Comentários sobre a preparacão para o P2

O P2 em principio dar enfase no material feito deste o P1, entretanto pode tambem incluir material do primeiro parte do curso. Dai deveria começar com o estudo do gabarito do P1, e os gabaritos das provinhas. Depois isto, deveria estudar as listas de exercisios, e as minhas e suas notas de aula, e depois isto, estudar a parte teorica dos livros.

Notas de aula sobre o ultimo assunto: autovetores e autovalores e a diagonalização de matrizes.

Exercisio: faça a diagonalização das matrizes:
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

O primeiro destas foi feito na aula, que vou repetir aqui. O segundo se ache no Example 5.16 do livro do Poole (em ingles), exemplo 1 do §5.5 (versão portugues).

Definition 0.1. Uma matriz M $(n \times n)$ tem *autovetor* $\mathbf{v}$ com *autovalor* λ (isto possivelmente um numero complexo) sse $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Isto vále sse

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

mas

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = (M - \lambda I)\mathbf{v}$$

dai isto tem solução não-$\mathbf{0}$ sse $N = M - \lambda I$ é não-invertivel sse $\det N = 0$.

Dai para achar autovetores (se existem!) do M,
(1) procuramos os possiveis autovalores, que são exatamente os raizes do *polinomio carateristico* do M, $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$.
(2)para cada raiz λ, procuramos um autovetor. (3)se temos n autovalores e vetores, podemos *diagonalizar* a matriz, isto é, achar uma nova base de $\mathbb{R}^n$, tal que a matriz é diagonal ao respeito este base. A matriz que dar a mudança de base e simplesmente feito com colunas iguais os autovetores, como nos exemplos.

O polinomio carateristico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é por definição $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$; tem fatorização $p(\lambda) = (\lambda - \lambda^+)(\lambda - \lambda^-)$ para $\lambda^\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Um autovetor correspondendo ao valor λ é $(x, 1)$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

dai $x = \lambda$. Notando que $\lambda^+\lambda^- = -1$, os autovetores $(\lambda^\pm, 1) = \mathbf{v}^\pm$ de fato são ortogonais (verifique!). Definamos B igual a matriz com colunas $\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-$. Segue que $B^{-1}AB = D$ é diagonal onde $D = \begin{bmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{bmatrix}$.

Exercisio: Verifque que $\det B = -1$. Calcule B^{-1}. (Feito na aula). Verifiqe que de fato $B^{-1}AB = D$, e tente entender esta equação alem da conta. (Eu tentei explicar na aula, utilizando uma diagrama).

Exercisio: Utilizando este resultado, podemos diagonalizar $M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (sem fazer mais trabalho). Podemos tambem calcular M^{99} sem trabalho. Veja os exercisios de pagina 3.9 da Lista 3 de exercisios abaixo , tirado da pagina 281 do Poole.

Observação: as colunas $\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-$ do B podem ser normalizadas (multiplicados por uma constante para ter norma 1), e a matriz com estas colunas e agora ortogonal.

O que deveria estudar sobre o assunto de autovetores e autovalores: Na lista 3 abaixo, deveria estudar as páginas 3.3-3.10, com exeção dos exercisios sobre Cayley-Hamilton, numeros 35, 36, 37, 38 da §4.4 (página 3.7 abaixo). A restante da lista 3 vále. Do parte do Poole em ingles, deveria ler Example 5.16, fazer Exercises 5.4 1,2,3,4,11, 15.

Albert M. Fisher, Dept Mat IME-USP, Caixa Postal 66281, CEP 05315-970 São Paulo, Brazil

URL: `http://ime.usp.br/~afisher`

E-mail address: `afisher@ime.usp.br`