GT

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln x + k \left(\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{4x}\,dx\right).$$

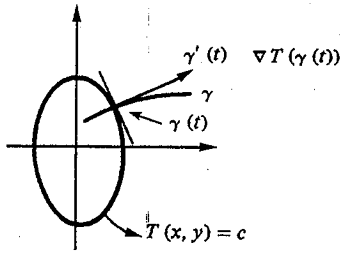
Para que a condição $f(1) = 1$ seja satisfeita, devemos tomar $k = 0$; assim,

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln x \quad \text{ou} \quad y = \sqrt[4]{x}.$$

Segue que $\gamma(t) = (t, \sqrt[4]{t})$, $t \geq 1$, é uma parametrização para a trajetória descrita por P. Um outro modo de resolver o problema é determinar funções $x(t)$ e $y(t)$ tais que a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaça as condições

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1, 1). \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax$$
$$x = e^{at} + c$$



Temos:

$$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \Leftrightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (8x(t), 2y(t)).$$

Deste modo, $x(t)$ e $y(t)$ devem satisfazer as condições

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x \\ \dot{y} = 2y \\ x(0) = 1 \ \text{ e } \ y(0) = 1. \end{cases}$$

Deixamos a seu cargo verificar que $x = e^{8t}$ e $y = e^{2t}$ satisfazem as condições acima. Assim,

$$\gamma(t) = (e^{8t}, e^{2t}),\ t \geq 0,$$

é, também, parametrização da trajetória descrita por P. ■

EXEMPLO 5. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto (1, 2) e na direção do vetor $2\vec{i} - \vec{j}$.

Solução

O que queremos aqui é $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $2\vec{i} - \vec{j}$.

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4) \quad \text{e} \quad \vec{u} = \frac{(2, -1)}{\|(2, -1)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (2, 4) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$ ■

Observação. Tudo o que dissemos nesta seção generaliza-se para funções reais de três ou mais variáveis.

EXEMPLO 6. Calcule a derivada direcional de $f(x, y, z) = xyz$ no ponto (1, 1, 3) e na direção $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 3) = \nabla f(1, 1, 3) \cdot \vec{u}$$

onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{u} = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ \text{e} \ \nabla f(1, 1, 3) = (3, 3, 1)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 3) = (3, 3, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$ ■

Exercícios 13.4

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, sendo dados:
   a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} + \vec{j}$.
   b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de (3, 4).
   c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (3, 3)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6 II

d) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

2. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$.
   b) $f(x, y) = \ln \| (x, y) \|$ em $(1, -1)$.
   c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

3. Seja $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.

4. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ no ponto $(2, 2)$ e na direção

   a) $\vec{v} = (1, 2)$ *b)* $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

5. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$, no ponto $(-1, 1)$ e na direção $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

6. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$ Calcule

   a) $\nabla f(1, 1)$.
   b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

7. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

8. Seja $f(x, y) = xy$. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento de f.

9. Seja $f(x, y) = xy$. Determine a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 2, f(1, 2))$, que forma com o plano xy ângulo máximo.

10. Seja $f(x, y) = x + 2y + 1$. Determine a reta contida no gráfico de f, passando pelo ponto $(1, 1, 4)$ e que forma com o plano xy ângulo máximo.

11. Um ponto P descreve uma trajetória sobre o gráfico de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Sabe-se que a reta tangente em cada ponto da trajetória forma com o plano xy ângulo máximo. Determine uma parametrização para a trajetória admitindo que ela passe pelo ponto $(1, 1, 5)$.

12. Admita que o gráfico de $z = xy$ represente uma superfície própria para a prática do esqui. Admita, ainda, que um esquiador deslize pela superfície sempre na direção de maior declive. Se ele parte do ponto $(1, 2, 2)$, em que ponto ele tocará o plano xy?

13. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 5 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0\}$. Suponha que o gráfico de $z = 5 - x^2 - 4y^2$, $(x, y) \in A$, represente a superfície de um monte. (Adote o km como unidade de medida.) Um alpinista que se encontra na posição $(1, 1, 0)$ pretende escalá-lo. Determine a trajetória a ser descrita pelo alpinista admitindo que ele busque sempre a direção de maior aclive. Sugerimos ao leitor desenhar o monte e a trajetória a ser descrita pelo alpinista.

14. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em °C.) Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

    a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.
    b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
    c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item *b*?
    d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção $\vec{j}$?

15. Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção $\vec{w}$ indicados.

    a) $f(x, y, z) = xyz$ em $(1, 1, 1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
    b) $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1, 2, -1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

16. A função diferenciável $f(x, y, z)$ tem, no ponto $(1, 1, 1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i} + 3\vec{j}$ e igual a zero na direção $\vec{j}$. Calcule o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1)$.

17. Seja $f(x, y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$, unitários e ortogonais. Prove:

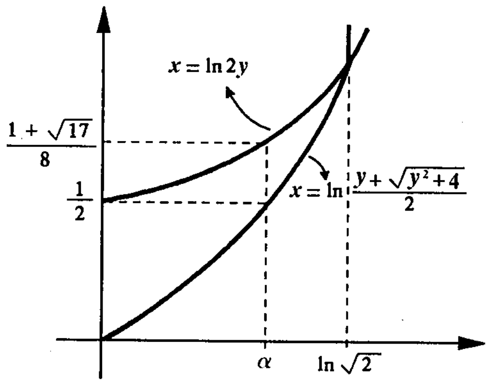
$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}.$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) \text{ são os componentes de } \nabla f(x, y) \text{ em relação à base } (\vec{u}, \vec{v}).\right)$

18. Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^2$. Sejam $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. Mostre que

    a) $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$.
    b) $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}$.

2.° caso: $a = \alpha = \ln \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.



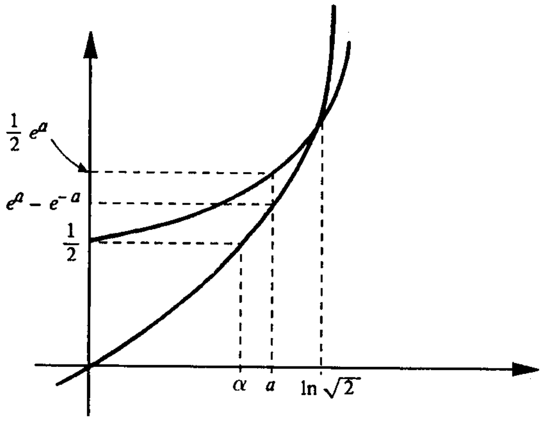
Observe que

$$\frac{1}{2}e^{\alpha} = \frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

A integral dada será, então, igual a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\,dx\right]dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}\left[\int_{\ln 2y}^{\alpha} f(x, y)\,dx\right]dy.$$

3.° caso: $\alpha < a \leqslant \ln\sqrt{2}$.



Neste caso a integral dada será igual a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\,dx\right]dy + \int_{\frac{1}{2}}^{e^{a}-e^{-a}}\left[\int_{\ln 2y}^{\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\,dx\right]dy$$

$$+ \int_{e^{a}-e^{-a}}^{\frac{1}{2}e^{a}}\left[\int_{\ln 2y}^{a} f(x, y)\,dx\right]dy.$$

Observação. Para $a = \ln\sqrt{2}$, a última integral se anula. ■

Exercícios 3.1

1. Seja A o retângulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Calcule $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$, sendo $f(x, y)$ igual a

a) $x + 2y$	*b*) $x - y$
c) $\sqrt{x+y}$	*d*) $\frac{1}{x+y}$
e) 1	*f*) $x \cos xy$
g) $y \cos xy$	*h*) $\frac{1}{(x+y)^2}$
i) $y\,e^{xy}$	*j*) xy^2
l) $x \operatorname{sen} \pi y$	*m*) $\frac{1}{1+x^2+2xy+y^2}$

2. Sejam $f(x)$ e $g(y)$ duas funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$. Prove que

$$\iint_A f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

onde A é o retângulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

3. Utilizando o Exercício 2, calcule

a) $\iint_A xy^2\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$.

b) $\iint_A x\cos 2y\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$.

c) $\iint_A x\ln y\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.

d) $\iint_A xy\,e^{x^2-y^2}\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 3$.

e) $\iint_A \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+4y^2}\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

f) $\iint_A \frac{xy \operatorname{sen} x}{1+4y^2}\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

4. Calcule o volume do conjunto dado.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x + 2y\}$.
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{xy}\}$.
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant xy e^{x^2 - y^2}\}$.
d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2\}$.
e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1, x + y \leqslant z \leqslant x + y + 2\}$.
f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 1 \leqslant z \leqslant e^{x + y}\}$.

5. Calcule $\iint_B y \, dx \, dy$ onde B é o conjunto dado.

a) B é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x + 2\}$.
c) B é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$.
d) B é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$.
e) B é a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leqslant x \leqslant 2$.
f) B é o paralelogramo de vértices $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
g) B é o semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 0$.
h) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, x^5 - x \leqslant y \leqslant 0\}$.

