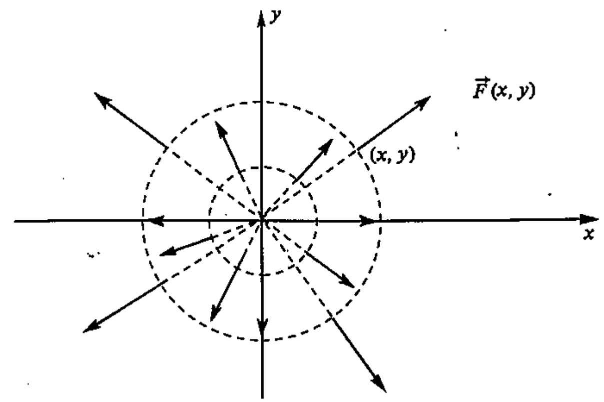
EXEMPLO 2. Faça a representação geométrica do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

Solução

$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; segue que a intensidade do campo é a mesma nos pontos de uma mesma circunferência de centro na origem. Observe que a intensidade do campo no ponto (x, y) é igual ao raio da circunferência, de centro na origem, que passa por este ponto.



■

Exercícios 1.2

1. Represente geometricamente o campo vetorial dado.

a) $\vec{v}(x, y) = x^2\,\vec{j}$

b) $\vec{h}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{F}(x, y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$ (Observe: $(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) \cdot (-y\,\vec{i} + x\,\vec{j}) = 0$)

d) $\vec{v}(x, y) = (1 - x^2)\,\vec{j}$, $|x| < 1$.

e) $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$

f) $\vec{v}(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$

g) $\vec{v}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$

2. Considere o campo vetorial $\vec{f}(x, y) = \vec{i} + (x - y)\,\vec{j}$. Desenhe $\vec{f}(x, y)$ nos pontos da reta

a) $y = x$ *b)* $y = x - 1$ *c)* $y = x - 2$

3. Considere o campo vetorial $\vec{g}(x, y) = \vec{i} + xy\,\vec{j}$. Desenhe $\vec{g}(x, y)$ nos pontos da hipérbole $xy = 1$, com $x > 0$.

4. Seja $\vec{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = x + 2y$. Desenhe $\vec{F}(x, y)$, com (x, y) na reta $x + 2y = 1$.

5. Seja $\vec{F} = \nabla \varphi$, onde $\varphi(x, y) = y - x^2$. Desenhe $\vec{F}(x, y)$ com (x, y) na parábola $y = x^2$.

6. Seja $\vec{F} = \nabla f$, onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Desenhe $\vec{F}(x, y, z)$, com $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.

7. Seja $\vec{F} = \nabla f$, onde $f(x, y, z) = x + y + z$. Desenhe $\vec{F}(x, y, z)$, com $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.

8. Seja $V(x, y) = x^2 + y^2$. Desenhe um campo $\vec{F}(x, y)$ para o qual se tenha $\nabla V(x, y) \cdot \vec{F}(x, y) \leq 0$.

9. Sejam V e $\vec{F}$ como no exercício anterior. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva tal que, para todo t no intervalo I, $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$. Prove que $g(t) = V(\gamma(t))$ é decrescente em I. Conclua que se $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$, for um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, então, para todo $t \geq t_0$, $t \in I$, $\gamma(t)$ pertencerá ao círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$. Interprete geometricamente.

10. Sejam $V(x, y) = x^2 + y^2$ e $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$, com P e Q contínuas em $\mathbb{R}^2$, tais que, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, $\nabla V(x, y) \cdot \vec{F}(x, y) < 0$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \neq (0, 0)$, $t \geq 0$, tal que $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.

a) Prove que $g(t) = V(\gamma(t))$ é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$. Interprete geometricamente.

b) Sejam T, r e R, com $T > 0$ e $r < R$, reais dados. Suponha que $r \leq \|\gamma(t)\| \leq R$ para todo t em $[0, T]$. Seja M o valor máximo de $f(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot \vec{F}(x, y)$ na coroa $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. (Tal M existe, pois f é contínua e a coroa um conjunto compacto.) Prove que, para todo t em $[0, T]$,

$$\int_0^t \nabla V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \leq M\,t$$

e, portanto, para todo t em $[0, T]$,

$$V(\gamma(t)) - V(\gamma(0)) \leq M\,t.$$

c) Utilizando a última desigualdade do item *b* e observando que $M < 0$, prove que $\gamma(t)$ não pode permanecer na coroa $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ para todo $t \geq 0$.

d) Prove que $\lim\limits_{t \to +\infty} V(\gamma(t))$ existe e é zero.

e) Prove que $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = (0, 0)$. Interprete geometricamente.

