidade.*

Prova: Seja $\mathbb{N}_{50}$ o conjunto $\{m \in \mathbb{N} | 50 < m\}$. Defina $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{50}$ como $f(m) = 50 + m$. Essa função é

Injetora: Se $f(x) = f(y)$, então $x + 50 = y + 50$. Dai, $x = y$.

Sobrejetora: Se $m \in \mathbb{N}_{50}$, então $50 < m$. Dai, $m - 50 > 0$. Dese modo, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j = m - 50$. Agora, $f(j) = j + 50 = m - 50 + 50 = m$. ■

Exemplo 4.5 *Os conjuntos dos naturais e o conjunto $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ dado pela união disjunta de duas cópias dos naturais, $\mathbb{N} \times 0 \cup \mathbb{N} \times 1$ tem a mesma cardinalidade.*

Prova: Prove que a função $f(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} + \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{n}{2}, 0) & n \text{ par} \\ (\frac{n-1}{2}, 1) & n \text{ impar} \end{cases}$$

é bijetora. ■

Exemplo 4.6 *O conjunto dos racionais e dos reais **não** tem a mesma cardinalidade.*

Prova: Decorre do

Capítulo 5

Conjuntos Hereditariamente Finitos

5.1 Introdução

Neste capítulo usamos os axiomas básicos da teoria dos conjuntos para justificar a construção dos números naturais e dos conjuntos hereditariamente finitos.

A seguir, aprofundamos nossa discussão sobre os números naturais e os conjuntos hereditariamente finitos, apresentando aplicações.

5.2 Conjuntos Hereditariamente Finitos

Conjuntos hereditariamente finitos e, seu caso particular, os números naturais são o mais concreto dos objetos matemáticos. Toda a estrutura sintaxe da lógica formal, como fórmulas ou provas são codificadas como conjuntos hereditariamente finitos.

Antes de darmos duas definições de conjuntos hereditariamente finitos, as quais provaremos serem equivalentes, vamos a uma ilustração do que estamos, recursivamente, construindo. O ramo da esquerda da figura representa o conjunto de números naturais.

Primeiro, vamos caracterizar a noção (ingênua) ilustrada na Figura 5.1, onde formamos conjuntos cujos elementos são conjuntos finitos.

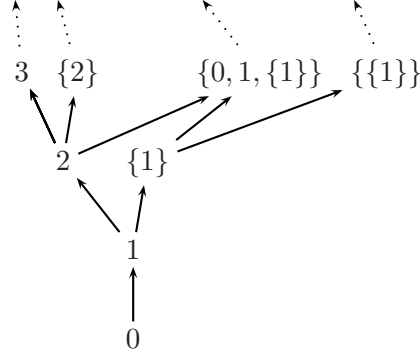


Figura 5.1: Conjuntos Finitos

Definição 5.1 *Conjuntos hereditariamente finitos são elementos do conjunto $\mathcal{H}$ que é construído por*

- $\emptyset \in \mathcal{H}$;
- Se $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{H}$, então $\{x_1, x_2, \dots\} \in \mathcal{H}$

Em outras palavras, $\mathcal{H}$ é a classe dos conjuntos fechados pela operação de formação de pares.

Observe que o próprio conjunto $\mathcal{H}$ é infinito (existe pelo Axioma ??), porém seus elementos são conjuntos finitos, definidos logo acima.

Na nossa segunda caracterização usaremos conjunto de potências. Nossa definição, mais sintética, será justificada pelos axiomas básicos de **ZFC**.

Definição 5.2 *Defina a sequência de conjuntos $R_0, R_1, \dots$ e o seu conjunto limite como:*

- $R_0 = \emptyset$;
- $R_{n+1} = \mathcal{P}(R_n)$;
- $R_\omega = R_0 \cup R_1 \cup \dots$

Nosso trabalho agora é demonstrar que as duas coleções são as mesmas:

Lema 5.3 *Se $x \in \mathcal{H}$, então $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{H}$.*

Prova: Pela definição de $\mathcal{H}$, todo subconjunto *finito* de $\mathcal{H}$ é elemento de $\mathcal{H}$ e, reciprocamente, um elemento de $\mathcal{H}$ é um subconjunto finito de $\mathcal{H}$.