6. Calcule $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$ sendo dados:

a) $f(x, y) = x \cos y$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, x^2 \leqslant y \leqslant \pi\}$.
b) $f(x, y) = xy$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2, y \leqslant x$ e $x \geqslant 0\}$.
c) $f(x, y) = x$ e B o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 0)$.
d) $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ e B o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.
e) $f(x, y) = x + y$ e B o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 0)$.
f) $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln y}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leqslant y \leqslant 3, 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{y}\right\}$.
g) $f(x, y) = xy \cos x^2$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$.
h) $f(x, y) = (\cos 2y)\sqrt{4 - \text{sen}^2 x}$ e B o triângulo de vértices $(0, 0)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
i) $f(x, y) = x + y$ e B a região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \leqslant x \leqslant 1$.
j) $f(x, y) = y^3 e^{xy^2}$ e B o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 2$.
l) $f(x, y) = x^5 \cos y^3$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2, x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.
m) $f(x, y) = x^2$ e B o conjunto de todos (x, y) tais que $x \leqslant y \leqslant -x^2 + 2x + 2$.
n) $f(x, y) = x$ e B a região compreendida entre os gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

o) $f(x, y) = 1$ e B a região compreendida entre os gráficos de $y = \text{sen}\, x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
p) $f(x, y) = \sqrt{1 + y^3}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1\right\}$.
q) $f(x, y) = x$ e B o conjunto de todos (x, y) tais que $y \geqslant x^2$ e $x \leqslant y \leqslant x + 2$.
r) $f(x, y) = \dfrac{y}{x + y^2}$ e B o conjunto de todos (x, y) tais que $1 \leqslant x \leqslant 4$ e $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

7. Inverta a ordem de integração.

a) $\int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y) \, dy\right] dx.$
b) $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y) \, dy\right] dx.$
c) $\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx\right] dy.$
d) $\int_1^e \left[\int_{\ln x}^x f(x, y) \, dy\right] dx.$
e) $\int_0^1 \left[\int_y^{y + 3} f(x, y) \, dx\right] dy.$
f) $\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1 - x^2}}^{\sqrt{1 - x^2}} f(x, y) \, dy\right] dx$
g) $\int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{2 - x^2}} f(x, y) \, dy\right] dx.$
h) $\int_0^1 \left[\int_{y - 1}^{2 - 2y} f(x, y) \, dx\right] dy.$
i) $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy\right] dx.$
j) $\int_0^1 \left[\int_{e^y - 1}^{e^y} f(x, y) \, dx\right] dy.$
l) $\int_0^1 \left[\int_{2x}^{x + 1} f(x, y) \, dy\right] dx.$
m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\text{tg}\, x} f(x, y) \, dy\right] dx.$
n) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x - x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) \, dy\right] dx.$
o) $\int_0^{3a} \left[\int_{\frac{\sqrt{3}}{3} x}^{\sqrt{4ax - x^2}} f(x, y) \, dy\right] dx \; (a > 0).$
p) $\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\text{sen}\, x} f(x, y) \, dy\right] dx.$
q) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{\text{sen}\, x}^{\cos x} f(x, y) \, dy\right] dx.$
r) $\int_{-1}^2 \left[\int_{\sqrt{\frac{7 + 5y^2}{3}}}^{\frac{y + 7}{3}} f(x, y) \, dx\right] dy.$
s) $\int_0^3 \left[\int_{x^2 - 2x}^{\sqrt{3x}} f(x, y) \, dy\right] dx.$

8. Calcule o volume do conjunto dado. (Sugerimos ao leitor desenhar o conjunto.)

   a) $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $x + y + 2 \leqslant z \leqslant 4$.
   b) $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$.
   c) $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$ e $0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2$.
   d) $x^2 + y^2 + 3 \leqslant z \leqslant 4$.
   e) $x^2 + 4y^2 \leqslant 4$ e $x + y \leqslant z \leqslant x + y + 1$.
   f) $x \geqslant 0, x \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant e^{y^2}$.
   g) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ e $y^2 + z^2 \leqslant a^2 \quad (a > 0)$.
   h) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1 - x^2$.
   i) $x + y + z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$.
   j) $x \leqslant y \leqslant 1, x \geqslant 0, z \geqslant 0$ e $z^2 + x^4 + x^2y^2 \leqslant 2x^2$.
   l) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2x$.
   m) $x \leqslant z \leqslant 1 - y^2$ e $x \geqslant 0$.
   n) $4x + 2y \leqslant z \leqslant 3x + y + 1, x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
   o) $0 \leqslant z \leqslant \operatorname{sen} y^3$ e $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{\pi}$.

9. Utilizando integral dupla, calcule a área do conjunto B dado.

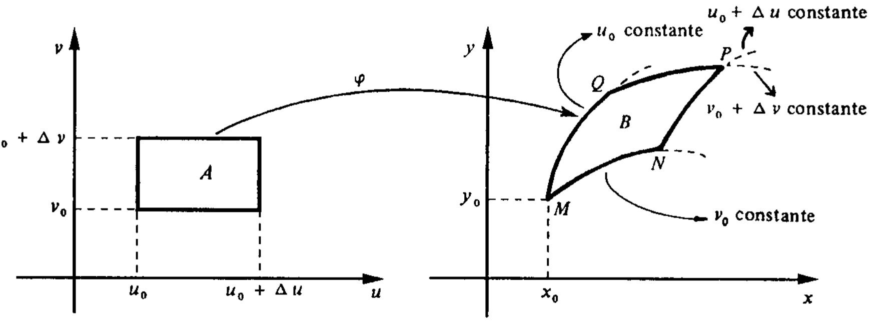
   a) B é o conjunto de todos (x, y) tais que $\ln x \leqslant y \leqslant 1 + \ln x$, $y \geqslant 0$ e $x \leqslant e$.
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$.
   c) B é determinado pelas desigualdades $xy \leqslant 2$, $x \leqslant y \leqslant x + 1$ e $x \geqslant 0$.
   d) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \dfrac{4}{x} \leqslant 3y \leqslant -3x^2 + 7x\right\}$.
   e) B é limitado pelas curvas $y = x^2 - x$ e $x = y^2 - y$.

4

MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL DUPLA

4.1. PRELIMINARES

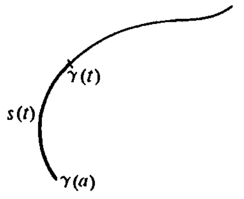
Seja $(x, y) = \varphi(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, uma transformação de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja A um retângulo, de lados paralelos aos eixos, contido em Ω.



Seja $B = \varphi(A) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v) \in A\}$. Assim, φ transforma o retângulo A no conjunto B. Estamos interessados, a seguir, em avaliar a área de B, supondo Δu e Δv suficientemente pequenos.

Observamos, inicialmente, que se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva de classe C^1, o comprimento $s = s(t)$ do arco de extremidades $\gamma(a)$ e $\gamma(t)$ (a fixo) é (veja Vol. 2)

$$s(t) = \int_a^t \| \gamma'(u) \| \, du.$$



pois,

$$|\text{sen}\,\theta| = \begin{cases} \text{sen}\,\theta & \text{em } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ -\,\text{sen}\,\theta & \text{em } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

Observando que $\text{sen}^3\,\theta = \text{sen}\,\theta\,(1 - \cos^2\theta)$, temos

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}^3\,\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos^2\theta\right]d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3}$$

e

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \text{sen}^3\,\theta\,d\theta = -\frac{2}{3}.$$

Conclusão.

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}.$$

■

Exercícios 4.2

1. Calcule

a) $\iint_B (x^2 + 2y)\,dx\,dy$ onde B é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

b) $\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

c) $\iint_B x^2\,dx\,dy$ onde B é o conjunto $4x^2 + y^2 \leqslant 1$.

d) $\iint_B \text{sen}(4x^2 + y^2)\,dx\,dy$ onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $4x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $y \geqslant 0$.

e) $\iint_B e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $-x \leqslant y \leqslant x$, $x \geqslant 0$.

f) $\iint_B \frac{\sqrt[3]{y - x}}{1 + y + x}\,dx\,dy$ onde B é o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 1).

g) $\iint_B x\,dx\,dy$ onde B é o conjunto, no plano xy, limitado pela cardióide $\rho = 1 - \cos\theta$.

h) $\iint_B \frac{e^{y - x^2}}{y - x^2}\,dx\,dy$ onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $1 + x^2 \leqslant y \leqslant 2 + x^2$, $y \geqslant x + x^2$ e $x \geqslant 0$.

i) $\iint_B x\,dx\,dy$ onde B é o círculo $x^2 + y^2 - x \leqslant 0$.

j) $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$ onde B é o quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

k) $\iint_B y^2\,dx\,dy$ onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant x \text{ e } x \geqslant 0\}$.

l) $\iint_B (2x + y)\cos(x - y)\,dx\,dy$ onde B é o paralelogramo de vértices (0, 0), $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Passe para coordenadas polares e calcule

a) $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\right]dx$.

b) $\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{x - x^2}} x\,dy\right]dx$.

c) $\int_0^1\left[\int_{1 - \sqrt{1 - x^2}}^{1 + \sqrt{1 - x^2}} xy\,dy\right]dx$.

d) $\int_0^a\left[\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\right]dx$ $(a > 0)$.

e) $\int_0^a\left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy\right]dx$ $(a > 0)$.

f) $\iint_B x\,dx\,dy$ onde B é a região, no plano xy, limitada pela curva (dada em coordenadas polares) $\rho = \cos 3\theta$, $-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$.

g) $\iint_B dx\,dy$ onde B é a região, no plano xy, limitada pela curva (em coordenadas polares) $\rho = \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{8} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$.

h) $\iint_B xy\,dx\,dy$ onde B é o círculo $x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0$, $x \geqslant 0$.

3. Calcule $\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}\,dx\,dy$ onde B é o paralelogramo de vértices (0, 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (0, 1) e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Calcule a área da região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0 \text{ e } b > 0)$.

5. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x^2 \leqslant y \leqslant 2 + x^2, x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant x + x^2\}$ e $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant v \leqslant 2, v \geqslant u \text{ e } u \geqslant 0\}$.

a) Verifique que $B = \varphi(A)$ onde $(u, v) = \varphi(x, y)$, com $u = x$ e $v = y - x^2$.

$$x_c \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} s_i\,\delta(s_i, t_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta(s_i, t_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j}$$

e

$$\overline{y}_c \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_j\,\delta(s_i, t_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta(s_i, t_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j}.$$

O *centro de massa* de B é, por definição, o ponto (x_c, y_c) onde

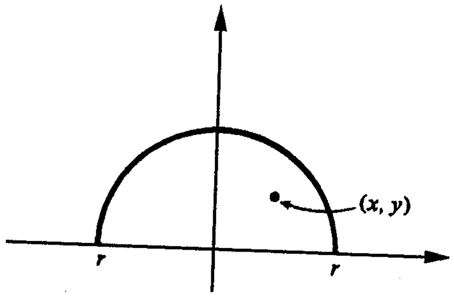
$$x_c = \frac{\iint_B x\,dm}{\iint_B dm} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{\iint_B y\,dm}{\iint_B dm}.$$

EXEMPLO. Calcule a massa e o centro de massa de um semicírculo de raio r, sendo a densidade superficial no ponto P proporcional à distância do ponto ao centro do círculo.

Solução

O elemento de massa é

$$dm = \underbrace{k\sqrt{x^2 + y^2}}_{\delta(x,\,y)}\,dx\,dy$$



onde k é o coeficiente de proporcionalidade. A massa do semicírculo B é

$$\text{massa de } B = k\iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

Passando para coordenadas polares temos:

$$\text{massa de } B = k\int_0^{\pi}\left[\int_0^{r} \rho^2\,d\rho\right]d\theta = \frac{k\pi r^3}{3}.$$

O centro de massa de B é o ponto (x_c, y_c) onde

$$x_c = \frac{\iint_B x\,dm}{\text{massa de } B} = \frac{k\iint_B x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy}{\text{massa de } B}$$

e

$$y_c = \frac{k\iint_B y\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy}{\text{massa de } B}.$$

Temos

$$\iint_B x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{r}\left[\int_0^{\pi} \rho^3 \cos\theta\,d\theta\right]d\rho = 0.$$

Por outro lado,

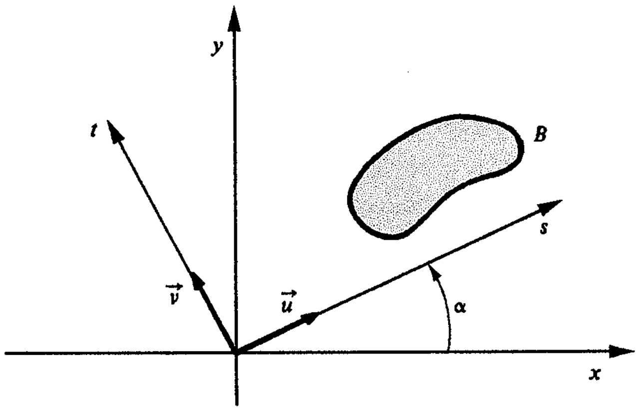
$$\iint_B y\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{r}\left[\int_0^{\pi} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\,d\theta\right]d\rho = \frac{r^4}{2}.$$

O centro de massa de B é o ponto (x_c, y_c) onde $x_c = 0$ e $y_c = \dfrac{3r}{2\pi}$. ■

Exercícios 4.3

1. Calcule o centro de massa.
   - *a)* $\delta(x, y) = y$ e B o quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.
   - *b)* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$ e a densidade é proporcional à distância do ponto ao eixo x.
   - *c)* B é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ e a densidade é proporcional à distância do ponto à origem.
   - *d)* B é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^3 \leqslant y \leqslant x$ e a densidade é constante e igual a 1.
   - *e)* B é o conjunto de todos (x, y) tais que $x \leqslant y \leqslant x + 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$, e a densidade é o produto das coordenadas do ponto.
   - *f)* B é o conjunto de todos (x, y) tais que $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, y \geqslant 0$, e a densidade é proporcional à distância do ponto à origem.

2. Seja B um compacto com fronteira de conteúdo nulo e com interior não-vazio e seja $\delta(x, y)$ contínua em B. Seja $\alpha \neq 0$ um real dado. Considere a mudança de coordenadas $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ onde $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$.



B_{xy} é o conjunto B olhado em relação ao sistema xy e B_{st} é o conjunto B olhado em relação ao sistema st. Observe que B_{xy} é a imagem de B_{st} pela mudança de coordenadas acima.

a) Verifique que

$$\begin{cases} x = s\cos\alpha - t\,\text{sen}\,\alpha \\ y = s\,\text{sen}\,\alpha + t\cos\alpha \end{cases}$$

e conclua que $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = 1.$

b) Seja (x_c, y_c) o centro de massa de B no sistema xy e (s_c, t_c) no sistema st. Mostre que

$(x_c, y_c) = s_c\,\vec{u} + t_c\,\vec{v}$. Interprete.

③ Utilizando o teorema de Pappus (veja Vol. 1, 5.ª edição), calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno da reta dada, do conjunto B dado.

a) B é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $y = x + 2$ a reta.

b) B é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 \leqslant y \leqslant x$ e $y = x - 1$ a reta.

c) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$ e $x + y = 3$ a reta.

5

INTEGRAIS TRIPL

5.1. INTEGRAL TRIPLA: DEFINIÇÃO

Seja A o paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant a_1$, $b \leqslant y \leqslant b_1$, $c \leqslant z \leqslant c_1$,
$< c_1$ são números reais dados. Sejam P_1: $a = x_0 < x_1 <$
P_2: $b = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = b_1$ e P_3: $c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots$
$[a, a_1]$, $[b, b_1]$ e $[c, c_1]$, respectivamente. O conjunto de todas as
$i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ e $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, denomina-se
pedo A. Uma partição de A determina mnp paralelepípedos A_{ijk}, ond
$_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, $y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$, $z_{k-1} \leqslant z \leqslant z_k$.

Seja $B \subset \mathbb{R}^3$; dizemos que B é *limitado se existir um paralelepí*

Seja $f\colon B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, com B limitado. Assim, existe um paralelepíp
aos planos coordenados que contém B. Seja P uma partição de A. Pa
(i, j, k), seja X_{ijk} um ponto escolhido arbitrariamente no paralelepípedo

① $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(X_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

onde $f(X_{ijk})$ deve ser substituído por zero se $X_{ijk} \notin B$ denomina-se
relativa à partição P e aos pontos X_{ijk}.

A *integral tripla* de f sobre B que se indica por $\iiint_B f(x,$
$\iiint_B f(x, y, z)\,dV$, é, por definição, o limite de ① (caso exista) quan
Δ é o maior dos números Δx_i, Δy_j, Δz_k, com $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2,$

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim \sum^{n} \sum^{m} \sum^{p} f(X_{ijk})\,\Delta$$

Temos, então

$$\text{volume de } B = \iint_K \left[\int_{x^2+y^2}^{2x+2y-1} dz\right] dx\, dy$$

onde K é o círculo $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Como

$$2x + 2y - 1 - x^2 - y^2 = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2$$

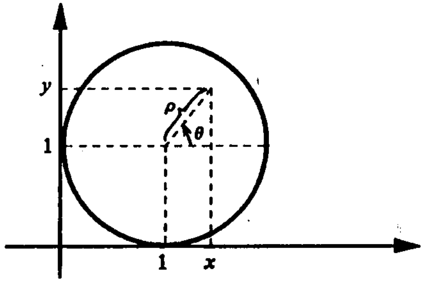
resulta

$$\text{volume de } B = \iint_K [1 - (x-1)^2 - (y-1)^2]\, dx\, dy.$$

Façamos

$$\begin{cases} x - 1 = \rho \cos \theta \\ y - 1 = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \rho \leq 1$$

o que significa que estamos passando para coordenadas polares, com pólo no ponto (1, 1).



Temos, então,

$$\text{volume de } B = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - \rho^2)\, \rho\, d\rho\right] d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exercícios 5.4

1. Calcule

a) $\iiint_B xyz\, dx\, dy\, dz$ onde B é o paralelepípedo $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ e $1 \leq z \leq 2$.

b) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$.

c) $\iiint_B \sqrt{1 - z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq y \leq z$.

d) $\iiint_B \sqrt{1 - z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o cubo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

e) $\iiint_B dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$.

f) $\iiint_B (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ onde B é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

g) $\iiint_B dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 2y - 1$.

h) $\iiint_B y\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + 4y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

i) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0,$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$.

j) $\iiint_B 2z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

l) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 - y^2 \leq z \leq 1 - 2y^2$.

m) $\iiint_B e^{x^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 1$.

n) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y$.

o) $\iiint_B 2z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.

p) $\iiint_B 2z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.

q) $\iiint_B \cos z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ e $x - y \leq z \leq x + y$.

r) $\iiint_B (y - x)\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $4 \leq x + y \leq 8, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}, y > x$ e

$$0 \leq z \leq \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x+y}}.$$

2. Calcule o volume do conjunto dado. (Sugerimos ao leitor desenhar o conjunto.)

a) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 5 - x^2 - 3y^2$.

b) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ e $0 \leq z \leq x + y^2$.

c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

d) $x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1$.

e) $x^2 + y^2 \leq 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$.

g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ $(a > 0, b > 0$ e $c > 0)$.

h) $x^2 + y^2 \leq z \leq 4x + 2y$.

i) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.

j) $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2}$.

l) $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, z \geq 0$ $(a > 0)$.

m) $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $x^2 + z^2 \leq a^2$ $(a > 0)$.

n) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ e $z \geq \frac{a}{2}$ $(a > 0)$.

o) $x^2 \leq z \leq 1 - y$ e $y \geq 0$.

p) $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2a^2 - x^2$ $(a > 0)$.

q) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ e $z \geq x^2 + y^2$.

r) $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4$ e $4x^2 + 9y^2 \leq 1$.