Exercícios 1.3

1. Calcule o rotacional.

   a) $\vec{F}(x, y, z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

   b) $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$

   c) $\vec{F}(x, y, z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$

   d) $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\vec{i}$

   e) $\vec{F}(x, y) = xy\,\vec{i} - x^2\,\vec{j}$

2. Considere o *campo de força central* $\vec{g}(x, y) = f(\|\vec{r}\|)\,\vec{r}$ onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável e $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Calcule rot $\vec{g}$.

3. Seja $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto, de classe C^2. Verifique que o campo vetorial $\vec{F} = \nabla\varphi$ é irrotacional.

4. Considere o escoamento bidimensional na região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x < 3, y \in \mathbb{R}\}$ com velocidade $\vec{v}(x, y) = \left(1 - \dfrac{x^2}{9}\right)\vec{j}$.

   a) Desenhe tal campo de velocidade.
   b) O escoamento é irrotacional?

5. Considere o escoamento bidimensional

$$\vec{v}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}.$$

   a) Desenhe tal campo.

   b) Calcule rot $\vec{v}$ e interprete.

6. Considere o escoamento

$$\vec{v}(x, y) = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\vec{i} + \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\vec{j}.$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante. Verifique que rot $\vec{v}(x, y) \neq \vec{0}$ para $\alpha \neq 1$.

7. Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, com P e Q diferenciáveis. Sejam $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$, onde $\alpha \neq 0$ é um real dado. Seja (s, t) as coordenadas de (x, y) no sistema de coordenadas $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Assim $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$. Observe que $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ é equivalente a $x = s\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha$ e $y = s\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha$.

   a) Mostre que

$$\vec{F}(x, y) = [P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\operatorname{sen}\alpha]\,\vec{u} + [Q(x, y)\cos\alpha - P(x, y)\operatorname{sen}\alpha]\,\vec{v}$$

   b) Seja

$$\vec{F_1}(s, t) = P_1(s, t)\,\vec{u} + Q_1(s, t)\,\vec{v}$$

onde

$$P_1(s, t) = P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\operatorname{sen}\alpha$$

e

$$Q_1(s, t) = Q(x, y)\cos\alpha - P(x, y)\operatorname{sen}\alpha$$

com $x = s\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha$ e $y = s\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha$. Mostre que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial s}(s, t) - \frac{\partial P_1}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

onde $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$. Interprete. (Observe que $\vec{F_1}(s, t) = \vec{F}(x, y)$ onde $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$.)

1.4. Divergente

Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ um campo vetorial definido no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e suponhamos que as componentes $F_1, F_2, \ldots, F_n$ admitem derivadas parciais em Ω. O *campo escalar*

$$\operatorname{div}\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

denomina-se *divergente* de $\vec{F}$.

A notação $\nabla \cdot \vec{F}$ é freqüentemente usada para indicar o divergente de $\vec{F}$; interpretamos $\nabla \cdot \vec{F}$ como o "produto escalar" do vetor $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ pelo campo vetorial $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, onde o "produto" de $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ por F_i deve ser entendido como a derivada parcial $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (F_1, F_2, \ldots, F_n)$$

ou seja,

$$\text{div}\ \vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0;$$

ou, ainda,

$$④ \qquad \text{div}\,(\rho\ \vec{v}\,) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

pois, $\vec{u} = \rho\ \vec{v}$. (A razão do sinal *menos* que ocorre em ③ é a seguinte: se div $\vec{u} > 0$ a massa dentro do paralelepípedo está diminuindo (a massa que sai é maior que a que penetra) e, neste caso, deveremos ter $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ e, portanto, div $\vec{u} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Mesma análise para o caso div $\vec{u} < 0$.)