Seja $\mathcal{H}$. Se $y \in \mathcal{P}(x)$, então $y \subseteq x$. De fato, pela definição de $\mathcal{P}(x)$

$$\forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in \mathcal{P}(x))$$

Como x é finito, então $\mathcal{P}(x)$ é finito (Veja o Exercício 5.7). Desse modo, $\mathcal{P}(x)$ é um subconjunto finito de $\mathcal{H}$ e daí um membro de $\mathcal{H}$. ■

Vejamos agora parte da igualdade das duas coleções:

Teorema 5.4 1. *Para cada n , $\mathcal{R}_n \in \mathcal{H}$;*

2. $\mathcal{R}_\omega \subseteq \mathcal{H}$.

Prova: 1) Por definição, $\mathcal{R}_0 = \emptyset \in \mathcal{H}$. Por indução, se $\mathcal{R}_n \in \mathcal{H}$, pelo Lema 5.3, então $\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{P}(\mathcal{R}_n) \in \mathcal{H}$.

2) Suponha que $x \in \mathcal{R}_\omega$. Então existe n tal que $x \in \mathcal{R}_n$. Por 1), $\mathcal{R}_n \in \mathcal{H}$ e daí qualquer membro de $\mathcal{R}_n$ é hereditariamente finito, daí $x \in \mathcal{H}$. Em conclusão $\mathcal{R}_\omega \subseteq \mathcal{H}$. ■

O leitor deve notar que $\neg(\mathcal{R}_\omega \in \mathcal{H})$, desde que $\mathcal{R}_\omega$ não é finito, uma vez que o conjunto dos naturais é subconjunto de $\mathcal{R}_\omega$. Pelo Exercício 5.8), o conjunto dos números naturais está contido em $\mathcal{R}_\omega$. De fato, todo conjunto hereditariamente finito pertence a $\mathcal{R}_\omega$:

Teorema 5.5 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_\omega$.

Prova: Temos, por definição que $\emptyset \in \mathcal{R}_\omega$ e $\emptyset \in \mathcal{H}$.

Suponha que temos contruídos os conjuntos hereditariamente finitos $x_1, x_2, \dots, x_k$, cada um deles pertencente a $\mathcal{H}$.

Agora, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{H}$. Vamos mostrar que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{R}_\omega$. De fato, como $x_1 \in \mathcal{R}_\omega$, existe $\mathcal{R}_{n_1}$ com $x_1 \in \mathcal{R}_{n_1}$. Analogamente, seja n_j , $2 < j \leq k$ tal que $x_j \in \mathcal{R}_{n_j}$.

Seja Max o máximo ente $n_1, n_2, \dots, n_k$

Note que a demonstração do Teorema 5.5 é um algoritmo que conta *como* gerar cada conjunto hereditariamente finito. Estamos falando desse modo de algoritmos, de provas.

Definição 5.6 *Um conjunto hereditariamente finito x tem posto n se $x \in \mathcal{R}_n$ mas $\neg(x \in \mathcal{R}_{n+1})$*

5.3 Exercícios

Exercício 5.7 *Justifique o nome potenciação e mostre que um conjunto com n elementos tem 2^n elementos.*

Exercício 5.8 *Se n é um número natural, então $n \in \mathcal{R}_\omega$.*

Exercício 5.9 *Se x é hereditariamente finito, então o posto de cada elemento de x tem posto menor do que o posto de x .*

Capítulo 6

Mais de Lógica

Essa seção ainda está em construção. Vá, por enquanto, até a próxima seção.

Os símbolos (conectivos) Booleanos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ tem uma tabela tautológica, se a gente pensar só em logica clássica (existem outras lógicas que não obedecem essas tabelas, mas isso é “papo” para outro curso, quem sabe?).