3. Calcule a massa do cubo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$, cuja densidade no ponto (x, y, z) é a soma das coordenadas.

4. Calcule a massa do sólido $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = x + y$.

5. Calcule a massa do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 2$, sabendo que a densidade no ponto (x, y, z) é o dobro da distância do ponto ao plano $z = 0$.

6. Calcule a massa do cone $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, sendo a densidade no ponto (x, y, z) proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo z.

7. Sejam $B \subset \mathbb{R}^3$ e $f(x, y, z)$ uma função contínua em B. Seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior de B. Para cada natural n, seja B_n uma bola de centro (x_0, y_0, z_0) e raio r_n, com $B_n \subset B$. Suponha que r_n tende a zero quando n tende a $+\infty$. Seja V_n o volume de B_n. Prove que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{V_n} \iiint_{B_n} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(x_0, y_0, z_0)$$

(*Sugestão:* Utilize o teorema do valor médio para integrais.)

8. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ e sejam f e g duas funções contínuas em B. Suponha que, para toda bola $B_1 \subset B$,

$$\iiint_{B_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_1} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Prove que $f(x, y, z) = g(x, y, z)$ em todo ponto (x, y, z) interior a B.

9. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada e seja $f: B \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x, y, z) > 0$ em B. Prove que $\iiint_B f(x, y, z)\, dV > 0$.

10. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado, com fronteira de conteúdo nulo, e seja $f: B \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y, z) \geq 0$ em B. Suponha que $\iiint_B f(x, y, z)\, dV = 0$. Prove que $f(x, y, z) = 0$ em todo ponto interior de B.

11. Calcule $\iiint_B x^2\, dx\, dy\, dz$, onde B é o conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $z = 2$. Compare com o Exercício 10 e explique.

5.5. MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL TRIPLA. COORDENADAS ESFÉRICAS

O teorema de mudança de variáveis na integral dupla estende-se sem nenhuma modificação para integrais triplas.

Teorema (*de mudança de variáveis na integral tripla*). Seja $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto, de classe C^1, sendo φ dada por $(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, com $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$. Seja B_{uvw} contido em Ω, B_{uvw} compacto e com fronteira de conteúdo nulo e seja B a imagem de B_{uvw} pela φ. Suponhamos que $\varphi(\overset{\circ}{B}_{uvw}) = \overset{\circ}{B}$ e que φ seja inversível no interior de B_{uvw}. Suponhamos, ainda, que $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$ para todo $(u, v, w) \in \overset{\circ}{B}_{uvw}$. Nestas condições, se $f(x, y, z)$ for integrável em B, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{uvw}} f(\varphi(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\iiint_B \dfrac{\text{sen}\,(x + y - z)}{x + 2y + z}\, dx\, dy\, dz$, onde B é o paralelepípedo $1 \leq x + 2y + z \leq 2$, $0 \leq x + y - z \leq \dfrac{\pi}{4}$ e $0 \leq z \leq 1$.

Solução

Façamos a mudança de variáveis: $u = x + y - z$, $v = x + 2y + z$ e $w = z$. Temos:

$$\begin{cases} u = x + y - z \\ v = x + 2y + z \\ w = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2u - v + 3w \\ y = -u + v - 2w \quad \text{(Verifique.)} \\ z = w \end{cases}$$

Segue que

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = 1. \text{ (Verifique.)}$$

Assim,

$$\boxed{dx\, dy\, dz = du\, dv\, dw}$$

B_{uvw} é evidentemente o paralelepípedo

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq v \leq 2 \text{ e } 0 \leq w \leq 1. \text{ (Por quê?)}$$

Temos, então: $\left(K \text{ é o retângulo } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq v \leq 2 \right)$

$$\iiint_B \frac{\text{sen}\,(x + y - z)}{x + 2y + z}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{uvw}} \frac{\text{sen}\, u}{v}\, du\, dv\, dw = \iint_K \left[\int_0^1 \frac{\text{sen}\, u}{v}\, dw \right] du\, dv$$

$$= \iint_K \frac{\text{sen}\, u}{v}\, du\, dv = \int_1^2 \frac{1}{v}\, dv \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\, u\, du = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ln 2,$$

ou seja,

$$\iiint_B \frac{\text{sen}\,(x + y - z)}{x + 2y + z}\, dx\, dy\, dz = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ln 2.$$

EXEMPLO 2. Calcule o volume do paralelepípedo B dado no Exemplo 1.

Solução

$$\text{volume de } B = \iiint_B dx\, dy\, dz.$$

EXEMPLO 10. Considere a integral

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

sendo B o conjunto

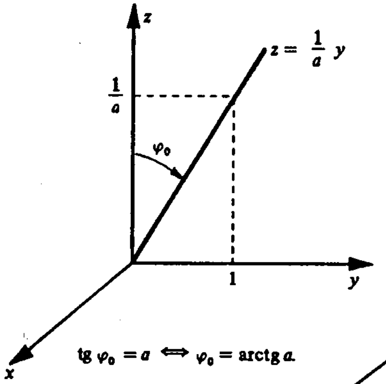
$$r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ a^2z^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0,\ z \geqslant 0$$

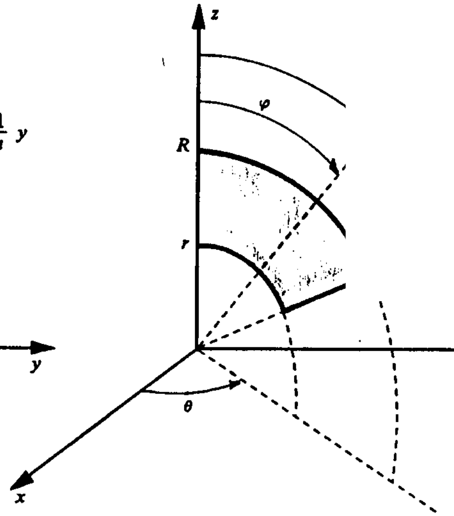
onde $0 < r < R$ e $a > 0$ são reais dados; $f: B \to \mathbb{R}$ é suposta contínua. Passe para coordenadas esféricas.

Solução

$z = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ é uma superfície cônica gerada pela rotação, em torno do eixo z, da reta

$$\begin{cases} z = \frac{1}{a}\,y \\ x = 0 \end{cases}$$





Para cada (θ, φ) fixo, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ $(\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} a)$, ρ deverá variar de r até R. Temos, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_K \left[\int_r^R g(\theta, \varphi, \rho)\rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\right] d\theta\, d\varphi$$

onde K é o retângulo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ e

$$g(\theta, \varphi, \rho) = f(x, y, z)$$

com $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$. ■

Exercícios 5.5

1. Calcule

a) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x \geqslant 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

b) $\iiint_B z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

c) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

d) $\iiint_B \sqrt{x + y}\, \sqrt[3]{x + 2y - z}\, dx\, dy\, dz$ onde B é a região $1 \leqslant x + y \leqslant 2$, $0 \leqslant x + 2y - z \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

e) $\iiint_B z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

f) $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é a interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$, com o cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

lcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

lcule a massa do sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ e $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, supondo que a densidade no ıto (x, y, z) é proporcional à distância deste ponto ao plano xy.

lcule o volume do conjunto $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ $(a > 0)$.

lcule o volume do conjunto $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2ax$ $(a > 0)$.

ꞌOORDENADAS CILÍNDRICAS

Cada ponto $P = (x, y, z)$ fica determinado pelas suas *coordenadas cilíndricas* (ρ, θ, z), onde ρ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP_1} = (x, y, 0)$ e θ o ângulo entre este vetor e o semi-eixo positivo Ox. As coordenadas cartesianas (x, y, z) do ponto P e suas coordenadas cilíndricas relacionam-se do seguinte modo

① $$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$

Observe que ① transforma o paralelepípedo $0 \leqslant \rho \leqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant z \leqslant h$ no cilindro $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ e $0 \leqslant z \leqslant h$.

O determinante jacobiano de ① é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solução

Consideremos a esfera com centro na origem e vamos calcular o momento de inércia em relação ao eixo z. A distância r do ponto (x, y, z) ao eixo é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Como estamos supondo a esfera homogênea, sua densidade é constante, que suporemos igual a k. Temos

$$I = \iiint_B r^2 \, dm = \iiint_B (x^2 + y^2) \, k \, dx \, dy \, dz$$

onde B é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$. Passando para coordenadas esféricas obtemos:

$$I = k \iiint_{B_{\rho\theta\varphi}} (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\theta \, d\rho \, d\varphi$$

onde $B_{\theta\rho\varphi}$ é o paralelepípedo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. (Observe: $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos$ e $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$.) Segue que

$$I = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^4 \, d\rho \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{5} k\pi R^5 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi.$$

Como

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi - \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = [-\cos \varphi]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

resulta

$$I = \frac{2}{5} R^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 k\right) = \frac{2}{5} MR^2$$

onde $M = \dfrac{4}{3} \pi R^3 k$ é a massa da esfera.

Consideremos um corpo B, com função densidade $\delta(x, y, z)$. O ponto (x_c, y_c, z_c) onde

$$x_c = \frac{\iiint_B x \, dm}{\iiint_B dm}, \quad y_c = \frac{\iiint_B y \, dm}{\iiint_B dm} \quad \text{e } z_c = \frac{\iiint_B z \, dm}{\iiint_B dm}$$

denomina-se *centro de massa* de B.

