FISHER

 13/04

Pasta 24

Nº cópias 08

Produto Interno :

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ satisfaz:

(1) $\underline{v} \cdot \underline{w} \in \mathbb{R}$

(2) $\underline{v} \cdot (\underline{w} + \underline{z}) = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{z}$

(3) $(\alpha \underline{v}) \cdot \underline{w} = \alpha (\underline{v} \cdot \underline{w})$

(4) $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$ sempre, e

$\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$.

Em $\mathbb{R}^2$, pelo produto interno padrão, temos dois definições equivalentes:

Definição geometrica :

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \cos\theta$ onde

$\theta =$ o angulo entre $\underline{v}, \underline{w}$

Definição algebrica :

$\underline{v} = (a, b)$ $\underline{w} = (c, d)$ então

$\underline{v} \cdot \underline{w} = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd.$

Podemos verificar os propriedades (1)–(4) separadamete para ambos os definições, e tambem podemos verificar que eles dar a mesma coisa.

A utilidade do produto interno é que, tendo a definição algébrica num lado (que é fácil calcular), temos a def. geométrica no outro (que dar a significado). Por exemplo, o tamanho:

$$\underline{v}\cdot\underline{v} = \|\underline{v}\|\,\|\underline{v}\| \underbrace{\cos 0}_{=1} \qquad (\text{pois } \cos 0 = 1)$$

então a norma do vetor $\underline{v} = (a,b)$ é

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = (\underline{v}\cdot\underline{v})^{1/2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Mas a mesma coisa funciona em $\mathbb{R}^n$, p. qualquer dimensão n! então, em $\mathbb{R}^4$,

$\|(a,b,c,d)\| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$ é a norma.

Também, o ângulo entre dois vetores:

$\underline{v} \perp \underline{w}$ (são perpendiculares)

sse $\theta = \frac{\pi}{2}$, sse $\underline{v}\cdot\underline{w} = \|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\| \underbrace{\cos\theta}_{0} = 0$; então $(a,b) \perp (c,d)$

se e somente se $ac+bd=0$.

Exemplo: Produto interno no espaço de Hilbert, $\mathcal{H} = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } \int_0^1 f^2(x)\, dx < \infty \right\}$

definição: $f \cdot g = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$.

OBS: $\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(x)\, dx$, então $\mathcal{H}$ é todos os funções "de tamanho finito"!

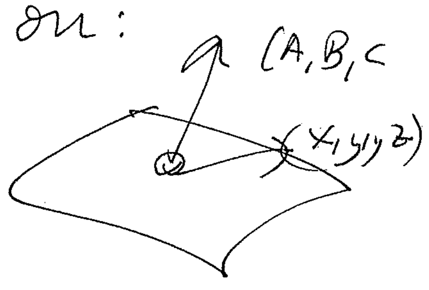
Frequentamente nos utilizamos o produto interno para definir planos, retas etcetera:

O plano perpendicular o vetor (A, B, C) vai ser todos os pontos (vetores) (x, y, z) tal que $(A, B, C) \perp (x, y, z)$ isto é:

$(A, B, C) \cdot (x, y, z) = 0$

$$\boxed{Ax + By + Cz = 0}$$

ou:



Outra exemplo:

Escreve a equação do plano que passa pelo origim $(0,0,0) = \underline{0}$ e que e perpendicular ao vetor $(1,1,1) = \underline{v}$

Resposta: todos os $\underline{u} = (x, y, z)$ tal que $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

$$\boxed{x + y + z = 0.}$$

---

exercisios:

1) Dado o plano $Ax + By + Cz = 0$ ache uma vetor perpenicular o plano,

2) O mesmo pelo plano
$$3x + 2y - z = 0.$$

3) O mesmo pelo plano
$$3x + 2y - z + 1 = 0.$$

4) Ache a equação do plano que é $\perp$ a $(3, 2, -1)$ e que passa pelo ponto $(1, 1, 1)$.

Kernel (nucleo) e imagem de uma transformação linear:

Dado $f : V \to W$ linear,

$\text{Kernel}(f) = \{ \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0} \}$

$\text{Im}(f) = \{ \underline{w} \in W : \text{existe } \underline{v} \in V \text{ com } f(\underline{v}) = \underline{w} \}$

OBS: Ambos são espaços vetoriais. (exercisio!).

Exemplos:
$$\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)$$

define uma tf. linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

O kernel do f é o plano
$$Ax + By + Cz = 0 \quad !!$$

O kernel do transformação dado por
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

é a interseção dos dois planos
$$(3,1,2) \cdot (x,y,z) = 0$$
$$(1,1,1) \cdot (x,y,z) = 0.$$

O kernel da transformação

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$ é a interseção de 3 planos. (Em geral vai ser <u>um ponto só</u>! Isto quer dizer, as 3 equações em 3 variaveis

$$3x + y + 2z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$x = 0$$

teria uma solução).

<u>OBS</u>: Mas, se dois das linhas são ~~depen~~ multiplos - a interseção vai ser uma linha!

Temos visto que é possivel especificar um plano ou uma linha utilizando a ideia de <u>kernel</u>. Tambem podemos utilizar a <u>imagem</u>. ~~Exemplos~~:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [t] = \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$(3\times 1)(1\times 1) = (3\times 1)$$

isto define uma tf. linear de $\mathbb{R}$ ate $\mathbb{R}^3$.

A imagem e' a <u>linha</u>

$$\gamma(t) = (3t, t, 2t) = t(3,1,2).$$

Chamanos isto uma <u>reta</u> <u>parametrizado</u>,

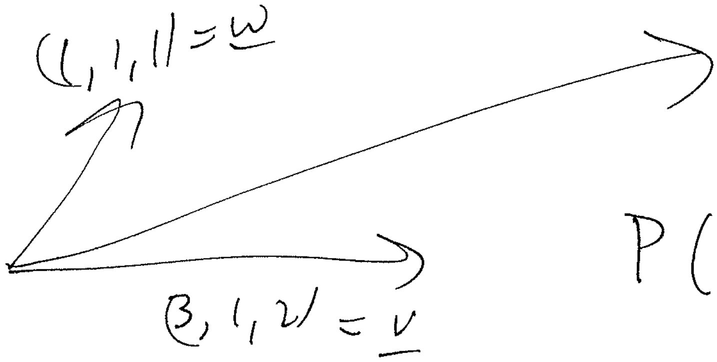
no caso uma <u>reta</u> <u>que passa pela origim</u>.

Tambem temos <u>planos</u> <u>parametrizados</u>:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t+s \\ t+s \\ 2t+s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(3\times 2)(2\times 1) = (3\times 1)$$

isto dar ~~um~~ plano que esta determinado pelas <u>colunas</u> da matriz $\underline{v}, \underline{w}$:



$t\underline{v} + s\underline{w}$

$$P(t,s) = t\underline{v} + s\underline{w}.$$

Tambem temos retas e planos parametrizados que <u>não</u> passam pela origem, e tambem temos <u>soluções</u> de <u>equacões</u> com valor $\neq \underline{0}$:

$$(A, B, C) \cdot (x, y, z) = -D \neq 0$$

vai dar o plano

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

e temos o plano parametrizado

$$P(t, s) + \underline{z} = t\underline{v} + s\underline{w} + \underline{z}$$

que passa por $\underline{z}$, etcetera.