Se denotarmos *Verdadeiro* por $\top$ e *Falso* por $\perp$, essas tabelas (tautológicas) são dadas por

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

p	q	$p \rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Bom, agora nosso “trabalho de lógico” é chamar de *tautologia* ou teorema de lógica clássica tudo aquilo que, passado por essa tabela, independentemente do valor Booleano, dê como resultado final $\top$. Exemplo:

Exemplo 6.1 Prove as seguintes tautologias:

- $A \vee \neg A$;
- $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$;
- $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$;

Prova: $A \vee \neg A$:

A	$\neg A$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Donde:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$

$A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$:

A	$\neg A$	B	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$

$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$:

A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

A tabela de $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ é dada por:

A	B	C	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

Como as duas tabelas, dados os mesmos valores Booleanos, coincidem, então as sentenças são equivalentes.

Exercício 6.2 *Prove que*

1. $p \wedge (q \vee r) \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)];$

2. $p \vee (q \vee r) \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)];$

3. $p \equiv \neg\neg p;$

Capítulo 7

Os Racionais e os Reais

Antes de enunciar toda axiomatização de teoria dos conjuntos, o leitor pode “jogar” com a intuição a respeito desses conjuntos. Agora, com certa maturidade, vamos rever os conceitos de reais, racionais e inteiros que, acredito, tenham sido estudados nas aulas de álgebra e análise.

Se temos uma idéia do que é o conjunto dos números naturais, vimos nas aulas de álgebra as seguintes construções:

1. O anel dos inteiros, $\mathbb{Z}$;
2. O corpo dos racionais, $\mathbb{Q}$;
3. O corpo dos números algébricos;
4. O corpo dos números reais, $\mathbb{R}$.

(Se você gosta de álgebra, um bom livro para rever esses assuntos é o Hungerford, [3].)

Vimos, sob outra abordagem, nas aulas de análise, como, a partir de $\mathbb{Q}$, via cortes de Dedekind, podemos completar $\mathbb{Q}$ para obter $\mathbb{R}$.

Veremos, então, com nossa própria abordagem, excelente para introduzirmos a idéia de números ordinais e números cardinais.

Capítulo 8

Alguns Exercícios sugeridos por alunos

Exercício ??. Verdadeiro ou falso. Justifique:

1. $\emptyset = \{\emptyset\}$: Falso pois $\emptyset \in \{\emptyset\}$ e não é verdade que $\emptyset \in \emptyset$;
2. $\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\}$: Verdadeiro, pois $0 \in \{0, 1, 2\}$ e $0 \in \{2, 0, 1\}$, $1 \in \{0, 1, 2\}$ e $1 \in \{2, 0, 1\}$, $2 \in \{0, 1, 2\}$ e $2 \in \{2, 0, 1\}$. Como 0, 1, 2 são os únicos elementos desse conjunto, temos a asserção verificada;
3. $\{0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2\} \neq \{0, 1, 2\}$:
Verdadeiro pois $3 \in \{0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2\}$ e $3 \notin \{0, 1, 2\}$ (dois conjuntos são iguais se seus elementos são os mesmos);
4. $\{\{\emptyset\}$ é um conjunto: Falso. Essa expressão é mal formada;
5. $\{\{\{\emptyset\}\}\} \neq \{\{\emptyset\}\}$: Verdadeiro. $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\{\emptyset\}\}\}$, mas $\{\{\emptyset\}\} \notin \{\{\emptyset\}\}$.

Exercício 2.32. O símbolo $\cup$ representa, a partir de agora, a união de conjuntos dada pelo axioma da união.

Decida então se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique a sua resposta.

1. $\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1\}$. Falso.

$$\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1, \{0\}, \{1\}\}$$

e

$$\{1\} \in \{0, 1, \{0\}, \{1\}\}$$

mas

$$\{1\} \notin \{0, 1\}$$

2. $\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1, \{\{0\}, \{1\}\}\}$. Falso, veja justificativa acima;
3. $\{0, 1\} \cup \{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1, \{0\}, \{1\}\}$. Verdadeiro, veja a união dada acima.

