STEWART REVISÃO VETORES

escolhemos um ponto qualquer em um plano e calculamos sua distância ao outro plano. Em particular, se tomarmos $y = z = 0$ na equação do primeiro plano, obteremos $10x = 5$, e portanto $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ é um ponto desse plano. Pela Fórmula 8, a distância entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e o plano $5x + y - z - 1 = 0$ é

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Assim a distância entre os planos é $\sqrt{3}/6$. □

EXEMPLO 10 □ No Exemplo 3 mostramos que as retas

$$L_1:\quad x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2:\quad x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

são retas reversas. Determine a distância entre elas.

SOLUÇÃO Como as retas L_1 e L_2 são reversas, elas podem ser vistas como pertencentes aos planos paralelos P_1 e P_2, respectivamente. A distância entre L_1 e L_2 é igual à distância entre P_1 e P_2, que pode ser calculada como no Exemplo 9. O vetor normal a ambos os planos precisa ser ortogonal aos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1 \rangle$ (vetor diretor de L_1) e $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4 \rangle$ (vetor diretor de L_2). Assim, o vetor normal é dado por

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se impusermos $s = 0$ na equação de L_2, obteremos o ponto $(0, 3, -3)$ pertencente a L_2, e a equação de P_2 fica sendo

$$13(x - 0) - 6(y - 3) - 5(z + 3) = 0 \qquad \text{ou} \qquad 13x - 6y - 5z + 3 = 0$$

Tomando agora $t = 0$ na equação de L_1, obtemos o ponto $(1, -2, 4)$ em P_1. A distância entre L_1 e L_2 é igual à distância de $(1, -2, 4)$ até $13x - 6y + 5z + 3 = 0$. Pela Fórmula 8 essa distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}53$$

□

12.5 Exercícios

1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
   (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
   (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
   (c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
   (d) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
   (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
   (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
   (g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
   (h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
   (i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
   (j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
   (k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

2–5 □ Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

2. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, -3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $\langle 3, 1, -8 \rangle$

4. A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 4 + 3t$

5. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6–10 □ Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$

7. Reta que passa pelos pontos $(3, 1, -1)$ e $(3, 2, -6)$

8. Reta que passa pelos pontos $(-1, 0, 5)$ e $(4, -3, 3)$

9. Reta que passa pelos pontos $(0, \frac{1}{2}, 1)$ e $(2, 1, -3)$

10. Reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

11. Mostre que a reta que passa pelos pontos $(2, -1, -5)$ e $(8, 8, 7)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(4, 2, -6)$ e $(8, 8, 2)$.

12. Mostre que a reta que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$ e $(1, -1, 6)$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-4, 2, 1)$ e $(-1, 6, 2)$.

13. (a) Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto $(0, 2, -1)$ e é paralela à reta com equações paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 5 - 7t$.
(b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

14. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(5, 1, 0)$ e que é perpendicular ao plano $2x - y + z = 1$.
(b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

15–18 □ Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine o ponto de intersecção das mesmas.

15. L_1: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-3}$,
L_2: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$

16. L_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{4}$,
L_2: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

17. L_1: $x = -6t$, $y = 1 + 9t$, $z = -3t$
L_2: $x = 1 + 2s$, $y = 4 - 3s$, $z = s$

18. L_1: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$
L_2: $x = 2 - s$, $y = 1 + 2s$, $z = 4 + s$

19–34 □ Determine a equação do plano.

19. Plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5\rangle$

20. Plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e cuja normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

21. Plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e cuja normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

22. Plano que passa pelo ponto $(-2, 8, 10)$ e é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$

23. Plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

24. Plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

25. Plano que passa pelo ponto $(4, -2, 3)$ e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

26. Plano que contém a reta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

27. Plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$

28. Plano que passa pela origem e pelos pontos $(2, -4, 6)$ e $(5, 1, 3)$

29. Plano que passa pelos pontos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ e $(-1, -2, -3)$

30. Plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

31. Plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

32. Plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta com equação na forma simétrica $x = 2y = 3z$

33. Plano que passa pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contém a reta obtida pela intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

34. Plano que passa pela reta obtida pela intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

35–38 □ Determine o ponto dado pela intersecção da reta e do plano especificados.

35. $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$; $x + y + z = 1$

36. $x = 5$, $y = 4 - t$, $z = 2t$; $2x - y + z = 5$

37. $x = 1 + 2t$, $y = -1$, $z = t$; $2x + y - z + 5 = 0$

38. $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 1 + t$; $z = 1 - 2x + y$

39. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta obtida pela intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

40. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

41–46 □ Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. Nesse caso, calcule o ângulo entre eles.