Se ρ não depende do tempo, a equação da continuidade se reduz a

$$\text{div}\ \rho\ \vec{v} = 0.$$

Neste caso, *a massa que sai do paralelepípedo deve ser igual à que penetra.*

Se $\rho\,(x, y, z, t)$ for constante (neste caso, diremos que o fluido é *incompressível*) a equação da continuidade se reduz a

$$\text{div}\ \vec{v} = 0$$

quer $\vec{v}$ dependa do tempo ou não. Neste caso, o *volume do fluido que sai do paralelepípedo deve ser igual ao que penetra.* (Veja Apêndice 3.)

CUIDADO. Em ④ o divergente deve ser calculado em relação às variáveis x, y e z, isto é:

$$\text{div}\ \rho\ \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_3).$$

Exercícios 1.4 ■

1. Calcule o divergente do campo vetorial dado.

a) $\vec{v}\,(x, y) = -y\ \vec{i} + x\ \vec{j}$

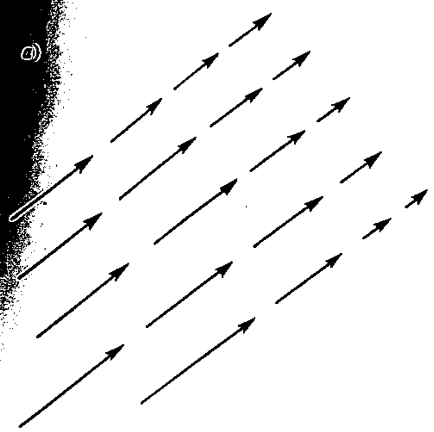
b) $\vec{u}\,(x, y, z) = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$

c) $\vec{F}\,(x, y, z) = (x^2 - y^2)\ \vec{i} + \text{sen}\,(x^2 + y^2)\ \vec{j} + \text{arc tg}\ z\ \vec{k}$

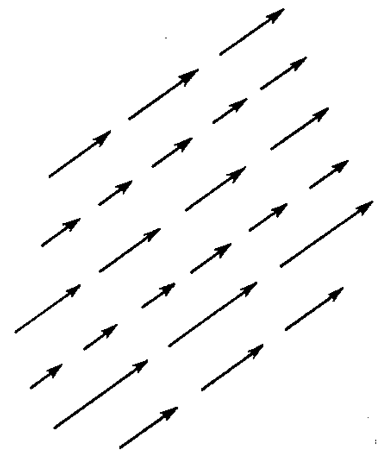
d) $\vec{F}\,(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)\ \text{arc tg}\,(x^2 + y^2 + z^2)\ \vec{k}$

2. O que é mais razoável esperar: div $\vec{F} = 0$ ou div $\vec{F} \neq 0$?

a)



b)



3. Considere um fluido em escoamento com velocidade $\vec{v}\,(x, y, z) = y\ \vec{j}$, $y > 0$.

a) O fluido é incompressível? Por quê?

b) Determine ρ, que só dependa de y, que satisfaça a equação da continuidade.

c) Suponha que a densidade ρ do fluido só dependa de y e de t. Mostre que ρ deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + y\,\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho.$$

4. Considere um escoamento no aberto Ω de $\mathbb{R}^3$, com velocidade $\vec{v}\,(x, y, z)$, cujas componentes são supostamente de classe C^1 em Ω. Suponha que $\vec{v}$ *derive de um potencial* (isto é, que existe φ: $\Omega \to \mathbb{R}$, com $\nabla\varphi = \vec{v}$ em Ω).

a) Prove que $\vec{v}$ é irrotacional.

b) Prove que se $\vec{v}$ for incompressível, então $\nabla^2\,\varphi = 0$.

5. Calcule o laplaciano da função φ dada.

a) $\varphi\,(x, y) = xy$

b) $\varphi\,(x, y) = \ln\,(x^2 + y^2)$

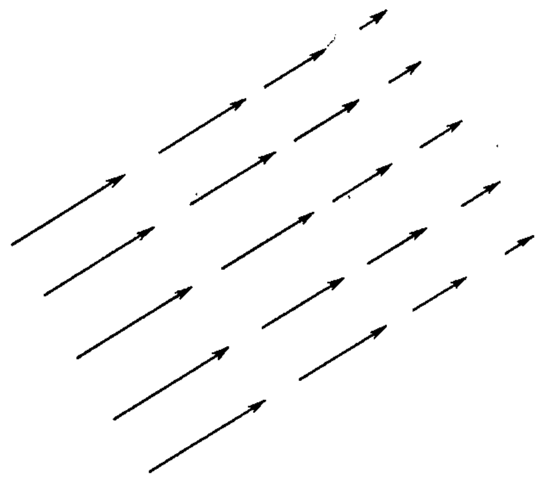
c) $\varphi\,(x, y) = \text{arc tg}\ \frac{x}{y}$, $y > 0$