Exercício 2.33. Dado A um conjunto e P uma propriedade, prove que existe um único $B = \{x \in A | P(x) = V\}$. Lembre-se de que $P(x) = V$ abrevia P é verdadeira em x .

Prova do exercício 2.33. Sejam B e B' tais que $B = \{x \in A | P(x) = V\}$ e $B' = \{x \in A | P(x) = V\}$. Agora, $t \in B$ see $x \in A \wedge P(t)$ é verdadeira, see, pela definição de B' , $t \in B'$. Desse modo, $t \in B$ see $t \in B'$

Exercício ??. Sejam A e B dois conjuntos. Você pode justificar a formação do conjunto $\{A, B\}$? E do conjunto $\{A, \{A, B\}\}$? Identifique dessa forma o *par ordenado* (x, y) com uma contrução como acima.

Prova do exercício ??. Usando o axioma de formação de pares, podemos construir o conjunto $\{A, B\}$ a partir dos conjuntos A e B . Dai, pelo mesmo axioma, podemos "construir" $\{A, \{A, B\}\}$ a partir dos conjuntos A e $\{A, B\}$.

O *par ordenado* (x, y) é identificado com o conjunto $\{x, \{x, y\}\}$, que é um conjunto 'permitido' em nossa teoria de conjuntos.

Definimos uma relação de *boa ordem*, $\leq$ como:

PO1 Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então, $x \leq z$;

PO2 $x \leq x$;

PO3 Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;

Lin Para todo x, y em A , $x \leq y$ ou $y \leq x$;

BO Para todo $D \subseteq A$, existe um *primeiro elemento* x em D ($x \in D$ e se $y \in D$ é tal que $y \leq x$, então $x = y$).

Exercício ??. Prove que a condição *Lin* acima é desnecessária, isto é, *PO1*, *PO2*, *PO3* e *BO* implicam *Lin*.

Prova do exercício ??. Bem, o que queremos dizer é que poderíamos ter escrito apenas *PO1*, *PO2*, *PO3* e *BO* que *lin* decorreria dessas premissas.

De fato, seja $x, y \in A$. Por *BO*, temos que $D = \{x, y\} \subset A$ tem primeiro elemento. Suponha, sem perda de generalidade que esse elemento é x . Dai, $x \leq x$ e $x \leq y$. Dai, $x \leq y$.

Exercício 2.35. Justifique o complementar de conjuntos: $\forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w \in x \wedge w \notin y))$. Denote a operação de intersecção de x por y de $x \setminus y$. Voce tem alguma representação de diagrama para o complementar?

Prova do exercício 2.35. Use o axioma da compreensão sobre o conjunto x e a propriedade P dada por

$$\forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w \in x \wedge w \notin y))$$

O diagrama eu fico devendo até achar um computador com *x-fig*.

Uma seleção no **Exercício 2.39.** Prove:

1. $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;
3. $A \setminus B \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Leis Distributivas);
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Leis Distributivas);
6. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (Leis de DeMorgan);
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (Leis de DeMorgan).

Prova do exercício 2.39. Eu faço os 2, 4 e 6. Você faz o resto. Justo?

Parte 2. $x \in A \cap B$ see $x \in A \wedge x \in B$ see $x \in A \wedge (x \notin A \setminus B)$. Use $p \wedge q \equiv (p \wedge (\neg p \vee q))$ para essa última equivalência.

Agora, $x \in A \wedge (x \notin A \setminus B)$ see $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Desse modo, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Parte 4. $x \in A \cap (B \cup C)$ see $x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ see $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$. Distribuindo, temos a seguinte equivalência: $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$. O que equivale a dizer que $(x \in A \cap B) \cup (x \in A \cap C)$.