41. $x + z = 1$, $y + z = 1$

42. $-8x - 6y + 2z = 1, \quad z = 4x + 3y$

43. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

44. $2x + 2y - z = 4, \quad 6x - 3y + 2z = 5$

45. $2x + 4y - 2z = 1, \quad -3x - 6y + 3z = 10$

46. $2x - 5y + z = 3, \quad 4x + 2y + 2z = 1$

47–48 □ (a) Determine a equação na forma simétrica da reta intersecção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

47. $x + y - z = 2, \quad 3x - 4y + 5z = 6$

48. $x - 2y + z = 1, \quad 2x + y + z = 1$

49–50 □ Determine as equações na forma paramétrica da reta obtida pela intersecção dos planos.

49. $z = x + y, \quad 2x - 5y - z = 1$

50. $2x + 5z + 3 = 0, \quad x - 3y + z + 2 = 0$

51. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são eqüidistantes dos pontos $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

52. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são eqüidistantes dos pontos $(-4, 2, 1)$ e $(2, -4, 3)$.

53. Determine a equação do plano que intercepta o plano yz em a, intercepta o plano xz em b e intercepta o plano xy em c.

54. (a) Determine o ponto dado pela intersecção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

e

$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

55. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é paralela ao plano $x + y + z = 2$ e perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

56. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$, e intercepta essa reta.

57. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ $\qquad$ P_2: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ $\qquad$ P_4: $z = 2x - y - 3$

58. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

L_1: $x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$

L_2: $x + 1 = y - 2 = 1 - z$

L_3: $x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$

L_4: $\mathbf{r} = \langle 2, 1, -3 \rangle + t\langle 2, 2, -10 \rangle$

59–60 □ Utilize a fórmula que aparece no Exercício 39 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dados

59. $(1, 2, 3)$; $\quad x = 2 + t, \ y = 2 - 3t, \ z = 5t$

60. $(1, 0, -1)$; $\quad x = 5 - t, \ y = 3t, \ z = 1 + 2t$

61–62 □ Determine a distância do ponto ao plano dados

61. $(2, 8, 5), \quad x - 2y - 2z = 1$

62. $(3, -2, 7), \quad 4x - 6y + z = 5$

63–64 □ Determine a distância entre os planos paralelos dados

63. $z = x + 2y + 1, \quad 3x + 6y - 3z = 4$

64. $3x + 6y - 9z = 4, \quad x + 2y - 3z = 1$

65. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

66. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e distantes duas unidades um do outro.

67. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

68. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas

$$x = 1 + t \qquad y = 1 + 6t \qquad z = 2t$$

e

$$x = 1 + 2s \qquad y = 5 + 15s \qquad z = -2 + 6s$$

69. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c \rangle$ é o vetor normal ao plano.

Dica: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

70. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$

(b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta = 1$

1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que seja paralela à direção do vetor $\vec{v} = (-1, 1)$.

2. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, -1)$ e que é perpendicular à reta $2x + y = 1$.

3. Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta $3x + 2y = 2$.

107

4. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e que seja paralela à reta $3x + 2y = 2$.

5. Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta dada.

   a) $x - 2y = 3$ *b)* $x + y = 1$
   c) $2x - 5y = 4$ *d)* $x + 2y = 3$

6. Determine um vetor cuja direção seja perpendicular à reta dada.

   a) $2x + y = 1$ *b)* $3x - y = 3$
   c) $x + 3y = 2$ *d)* $2x - 3y = 1$.

7. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja paralela à reta dada.

   a) $(2, -5)$ e $x - y = 1$ *b)* $(1, -2)$ e $2x + y = 3$.

8. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à reta dada.

   a) $(1, 2)$ e $2x + y = 3$ *b)* $(2, -2)$ e $x + 3y = 1$.

9. Determine a equação do plano que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à direção do vetor $\vec{n}$ dado.

   a) $(1, 1, 1)$ e $\vec{n} = (2, 1, 3)$ *b)* $(2, 1, -1)$ e $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

10. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular ao plano dado.

   a) $(0, 1, -1)$ e $x + 2y - z = 3$ *b)* $(2, 1, -1)$ e $2x + y + 3z = 1$

11. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Definimos o *produto vetorial de* $\vec{u}$ por $\vec{v}$, que se indica $\vec{u} \wedge \vec{v}$, por

$u \times v$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)\,\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Verifique que

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.
c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, onde $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$
d) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

12. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, 2, -1)$ e que seja perpendicular às direções dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

13. Determine um vetor não-nulo que seja ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados.

108

   a) $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 2)$
   b) $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 1)$

14. Determine a equação do plano que passa pelo ponto dado e que seja paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados.

   a) $(1, 2, 1)$, $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -1)$
   b) $(0, 1, 2)$, $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$

15. Sejam dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, com $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$. Verifique que

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

é a equação vetorial do plano que passa por (x_0, y_0, z_0) e que é perpendicular a $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.