d) $\varphi\,(x, y) = \frac{1}{4}\,e^{x^2 - y^2}$

6. Seja $\varphi\,(x, y) = f\,(x^2 + y^2)$, onde $f\,(u)$ é uma função real, de uma variável real e derivável até a 2.ª ordem. Suponha que $\nabla^2\,\varphi = 0$.

a) Mostre que $u f''(u) = -f'(u)$, $u > 0$.
b) Determine uma f não-constante, para que se tenha $\nabla^2 \varphi = 0$.

7. $\varphi(x, y)$ é uma função cujo gradiente tem a representação geométrica abaixo:



O que é mais razoável: $\nabla^2 \varphi = 0$ ou $\nabla^2 \varphi \neq 0$?

8. Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, com P e Q diferenciáveis. Sejam $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$, onde $\alpha \neq 0$ é um real dado. Seja (s, t) as coordenadas de (x, y) no sistema $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Assim, $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$. Observe que $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ é equivalente a $x = s\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha$ e $y = s\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha$.

a) Mostre que

$$\vec{F}(x, y) = [P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\operatorname{sen}\alpha]\,\vec{u} + [Q(x, y)\cos\alpha - P(x, y)\operatorname{sen}\alpha]\,\vec{v}.$$

b) Seja

$$\vec{F_1}(s, t) = P_1(s, t)\,\vec{u} + Q_1(s, t)\,\vec{v}$$

onde

$$P_1(s, t) = P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\operatorname{sen}\alpha$$

e

$$Q_1(s, t) = Q(x, y)\cos\alpha - P(x, y)\operatorname{sen}\alpha.$$

com $x = s\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha$ e $y = s\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha$. Mostre que

$$\frac{\partial P_1}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).$$

Interprete.

9. Sejam $\vec{u}, \vec{v}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dois campos vetoriais e $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ um campo escalar. Em cada caso, faça hipóteses adequadas sobre φ, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e prove (suponha $\vec{u} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ e $\vec{v} = P_1\,\vec{i} + Q_1\,\vec{j} + R_1\,\vec{k}$):

a) $\operatorname{rot}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{rot}\vec{v}$
b) $\operatorname{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{div}\vec{u} + \operatorname{div}\vec{v}$
c) $\operatorname{div}\varphi\,\vec{u} = \varphi\operatorname{div}\vec{u} + \nabla\varphi \cdot \vec{u}$
d) $\operatorname{rot}\varphi\,\vec{u} = \varphi\operatorname{rot}\vec{u} + \nabla\varphi \wedge \vec{u}$
e) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0$
f) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u}) = \nabla(\operatorname{div}\vec{u}) - \nabla^2\vec{u}$, onde $\nabla^2\vec{u} = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R)$.

10. Seja $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ um campo vetorial definido no aberto Ω de $\mathbb{R}^3$. Prove que $\operatorname{div}\vec{w} = 0$ é uma *condição necessária* para que exista um campo vetorial $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, com componentes de classe C^2, em Ω, tal que $\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{w}$.

11. Sejam $\vec{F}$ e $\vec{G}$ dois campos vetoriais definidos no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cujas componentes admitem derivadas parciais em Ω. Prove que

$$\operatorname{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \wedge \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \wedge \vec{G})$$

12. (*Divergente em coordenadas polares.*) Seja Ω um aberto contido no semiplano $y > 0$ e seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$, $(x, y) \in \Omega$, com P e Q de classe C^1. Seja $P_1(\theta, \rho) = P(x, y)$ e $Q_1(\theta, \rho) = Q(x, y)$, com $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$.

a) Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial P_1}{\partial \theta}(\theta, \rho) + \cos\theta\,\frac{\partial P_1}{\partial \rho}(\theta, \rho)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\rho}\cos\theta\,\frac{\partial Q_1}{\partial \theta}(\theta, \rho) + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Q_1}{\partial \rho}(\theta, \rho)$$

com $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$.

b) Conclua que

$$\operatorname{div}\vec{F}(x, y) = \operatorname{sen}\theta\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial \theta}(\theta, \rho) + \frac{\partial Q_1}{\partial \rho}(\theta, \rho)\right] + \cos\theta\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_1}{\partial \theta}(\theta, \rho) + \frac{\partial P_1}{\partial \rho}(\theta, \rho)\right]$$

onde $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$.