Desse modo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Parte 6. $x \in A \setminus (B \cap C)$ see $x \in A \wedge \neg(x \in (B \cap C))$, see $x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C)$.

Usando $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, temos que a última expressão equivale a: $x \in A \wedge (\neg x \in B \vee \neg x \in C)$. Distribuindo,

$$x \in A \wedge (\neg x \in B \vee \neg x \in C) \equiv ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge \neg x \in C))$$

Isto é, $x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C$. Dai $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Desse modo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercício ??. Prove que se X e Y são conjuntos e f é uma função injetora de X em Y , para todo $A, B \subset X$, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ e $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$. De um contra-exemplo para essa asserção se f não for injetora.

Prova do exercício ??.

Deste modo, as asserções acima são equivalentes a

$$\exists w \in X (w \in A \wedge x = f(w)) \wedge w \in B \wedge x = f(w))$$

isto é,

$$\exists w \in X (x = f(w)) \wedge w \in A \cap B)$$

o que é equivalente a $x \in f(A \cap B)$. Desse modo, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

$$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B): x \in f(A) \setminus f(B) \text{ see } x \in f(A) \wedge x \notin f(B) \text{ see}$$

$$\exists w \in X (w \in A \wedge f(w) = x) \wedge \neg(\exists w' \in X (w' \in B \wedge f(w') = x))$$

isto é,

$$\exists w \in X (w \in A \wedge f(w) = x) \wedge (\forall w' \in X (f(w') = x \rightarrow w' \notin B))$$

Note que a passagem acima não é trivial. Ela exige você escrever a *tautologia* $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neq q)$.

De novo, f é injetora e se $x = f(w)$ e $w = w'$. Desse modo, se $t = f(x)$ e $t \in A$, $t \notin B$ e a sentença acima implica que (Usando $f(w) = f(w') \rightarrow w = w'$) se $t \in A$ e $f(t) = x$, então $t \notin B$, donde $x \in f(A) \setminus f(B)$.

Suponha agora que $x \in f(A \setminus B)$. Então existe $w \in A \setminus B$ tal que $f(w) = x$. Ora, $w \in A \setminus B$ implica que $w \in A$, desse modo, $x \in f(A)$. Analogamente, $w \in A \setminus B$ implica $w \notin B$. Deste modo, $x \notin f(B)$. Portanto, $x \in f(A) \setminus f(B)$.

Pense no exemplo!

Capítulo 9

Além de ZFC: A teoria das Categorias

Em diversas áreas da Matemática, queremos estudar as propriedades gerais dos objetos que trabalhamos e também como se relacionam, principalmente através de funções específicas de cada tipo. Podemos, por exemplo, estudar os espaços vetoriais e suas transformações lineares, os intervalos e as funções contínuas, os grupos e seus homomorfismos e outros exemplos de categorias (que iremos definir daqui a pouco).

E com isso, estamos “ganhando generalidade” ao estudar “propriedades universais” (esperamos que esses conceitos fiquem claros ao longo do capítulo!). As primeiras definições de categorias foram dadas por Saunders MacLane e Samuel Eilenberg, no fim da década de 40, mas o nosso enfoque segue de muito perto, o livro “Basic Algebra” vol 2 de Nathan Jacobson. Usando as palavras do próprio Jacobson: “Trabalhar com categorias significa uma mudança de direção, da forma usual, onde os objetos eram as coisas mais importantes, para um enfoque onde objetos e morfismos formam uma paisagem mais rica para estudar determinado assunto.”

Citando novamente Jacobson: “a linguagem e os resultados elementares da teoria das categorias permeiam hoje em dia uma parte muito fundamental da matemática”

É impressionante como, em tão poucos anos, a teoria de categorias se alastrou entre todas as áreas da matemática, e está presente em quase todos

os assuntos “atuais”. Provavelmente isto ocorre por ser uma abordagem de fato, ao mesmo tempo, natural, e “universal”!