EXEMPLO 2. Calcule o centro de massa do corpo homogêneo $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

Solução

Precisamos calcular apenas z_c, pois, tendo em vista a simetria do corpo, em relação ao eixo Oz, $x_c = y_c = 0$. Temos

$$z_c = \frac{\iiint_B zk \, dx \, dy \, dz}{\iiint_B k \, dx \, dy \, dz} = \frac{\iiint_B z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_B dx \, dy \, dz}$$

onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ e k (k constante) a densidade. Seja A o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Temos

$$\iiint_B dx \, dy \, dz = \iint_A \left[\int_{x^2+y^2}^1 dz\right] dx \, dy = \iint_A (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy.$$

Passando para polares obtemos:

$$\iiint_B dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^2) \, \rho \, d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Por outro lado,

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz = \iint_A \left[\int_{x^2+y^2}^1 z \, dz\right] dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_A \left[1 - (x^2 + y^2)^2\right] dx \, dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^4) \, \rho \, d\rho$$

ou seja,

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{3}.$$

Assim,

$$z_c = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, o centro de massa é $\left(0, 0, \dfrac{2}{3}\right)$. ■

Exercícios 5.7

1. Calcule o momento de inércia do corpo homogêneo $x + y + z \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, em relação ao eixo z.
2. Calcule o momento de inércia do cubo homogêneo de aresta L, em relação a um eixo que contém uma das arestas.
3. Considere o cubo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$ e suponha que a densidade no ponto (x, y, z) seja x.

a) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo Oz.
b) Calcule o centro de massa.

4. Considere o cilindro homogêneo $(x - a)^2 + y^2 \leqslant a^2$ e $0 \leqslant z \leqslant h$.
   a) Calcule o momento de inércia em relação à reta $x = a$ e $y = 0$.
   b) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo Oz.

5. (*Teorema de Steiner ou dos eixos paralelos.*) Seja I_{cm} o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa de um corpo e I o momento de inércia em relação a um eixo paralelo, a uma distância h. Verifique que $I = I_{cm} + Mh^2$, onde M é a massa do corpo.

6. Aplique o teorema de Steiner ao item *b* do Exercício 4.

7. Calcule o centro de massa da semi-esfera homogênea $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ e $z \geqslant 0$ $(R > 0)$.

8. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio R, em relação a um eixo cuja distância ao centro seja h.

9. Considere um cone circular reto homogêneo de altura h e raio da base R.
   a) Calcule o centro de massa.
   b) Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo.

10. Calcule o momento de inércia de um sólido homogêneo com a forma de um cone circular reto de altura h e raio da base R, em relação a um eixo passando pelo vértice e perpendicular ao eixo do cone.

11. Determine o centro de massa de uma semi-esfera, cuja densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao centro.

12. Calcule o momento de inércia de um cone circular reto de altura h, raio da base R, homogêneo, em relação a um diâmetro de sua base.

6

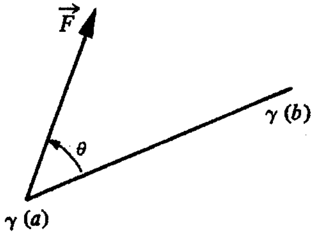
INTEGRAIS DE LINHA

/

6.1. INTEGRAL DE UM CAMPO VETORIAL SOBRE UMA CURVA

Suponhamos que $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seja um campo de forças definido no aberto Ω que uma partícula descreva um movimento em Ω com função de posição $\gamma : [a, b] \to$ ($\gamma(t)$ é a posição da partícula no instante t). Se $\vec{F}$ for *constante* e a imagem de γ um segmento, o *trabalho* τ realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ é, por definição, o produto escalar d $\vec{F}$ pelo deslocamento $\gamma(b) - \gamma(a)$:

$$\tau = \vec{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)].$$



$$\tau = \vec{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)] = \|\vec{F}\| \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \cos\theta$$

Suponhamos, agora, que $\vec{F}$ e γ sejam quaisquer, com $\vec{F}$ contínuo e γ de classe C^1

Queremos definir o trabalho realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$. Seja

Portanto,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

■

Exercícios 6.1

1. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo dados:
   ⓐ $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$
   b) $\vec{F}(x,y,z) = (x + y + z)\vec{k}$ e $\gamma(t) = (t, t, 1 - t^2), 0 \leq t \leq 1$
   c) $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t^2, 3), -1 \leq t \leq 1$
   d) $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t, \text{sen } t), 0 \leq t \leq \pi$
   e) $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e $\gamma(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen } t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$

2. Seja $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo tal que, para todo (x, y), $\vec{F}(x, y)$ é paralelo ao vetor $x\vec{i} + y\vec{j}$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1, cuja imagem está contida na circunferência de centro na origem e raio $r > 0$. Interprete geometricamente.

3. Uma partícula move-se no plano de modo que no instante t sua posição é dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(0)$ até $\gamma(1)$.

4. Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$, sendo dados
   a) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t, t), a = 0$ e $b = 2\pi$
   b) $\gamma(t) = (2t + 1, t - 1, t), a = 1$ e $b = 2$
   c) $\gamma(t) = (\cos t, 0, \text{sen } t), a = 0$ e $b = 2\pi$

5. Calcule $\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$ onde $\vec{E}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\gamma(t) = (t, 1), -1 \leq t \leq 1$. (O $\vec{l}$ desempenha aqui o mesmo papel que o $\vec{r}: \vec{l}(t) = \gamma(t)$.)

6. Seja $\vec{E}$ o campo do exercício anterior e seja γ a curva dada por $x = t$ e $y = 1 - t^4, -1 \leq t \leq 1$.
   a) Que valor é razoável esperar para $\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$? Por quê?
   b) Calcule $\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$

7. Calcule $\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$ onde $\vec{E}$ é o campo dado no exercício 5 e γ a curva dada por $x = 2\cos t$, $y = \text{sen } t$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

6.2. OUTRA NOTAÇÃO PARA A INTEGRAL DE LINHA DE UM CAMPO VETORIAL SOBRE UMA CURVA

Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial contínuo no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e seja $\gamma: [a, b] \to \Omega$ uma curva de classe C^1 dada por $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Temos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} \right] \cdot \left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \right] dt$$
$$= \int_a^b \left[P(x(t),y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt.$$

A última expressão acima nos sugere a notação $\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ para a integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ:

$$\boxed{\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt}$$

Da mesma forma

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

indicará a integral de linha de

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

sobre a curva γ dada por

$$x = x(t), y = y(t) \text{ e } z = z(t), a \leq t \leq b.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\int_\gamma x\,dx + (x^2 + y + z)dy + xyz\,dz$, onde $\gamma(t) = (t, 2t, 1), 0 \leq t \leq 1$.

Solução

De $x = t$, $y = 2t$ e $z = 1$, segue $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2$ e $\frac{dz}{dt} = 0$. Temos:

$$\int_\gamma x\,dx + (x^2 + y + z)dy + xyz\,dz = \int_0^1 \left[t\frac{dx}{dt} + (t^2 + 2t + 1)\frac{dy}{dt} + 2t^2\frac{dz}{dt} \right] dt$$
$$= \int_0^1 \left[t + (t^2 + 2t + 1)2 + 0 \right] dt = \frac{31}{6}.$$

■

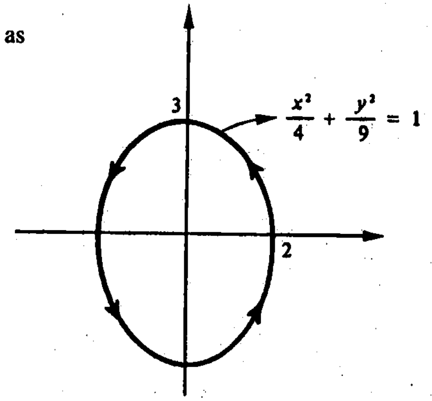
EXEMPLO 2. Calcule $\int_\gamma -y\,dx + x\,dy$, onde $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1, cuja imagem é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, e tal que, quando t varia de a até b, $\gamma(t)$ descreve a elipse no sentido anti-horário.

Solução

(**Observação:** Sempre que se especificar apenas a imagem de γ, entender-se-á que γ é a curva mais "natural" que tem tal imagem.)

Uma parametrização bem natural e que atende as condições dadas é

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ \frac{y}{3} = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$



Temos, então,

$$\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} \left[-3 \operatorname{sen} t \frac{dx}{dt} + 2\cos t \frac{dy}{dt}\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[6 \operatorname{sen}^2 t + 6\cos^2 t\right] dt,$$

ou seja,

$$\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = 12\pi$$

■

Exercícios 6.2

1. Calcule $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, sendo γ dada por $x = t^2$ e $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. Calcule $\int x\,dx - y\,dy$, onde γ é o segmento de extremidades (1, 1) e (2, 3), percorrido no sentido de (1, 1) para (2, 3).

3. Calcule $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$, onde γ é o segmento de extremidades (0, 0, 0) e (1, 2, 1), percorrido no sentido de (1, 2, 1) para (0, 0, 0).

4. Calcule $\int_\gamma x\,dx + dy + 2\,dz$ onde γ é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = 2x + 2y - 1$; o sentido de percurso deve ser escolhido de modo que a projeção de $\gamma(t)$, no plano xy, caminhe no sentido anti-horário.

5. Calcule $\int_\gamma dx + xy\,dy + z\,dz$, onde γ é a interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, com o plano $y = x$; o sentido de percurso é do ponto $(0, 0, \sqrt{2})$ para (1, 1, 0).

6. Calcule $\int_\gamma 2\,dx - dy$, onde γ tem por imagem $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$; o sentido de percurso é de (2, 0) para (0, 2).

7. Calcule $\int_\gamma \frac{-y}{4x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{4x^2 + y^2}\,dy$, onde γ tem por imagem a elipse $4x^2 + y^2 = 9$ e o sentido de percurso é o anti-horário.

8. Seja $\gamma(t) = (R\cos t, R \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ $(R > 0)$. Mostre que $\int_\gamma \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$ não depende de R.