13. Seja $\varphi(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $y > 0$, onde $f(u)$ é uma função de uma variável real derivável até a 2.ª ordem. Suponha $\nabla^2 \varphi = 0$.

a) Mostre que $(1 + u^2) f''(u) + 2u f'(u) = 0$
b) Determine uma f para que se tenha $\nabla^2 \varphi = 0$, com f não-constante

$\left(\textit{Sugestão.}\ \text{Suponha } f'(u) > 0 \text{ e observe que } (\ln f'(u))' = \dfrac{f''(u)}{f'(u)}.\right)$

1.5. Limite e Continuidade

Sejam $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, P um ponto de acumulação de A e $L \in \mathbb{R}^m$. Definimos:

$$\boxed{\lim_{X \to P} F(X) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, para} \\ \text{todo } X \in A, \\ 0 < \|X - P\| < \delta \Rightarrow \|F(X) - L\| < \epsilon. \end{cases}}$$

Se P for ponto de acumulação de A, com $P \in A$, definimos:

$$\boxed{F \textit{ contínua em } A \Leftrightarrow \lim_{X \to P} F(X) = F(P)}$$

Suponhamos $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ e $L = (L_1, L_2, \ldots, L_m)$. Deixamos a cargo do leitor provar que $\lim_{X \to P} F(X) = L$ se e somente se $\lim_{X \to P} F_j(X) = L_j$, para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Fica, ainda, a cargo do leitor provar que F será contínua em P se e somente se as suas componentes o forem.

Exercícios 1.5

1. Prove:

a) $\lim_{X \to P} F(X) = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{X \to P} \|F(X)\| = 0$. ($\vec{0}$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^m$.)
b) $\lim_{X \to P} F(X) = L \Leftrightarrow \lim_{X \to P} \|F(X) - L\| = 0$.
c) $\lim_{H \to \vec{0}} F(P + H) = L \Leftrightarrow \lim_{X \to P} F(X) = L$.

2. Sejam $G: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $F: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, com $Im\, G \subset B$. Suponha G contínua em $P \in A$ e F contínua em $G(P)$. Prove que a composta $H(X) = F(G(X))$ é contínua em P.

3. Seja $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja P um ponto de acumulação de Ω. Suponha que exista $M > 0$ tal que, para todo $X \in \Omega$, $\|F(X) - L\| \leqslant M\|X - P\|$, onde $L \in \mathbb{R}^m$ é um vetor fixo. Calcule $\lim_{X \to P} F(X)$ e justifique.

4. Suponha que $\lim_{X \to P} F(X) = L$, com $L \neq 0$. Prove que existe $r > 0$ tal que

$$0 < \|X - P\| < r \Rightarrow \|F(X)\| > \frac{\|L\|}{2}.$$

1.6. Derivadas Parciais

Seja $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ dada por $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_m(x, y))$ e seja $(x_0, y_0) \in \Omega$. O limite

① $$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$$

quando existe, denomina-se *derivada parcial* de F no ponto (x_0, y_0), em relação a x. Observe que ① nada mais é do que a derivada, em x_0, da função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^m$ dada por

$$x \mapsto F(x, y_0).$$

Segue, conforme aprendemos no Vol. 2, que ① existirá se e somente se as derivadas parciais $\dfrac{\partial F_j}{\partial x}(x_0, y_0)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) existirem; além disso, se ① existir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0), \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial x}(x_0, y_0)\right).$$

Deixamos para o leitor definir $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ e estender o conceito de derivada parcial para funções de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

EXEMPLO 1. Calcule $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial y}$ onde $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + \ln(xy)\vec{j}$.

Solução

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}(\ln xy)\vec{j}$$

$$= 2x\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}.$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\ln xy)\vec{j}$$

$$= 2y\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}.$$

■