9.1 Primeiras Definições

Para definir categorias, temos um sério problema: gostaríamos, por exemplo, de trabalhar com todos os grupos, ou com todos os espaços vetoriais, mas para isso queremos considerar um meta-conjunto ou um super-conjunto, onde “caibam ”muitos outros conjuntos (sem contudo, cair nos paradoxos discutidos no começo do livro). Há diversas formas de formalizar a teoria de categorias, citamos algumas:

Pode-se definir axiomáticamente a teoria de Categorias, e derivar a teoria dos conjuntos a partir deste conjunto de axiomas. Claramente esta abordagem foge ao propósito deste livro, mas pode ser encontrado no livro “Categories for the working mathematicians ”de Saunders Mc Lane.

Extender a teoria dos conjuntos para evitar esse tipo de problemas e poder trabalhar com as categorias mais razoáveis, (de qualquer jeito, não cabem todas!!!) e aqui ainda temos duas formas de estender: decretar que toda a matematica cabe dentro de um conjunto **Universo**, mas neste caso, este conjunto, não se comporta como os outros... Ou considerando a *Teoria de Conjuntos* dada por Neumann, Gödel e Bernays, que estende a teoria de ZFC (e portanto nos parece a melhor abordagem, aqui neste contexto).

Definição 9.1 *Segundo a teoria axiomática de Neumann-Gödel-Bernays NBG (que não iremos definir com todos os detalhes, aqui neste capítulo) consideramos dois objetos primitivos “classes”e “conjuntos”onde por definição classes que são elementos de outras classes são conjuntos, isto é, existe o seguinte axioma:*

- *Sejam X e Y classes tais que $Y \in X$ então Y é um conjunto.*

*Intuitivamente podemos pensar que uma classe é uma coleção de conjuntos que são definidos por certas propriedades. Além disso temos que: **Todos os teoremas de ZFC são também teoremas de NBG, e todos os teoremas de NBG que se referem apenas a conjuntos são teoremas de ZFC.***

Sugerimos ao leitor interessado nessa teoria de conjuntos o livro de Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*.

Definição 9.2 ([?]) *Uma Categoria $\mathcal{C}$ consiste de:*

- 1) *uma classe de objetos, denotada por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.*
- 2) *Para cada par ordenado (A, B) de objetos em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ cujos elementos são chamados de morfismos com domínio A e contradomínio B .*
- 3) *Para cada terna ordenada de objetos (A, B, C) , existe uma função:*
 $(f, g) \rightarrow f \circ g$ *do conjunto*
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C).$

Além disso, supomos que morfismos e objetos satisfazem as seguintes condições:

- a) *Se $(A, B) \neq (C, D)$ os conjuntos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ são disjuntos.*
- b) *Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ então vale:*
 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$
- c) *Para cada objeto A existe um elemento 1_A em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ (que é único para cada A), talque $f \circ 1_A = f$, $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, e $1_A \circ g = g$ $\forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.*

Definição 9.3 *Uma categoria $\mathcal{D}$ é uma subcategoria da categoria $\mathcal{C}$ se $\text{Obj}\mathcal{D}$ é uma subclasse de $\text{Obj}\mathcal{C}$ e para cada par de objetos A e B em $\text{Obj}\mathcal{D}$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Além disso, 1_A e a composição de dois morfismos deve ser a mesma nas duas categorias.*

Vejamos exemplos de categorias:

Exemplo 9.4 • *O exemplo que primeiro lembramos, é também, um exemplo que parece simples, mas nos remete diretamente aos paradoxos da teoria dos conjuntos: Consideramos como objetos, todos os conjuntos, e como morfismos todas as funções. e nos perguntamos, quem é $\text{Obj}(\mathcal{C})$?? Obviamente, como já vimos no Capítulo ??¹ $\text{Obj}(\mathcal{C})$ não pode ser um conjunto, pelo menos considerando o sistema de Axiomas ZFC, que estivemos usando até agora. Aqui $\text{Obj}(\mathcal{C})$ é uma classe.*