9. Calcule $\int_\gamma dx + y\,dy + dz$ onde γ é a interseção do plano $y = x$ com a superfície $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 2$, sendo o sentido de percurso do ponto $(-1, -1, 2)$ para o ponto (1, 1, 2).

10. Calcule $\int_\gamma dx + dy + dz$ onde γ é a interseção entre as superfícies $y = x^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, sendo o sentido de percurso do ponto (1, 1, 0) para o ponto (0, 0, 2).

11. Calcule $\int_\gamma 2y\,dx + z\,dy + x\,dz$ onde γ é a interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, sendo o sentido de percurso do ponto (1, 0, 0) para o ponto $(-1, 0, 0)$.

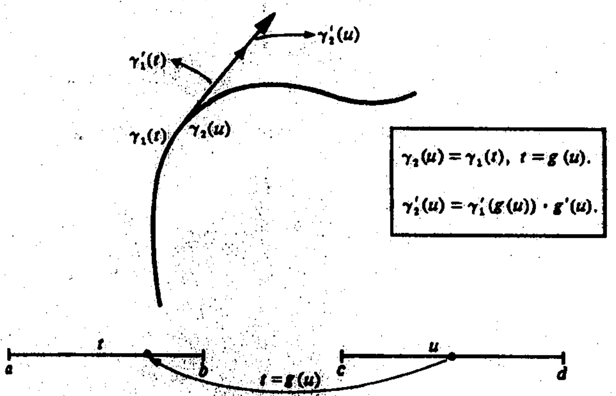
■

6.3. MUDANÇA DE PARÂMETRO

Sejam $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ duas curvas de classe C^1; suponhamos que exista uma função $g : [c, d] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, com $g'(u) > 0$ em $]c, d[$ e $Im\, g = [a, b]$, tal que, para todo u em $[c, d]$,

$$\gamma_2(u) = \gamma_1(g(u))$$

Dizemos, então, que *γ_2 é obtido de γ_1 por uma mudança de parâmetro que conserva a orientação.*



Observe que se γ_2 é obtida de γ_1 por uma mudança de parâmetro que conserva a orientação, então γ_1 e γ_2 têm a mesma imagem e, além disso, de $\gamma_2'(u) = \gamma_1'(g(u))g'(u)$ segue que $\gamma_2'(u)$ e $\gamma_1'(t)$, $t = g(u)$, são paralelos e terão, se não forem nulos, o mesmo sentido, pois, $g'(u) \geqslant 0$ em $[c, d]$.

Se a condição "$g'(u) > 0$ em $]c, d[$" for substituída por "$g'(u) < 0$ em $]c, d[$", então diremos que *γ_2 é obtida de γ_1 por uma mudança de parâmetro que reverte a orientação.* Observe que, neste caso, as velocidades $\gamma_2'(u)$ e $\gamma_1'(t)$, $t = g(u)$, são paralelas e com sentido contrário.

Teorema. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sejam $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \Omega$ duas curvas de classe C^1.

a) Se γ_2 for obtida de γ_1 por uma mudança de parâmetro que conserva a orientação, então

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2.$$

b) Se γ_2 for obtida de γ_1 por uma mudança de parâmetro que reverte a orientação, então

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2.$$

Demonstração

a) $\gamma_2(u) = \gamma_1(g(u))$ em $[c, d]$, onde g é de classe C^1 em $[c, d]$, a imagem de g é $[a, b]$ e $g'(u) > 0$ em $]c, d[$. Observe que g é estritamente crescente em $[c, d]$ e, tendo em vista que $Im\, g = [a, b]$, resulta $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Então, fazendo a mudança de variável $t = g(u)$, vem:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_a^b \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt = \int_c^d \vec{F}(\gamma_1(g(u))) \cdot \gamma_1'(g(u)) \cdot g'(u)\,du$$
$$= \int_c^d \vec{F}(\gamma_2(u)) \cdot \gamma_2'(u)du = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2.$$

b) Fica a cargo do leitor. ■

Exercícios 6.3

1. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo em $\mathbb{R}^2$. Justifique as igualdades.

a) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2$, onde $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, e $\gamma_2(u) = \left(\frac{u}{2}, \frac{u^2}{4}\right)$, $0 \leqslant u \leqslant 2$.

b) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2$, onde $\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, e $\gamma_2(u) = (\cos 2u, \operatorname{sen} 2u)$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$.

c) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2$, onde $\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, e $\gamma_2(u) = (\cos(2\pi - u), \operatorname{sen}(2\pi - u))$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$.

d) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2$, onde $\gamma_1(t) = (t, t^3)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, e $\gamma_2(u) = (1 - u, (1 - u)^3)$, $0 \leqslant u \leqslant 2$.

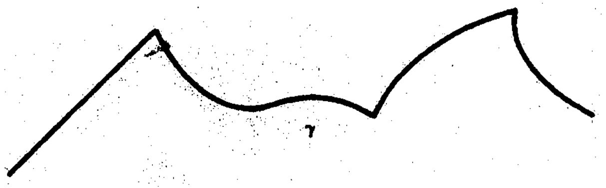
2. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo em Ω e sejam $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \Omega$ duas curvas quaisquer de classe C^1, tais que $Im\,\gamma_1 = Im\,\gamma_2$. A afirmação

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 \text{ ou } \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

6.4. INTEGRAL DE LINHA SOBRE UMA CURVA DE CLASSE C^1 POR PARTES

Uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se diz de *classe C^1 por partes* se for contínua e se existirem uma partição $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ e curvas $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de classe C^1, tais que, para todo t em $]t_{i-1}, t_i[$, $\gamma(t) = \gamma_i(t)$:



γ é de classe C^1 por partes

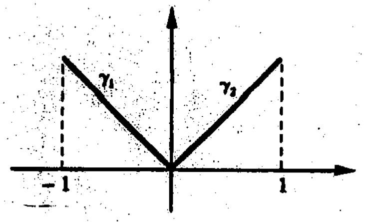
Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo no aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ e seja $\gamma : [a, b] \to \Omega$ uma curva de classe C^1 por partes; definimos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 + \cdots + \int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\gamma_n.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\int_{\gamma} x\,dx + xy\,dy$, onde $\gamma(t) = (t, |t|)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Solução

$$\int_{\gamma} x\,dx + xy\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dx + xy\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dx + xy\,dy$$



Temos:

$$\int_{\gamma_1} -y\,dx + x\,dy = 0,\ \int_{\gamma_2} -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 dt = 1 \text{ e } \int_{\gamma_3} -y\,dx + x\,dy = 0.$$

Portanto,

$$\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = 1.$$

Observação: Se tivéssemos tomado

$$\overline{\gamma}_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

em lugar de

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

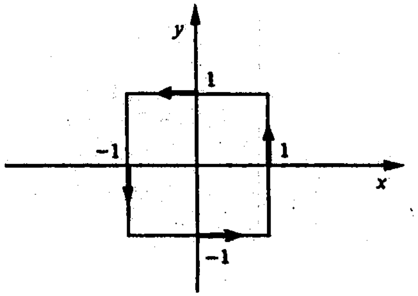
teríamos

$$\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_{\gamma_1} -y\,dx + x\,dy + \int_{\gamma_2} -y\,dx + x\,dy - \int_{\overline{\gamma}_3} -y\,dx + x\,dy.$$

Observe que $\overline{\gamma}_3$ é obtida de γ_3 por uma mudança de parâmetro que reverte a orientação. ■

Exercícios 6.4

1. Calcule $\int_\gamma \sqrt[3]{x}\, dx + \dfrac{dy}{1 + y^2}$, onde γ é a curva



2. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (x + y^2)\,\vec{j}$ e γ é a curva do Exercício 1.

3. Calcule $\int_\gamma (x - y)\,dx + e^{x+y}\,dy$, onde γ é a fronteira do triângulo de vértices (0, 0), (0, 1) e (1, 2), orientada no sentido anti-horário.

4. Calcule $\int_\gamma dx + dy$, onde γ é a poligonal de vértices $A_0 = (0, 0), A_1 = (1, 2), A_2 = (-1, 3), A_3 = (-2, 1)$ e $A_4 = (-1, -1)$, sendo γ orientada de A_0 para A_4.

5. Calcule $\int_\gamma y^2\,dx + x\,dy - dz$, onde γ é a poligonal de vértices $A_0 = (0, 0, 0), A_1 = (1, 1, 1)$ e $A_2 = (1, 1, 0)$, orientada de A_0 para A_2.

6. Calcule $\int_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$ onde γ é a curva do Exercício 5.

7. Verifique que

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

onde B é o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1); γ é a fronteira de B orientada no sentido anti-horário, $P(x, y) = x^2 - y$ e $Q(x, y) = x^2 + y$.

8. Seja B o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1); γ a fronteira de B orientada no sentido anti-horário. Verifique que

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

onde P e Q são supostas de classe C^1 num aberto Ω contendo B.

(*Sugestão*: Calcule $\iint_B \dfrac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy$ fixando, inicialmente, y; calcule $-\iint_B \dfrac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$ fixando, inicialmente, x. Compare, em seguida, com as integrais $\int_\gamma Q\,dy$ e $\int_\gamma P\,dx$.)

9. Verifique a relação do exercício anterior supondo B o quadrado de vértices (−1, −1), (1, −1), (1, 1) e (−1, 1); γ a fronteira de B orientada no sentido anti-horário.

10. Sejam $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 tais que, para todo x em $[a, b]$, $f(x) < g(x)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Seja γ a fronteira de B orientada no sentido anti-horário. Prove que

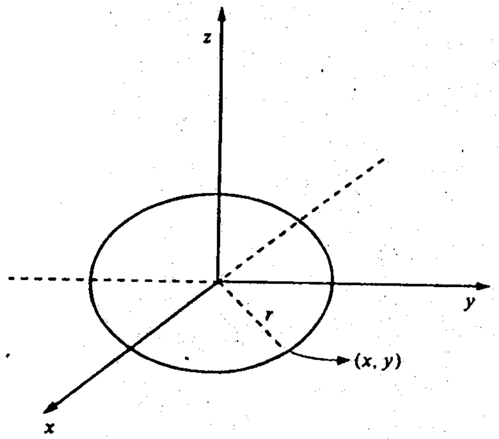
$$\int_\gamma P\,dx = \iint_B -\frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

onde P é suposta de classe C^1 num aberto que contém B.

11. Sejam B e γ como no Exercício 10. Prove que

$$\text{área de } B = -\int_\gamma y\,dx.$$

Solução



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$dm = kds$

(k = constante é a densidade do fio)

Tomemos $\gamma(t) = (R \cos t, R \operatorname{sen} t, 0), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Temos:

$$I = \int_\gamma (x^2 + y^2)\, k\, ds = \int_0^{2\pi} kR^3\, dt = 2\pi kR^3.$$

Como $2\pi kR$ é a massa M do fio, resulta que o momento de inércia é $I = MR^2$.

■

EXEMPLO 4. Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo e seja $\gamma: [a, b] \to \Omega$ uma curva de classe C^1 tal que, para todo t em $[a, b]$, $\| \gamma'(t) \| \neq 0$. Suponha, ainda, que $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ sempre que $t_1 \neq t_2$. Verifique que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_\gamma F_T\,(X)\, ds$$

onde $F_T(\gamma(t)) = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t)$, sendo $\vec{T}(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ o versor de $\gamma'(t)$; $F_T(\gamma(t))$ é a *componente tangencial* de $\vec{F}$ no ponto $\gamma(t)$. (Observe que F_T é uma função definida na imagem de γ e que, a cada $X \in Im\ \gamma$, associa o número $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t)$, onde $X = \gamma(t)$.)

Solução

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \underbrace{\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t)}_{F_T(\gamma(t))} \| \gamma'(t) \|\, dt.$$

Assim

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b F_T(\gamma(t)) \underbrace{\|\gamma'(t)\| dt}_{ds} = \int_\gamma F_T\,(X)\, ds$$

ou seja,

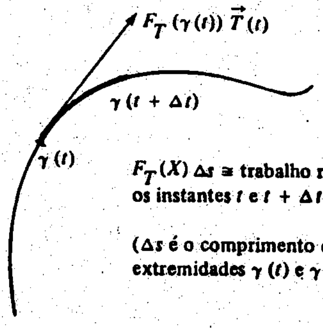
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_\gamma F_T\,(X)\, ds.$$

■

Observação. Se olharmos $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como um campo de forças em Ω e se supusermos que γ descreve o movimento de uma partícula em Ω, então

$$\int_\gamma F_T\,(X) ds$$

é o *trabalho* realizado por $\vec{F}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$.



$F_T(X)\, \Delta s \cong$ trabalho realizado por $\vec{F}$ entre os instantes t e $t + \Delta t$, onde $X = \gamma(t)$.

(Δs é o comprimento do arco de extremidades $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \Delta t)$).

Exercícios 6.5

1. Calcule
   ⓐ $\int_\gamma (x^2 + y^2)\, ds$, onde $\gamma(t) = (t, t), -1 \leqslant t \leqslant 1$
   b) $\int_\gamma (2xy + y^2)\, ds$, onde $\gamma(t) = (t + 1, t - 1), 0 \leqslant t \leqslant 1$
   c) $\int_\gamma xyz\, ds$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
2. Calcule a massa do fio $\gamma(t) = (t, 2t, 3t), 0 \leqslant t \leqslant 1$, cuja densidade linear é $\delta(x, y, z) = x + y + z$.
3. Calcule a massa do fio $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), 0 \leqslant t \leqslant \pi$, com densidade linear $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
4. Calcule o momento de inércia de um fio homogêneo com a forma de uma circunferência de raio R, em torno de um diâmetro.
5. Calcule o momento de inércia do fio $\gamma(t) = (t, 2t, 3t), 0 \leqslant t \leqslant 1$, com densidade linear $\delta(x, y, z) = x + y + z$, em torno do eixo Oz.
⑥ Calcule o momento de inércia de um fio retilíneo, homogêneo, de comprimento L, em torno

7. Calcule o momento de inércia do fio homogêneo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, em torno do eixo Ox.

8. O *centro de massa* de um fio $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ é o ponto (x_c, y_c, z_c) dado por:

$$x_c = \frac{\int_\gamma x\,dm}{\int_\gamma dm} \cdot \gamma_c = \frac{\int_\gamma y\,dm}{\int_\gamma dm} \text{ e } z_c = \frac{\int_\gamma y\,dm}{\int_\gamma dm}$$

onde $dm = \delta(x, y, z)\,ds$ é o elemento de massa. Calcule o centro de massa do fio homogêneo dado.

a) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

b) $\gamma(t) = (t, t^2, 0), -1 \leqslant t \leqslant 1$

9. Calcule o centro de massa do fio $\gamma(t) = (t, t, t), 0 \leqslant t \leqslant 1$, com densidade linear $\delta(x, y, z) = xyz$.

10. Seja $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 e seja $f(x, y)$ um campo escalar contínuo na imagem de γ_1. Seja $\gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ dada por

① $$\gamma_2(t) = \gamma_1(a + b - t).$$

Prove que

$$\int_{\gamma_1} f(x, y)\,ds = \int_{\gamma_2} f(x, y)\,ds.$$

Interprete o resultado. Dê exemplos de curvas satisfazendo ①. Compare com os resultados obtidos na Seção 6.3.

7

CAMPOS CONSERVATIVOS

7.1. CAMPO CONSERVATIVO: DEFINIÇÃO

Um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denomina-se *conservativo* se existe um campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

① $$\nabla\varphi = \vec{F} \text{ em } \Omega.$$

Uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfaz ① denomina-se *função potencial* de $\vec{F}$.
O próximo teorema fornece-nos uma *condição necessária* (mas *não suficiente*) para que um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ seja conservativo.

> ***Teorema.*** Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto Ω. Uma condição necessária para $\vec{F}$ ser conservativo é que $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ em Ω.

Demonstração

Suponhamos $n = 3$ e $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$. Supondo $\vec{F}$ conservativo, existirá $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\varphi = \vec{F} \text{ em } \Omega$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = R \end{cases} \quad \text{em } \Omega.$$

Como $\vec{F}$ é de classe C^1, resulta que φ é de classe C^2. Temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pelo fato de φ ser de classe C^2, segue que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \text{ (teorema de Schwarz)}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ em } \Omega.$$

De modo análogo, conclui-se que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ em } \Omega.$$

Logo, rot $\vec{F} = \vec{0}$ em Ω. ■

Mais adiante daremos exemplo de um campo vetorial $\vec{F}$, não-conservativo, com rotacional $\vec{0}$, que mostrará que a condição rot $\vec{F} = \vec{0}$ é necessária, mas não suficiente, para $\vec{F}$ ser conservativo.

EXEMPLO 1. $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\vec{j}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, é conservativo, pois, tomando-se $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, teremos

$$\nabla \varphi = \vec{F} \text{ em } \Omega = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}.$$ ■

EXEMPLO 2. $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ não é conservativo, pois rot $\vec{F}(x, y) = 2\vec{k} \neq \vec{0}$. ■

Exercícios 7.1

1. O campo vetorial dado é conservativo? Justifique.
   - a) $\vec{F}(x, y, z, w) = (x, y, z, w)$
   - b) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$
   - c) $\vec{F}(x, y, z) = (x - y)\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + z^2\vec{k}$
   - d) $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\vec{j} + \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\vec{k}$
   - e) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $\vec{F}$ o *campo vetorial central*

$$\vec{F}(x, y, z) = f(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Prove que $\vec{F}$ é conservativo.

(*Sugestão*: Verifique que $\nabla \varphi = \vec{F}$ onde $\varphi(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, sendo $g(u)$ uma primitiva de $f(u)$.)

7.2. FORMA DIFERENCIAL EXATA

Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ definido no aberto Ω. Vimos que

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

é uma notação para indicar a integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ. Pois bem, no que segue referir-nos-emos à expressão

① $$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

como uma *forma diferencial* definida no aberto Ω.

Dizemos que ① é uma *forma diferencial exata* se existir uma função diferenciável $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \text{ em } \Omega.$$

Uma tal φ denomina-se *primitiva* de ①.

Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Lembramos que a diferencial de φ, no ponto (x, y), é dada por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\, dy.$$

Deste modo, dizer que ① é uma *forma diferencial exata* é equivalente a dizer que existe um campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que, em todo $(x, y) \in \Omega$, a diferencial de φ é dada por

$$d\varphi = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Observe que ① é uma forma diferencial exata se e somente se o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\, \vec{i} + Q(x, y)\, \vec{j}$ for conservativo. Segue, do que vimos na seção anterior, que se P e Q forem de classe C^1 no aberto Ω, então *uma condição necessária* para ① ser exata é que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ em } \Omega.$$

Da mesma forma, se P, Q e R forem de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, então uma *condição necessária* para

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

ser exata é que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \text{em } \Omega.$$

$\Leftrightarrow \text{rot} F = 0$

EXEMPLO 1. A forma diferencial $2x\, dx + 2y\, dy$ é exata, pois admite $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ como primitiva:

$$d\varphi = d(x^2 + y^2) = 2x\, dx + 2y\, dy. \quad ■$$

EXEMPLO 2. A forma diferencial $y\, dx + 2x\, dy$ não é exata, pois

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) \neq \frac{\partial}{\partial x}(2x) \left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad ■$$

Exercícios 7.2

1. Verifique se a forma diferencial dada é exata. Justifique.

a) $x\, dx + y\, dy + z\, dz$
b) $2xy\, dx + x^2\, dy$
c) $yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$
d) $(x + y)\, dx + (x - y)\, dy$
e) $(x + y)\, dx + (y - x)\, dy$
f) $e^{x^2 + y^2}\, (x dx + y dy)$
g) $xy\, dx + y^2 dy + xyz\, dz$
h) $\dfrac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\, dy,\ y > 0$
i) $\dfrac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\, dy,\ (x, y) \in \Omega$, onde Ω é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$$

2. Mostre que existem naturais m e n para os quais a forma diferencial

$$3x^{m+1} y^{n+1}\, dx + 2x^{m+2} y^n\, dy$$

é exata.