¹Procure e corrija

- Nosso próximo exemplo, por outro lado, é um exemplo muito significativo, pois daqui vieram certas idéias que deram origem à noção de “naturalidade” e transformação natural (que será definida logo adiante): Aqui, fixamos um corpo $\mathcal{K}$, e consideramos que os objetos são os $\mathcal{K}$ -espaços vetoriais de dimensão finita, e os morfismos as transformações lineares entre eles. Isto é, definimos: $\text{Obj}(\mathcal{C}) = \{V | \dim_{\mathcal{K}} V < \infty\}$ e dados U e V em $\text{Obj}(\mathcal{C})$ o conjunto (é fácil ver que são de fato conjuntos) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$ cujos elementos são as transformações lineares entre U e V . Alias, observe que o conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$ é ele próprio um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$.

Através dessa categoria, veremos como relacionar objetos diferentes de uma maneira “natural”, idéia essa que está na base da definição das transformações naturais, que são funções entre funtores, eles próprios, funções entre categorias.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, construímos a partir de $\mathcal{C}$ uma nova categoria denominada $\mathcal{C}^{op}$ fazendo $\text{Obj}\mathcal{C}^{op} = \text{Obj}\mathcal{C}$ e para cada par de objetos A e B em $\text{Obj}\mathcal{C}^{op}$ definimos $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C)$ então $g \circ f$ em $\mathcal{C}^{op}$ é dado por $f \circ g$ em $\mathcal{C}$, e para cada $A \in \text{Obj}\mathcal{C}^{op}$ 1_A é definida da mesma forma que em $\mathcal{C}$. É fácil ver que isto de fato define uma categoria, chamada de categoria oposta de $\mathcal{C}$. Intuitivamente dizemos que $\mathcal{C}^{op}$ reverte as flechas de $\mathcal{C}$.

De maneira natural, perguntamos: como se relacionam diversas categorias? que tipo de “funções” há entre elas? Definimos agora como são as **flechas** entre categorias:

Definição 9.5 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, um funtor (covariante) $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dado por duas funções, que são, em geral, representadas pela mesma letra $\mathbf{F}$ que satisfazem: $\mathbf{F} : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ e, para quaisquer objetos A e B de $\mathcal{C}$ temos*

$\mathbf{F} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B))$ de modo que o quadrado abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{F}(A) & \longrightarrow & \mathbf{F}(B) \end{array}$$

Para definir o funtor contravariante considere o quadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{F}(A) & \longleftarrow & \mathbf{F}(B) \end{array}$$

Além disso, F satisfaz as condições: Se a função composta $g \circ f$ está definida em $\mathcal{C}$, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ e $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$

É fácil ver que dar um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é equivalente a dar um funtor covariante $F^* : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$

A composição de dois ou mais funtores se define de maneira natural. Observe que a composição de dois funtores covariantes ou dois contravariantes será um funtor covariante.

Definição 9.6 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor, diremos que F é:*

- **fiel** se para todo par de objetos A e B em $\mathcal{C}$ a função $\mathbf{F} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B))$ é injetora.
- **pleno** se para todo par de objetos A e B em $\mathcal{C}$ a função $\mathbf{F} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B))$ é sobrejetora.
- **denso** se para todo objeto X em $\mathcal{D}$ existe um objeto A em $\mathcal{C}$ tal que $X \cong F(A)$.

Definição 9.7 *Dados dois funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ uma transformação natural*

Referências Bibliográficas

- [1] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, 1997.
- [2] Hrbacek, Jech, T. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc, 1999. Third Edition, Revised and Expanded.
- [3] Hungerford, T. W. *Algebra*. Holt, Rineart and Winston, Inc., 1974.
- [4] Kunnen, K. *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs*. North–Holland, 1980. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.
- [5] McCawley, J.D. *Everything that Linguistics have Always Wanted to Know about Logic*. The University of Chicago Press, 1981.
- [6] Smullyan, R. Fitting, M. *Set Theory and the Continuum Problem*. Oxford University Press, 2000.