3. Considere a forma diferencial $u(x, y)\, P(x, y)\, dx + u(x, y)\, Q(x, y)\, dy$, onde P, Q e u são supostas de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Prove que uma condição necessária para que a forma diferencial seja exata em Ω é que

$$\frac{\partial u}{\partial y} P - \frac{\partial u}{\partial x} Q = u \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{em } \Omega.$$

4. Determine $u(x, y)$, que só dependa de x, tal que $(x^3 + x + y)\, u(x, y)\, dx - xu(x, y)\, dy$ seja exata.
5. Determine $u(x, y)$, que só dependa de y, de modo que

$$(y^2 + 1)\, u(x, y)\, dx + (x + y^2 - 1)\, u(x, y)\, dy$$

seja exata.

7.3. INTEGRAL DE LINHA DE UM CAMPO CONSERVATIVO

Vimos no Vol. 1 que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua e se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ for uma primitiva de f $(\varphi' = f)$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \varphi'(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Vamos, agora, generalizar este resultado: provaremos que se $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for um campo vetorial contínuo e conservativo, se $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ for uma função potencial para $\vec{F}$ e se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ for de classe C^1, então

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_\gamma \nabla \varphi \cdot d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A)}$$

onde $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$.

Verifica-se facilmente que rot $\vec{F} = \vec{0}$ em $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Consideremos a curva fechada $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 2\pi. \text{ (Verifique.)}$$

Se $\vec{F}$ fosse conservativo, existiria $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\nabla\varphi = \vec{F}$ em Ω, e daí teríamos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_\gamma \nabla\varphi \cdot d\gamma = [\varphi(x,y)]_{\gamma(0)}^{\gamma(2\pi)} = 0$$

que contradiz o resultado obtido acima. ■

Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ de classe C^1 no aberto Ω. Veremos mais adiante que, impondo certas restrições ao aberto Ω, a condição rot $\vec{F} = \vec{0}$ em Ω será necessária e suficiente para $\vec{F}$ ser conservativo.

Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e sejam A e B dois pontos quaisquer de Ω. Suponhamos $\vec{F}$ conservativo com função potencial φ. Segue que, para toda curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$, C^1 por partes, ligando A a B (isto é, com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$), teremos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

isto é, o *valor da integral de linha de* $\vec{F}$ *não depende da curva que liga A a B; tal valor depende apenas dos pontos A e B.*

Este fato nos permite, no caso de $\vec{F}$ ser conservativo, utilizar a notação $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para indicar a integral de linha de $\vec{F}$ sobre uma curva C^1 por partes, ligando A a B. Observe que tal notação não teria sentido se o valor da integral dependesse da curva ligando A a B.

EXEMPLO 4. (*Conservação da energia mecânica.*) Suponhamos $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de forças contínuo e conservativo; assim, existe um campo escalar $E_p : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = -\nabla E_p$. (Observe que $-E_p$ é uma função potencial para $\vec{F}$.) Diremos que E_p é uma função *energia potencial* para $\vec{F}$. Suponhamos, agora, que uma partícula P de massa m desloque em Ω e que $\vec{F}$ seja a *única* força agindo sobre P. Suponhamos, ainda, que $\gamma(t)$ seja a posição da partícula no instante t, onde γ é uma curva de classe C^1 definida no intervalo I. Seja t_0 um instante fixo em I. Para todo t em I, o trabalho realizado por $\vec{F}$ entre os instantes t_0 e t é:

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \nabla(-E_p) \cdot d\vec{r} = -E_p(\gamma(t)) + E_p(\gamma(t_0)).$$

Por outro lado, tendo em vista o Exemplo 3 da Seção 6.1, o trabalho realizado por $\vec{F}$ entre os instantes t_0 e t é igual à variação na energia cinética, isto é:

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_c(t) - E_c(t_0)$$

onde $E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$ é a energia cinética no instante t. Segue que, para todo $t \in I$,

$$-E_p(\gamma(t)) + E_p(\gamma(t_0)) = E_c(t) - E_c(t_0)$$

ou seja,

$$E_p(\gamma(t)) + E_c(t) = E_p(\gamma(t_0)) + E_c(t_0)$$

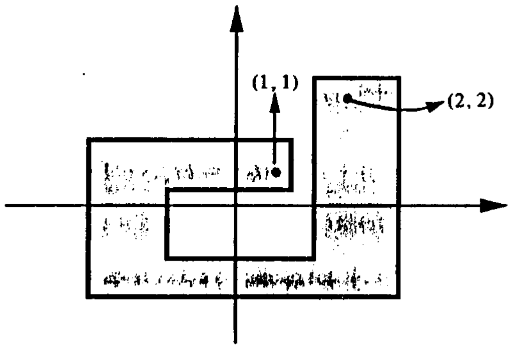
o que mostra que a *soma da energia potencial com a energia cinética permanece constante durante o movimento.* ■

Exercícios 7.3

1. Calcule
   a) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} y\,dx + x\,dy$
   b) $\int_\gamma y\,dx + x^2\,dy$ onde γ é uma curva cuja imagem é o segmento de extremidades (1, 1) e (2, 2), orientada de (1, 1) para (2, 2).
   c) $\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ onde $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes, com imagem contida no semiplano $y > 0$, tal que $\gamma(0) = (1, 1)$ e $\gamma(1) = (-2, 3)$.
   d) $\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$
   e) $\int_\gamma (\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy$ onde $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.
   f) $\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ onde $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes, com imagem contida no conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, tal que $\gamma(0) = (1, 1)$ e $\gamma(1) = (-1, -1)$.
2. Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínuo no aberto Ω. Prove que uma condição necessária para que $\vec{F}$ seja conservativo é que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva γ fechada, C^1 por partes, com imagem contida em Ω.

3. Seja $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \notin A\}$, onde A é a semi-reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ e } x \geqslant 0\}$. Calcule $\int_\gamma \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$, onde $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes, com imagem contida em Ω, tal que $\gamma(0) = (1, 1)$ e $\gamma(1) = (1, -1)$.

4. Seja Ω o interior do conjunto hachurado.



Seja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 por partes com imagem contida em Ω e tal que $\gamma(0) = (1, 1)$ e $\gamma(1) = (2, 2)$. Calcule $\int_\gamma \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$.

7.4. INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO DE INTEGRAÇÃO. EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO POTENCIAL

Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo no aberto Ω, com Ω conexo por caminhos. (Ω *conexo por caminhos* significa que, quaisquer que sejam os pontos A e B de Ω, existe uma poligonal contida em Ω e com extremidades A e B.)

Dizemos que a integral de linha $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *é independente do caminho de integração em* Ω se, quaisquer que forem os pontos A e B de Ω, o valor da integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ permanecer o mesmo para toda curva C^1 por partes $\gamma : [a, b] \to \Omega$, com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$. Se $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ for independente do caminho de integração em Ω, a notação

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

poderá ser utilizada para indicar a integral de linha de $\vec{F}$ sobre uma curva qualquer C^1 por partes $\gamma : [a, b] \to \Omega$, com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$.

Do que vimos na seção anterior, resulta que se $\vec{F}$ for *conservativo* e contínuo em Ω, então a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ será independente do caminho de integração em Ω. Provaremos a seguir que se $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ for independente do caminho de integração em Ω, então $\vec{F}$ será conservativo em Ω.

Teorema. (*Existência de função potencial.*) Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo no aberto conexo por caminhos Ω. Suponhamos que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ seja independente do caminho de integração em Ω. Seja $A \in \Omega$. Então a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(X) = \int_A^X \vec{F} \cdot d\gamma$$

é tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em Ω.

Demonstração

Faremos a demonstração para o caso $n = 3$. Seja, então, $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$. Vamos provar que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R.$$

Seja $X = (x, y, z) \in \Omega$; como Ω é aberto, existe uma bola de centro X contida em Ω. Tomemos $h > 0$ tal que o segmento de extremidades X e $X + h\,\vec{i} = (x + h, y, z)$ esteja contido nesta bola. Temos:

$$\frac{\varphi(X + h\,\vec{i}\,) - \varphi(X)}{h} = \frac{\int_A^{X + h\vec{i}} \vec{F} \cdot d\gamma - \int_A^X \vec{F} \cdot d\gamma}{h} = \frac{\int_X^{X + h\vec{i}} \vec{F} \cdot d\gamma}{h}.$$

Seja $\gamma(t) = X + t\,\vec{i}$, $t \in [0, h]$; γ é uma curva ligando X a $X + h\,\vec{i}$. Então

$$\int_X^{X + h\vec{i}} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^h \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Como $\gamma'(t) = \vec{i}$ e $\vec{F}(\gamma(t)) = P(\gamma(t))\,\vec{i} + Q(\gamma(t))\,\vec{j} + R(\gamma(t))\,\vec{k}$, resulta $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = P(\gamma(t))$. Assim, *Exercícios 7.6*

1. Calcule a derivada da função dada.

   a) $h(x) = \int_1^{x^2} \text{sen } t^2 \, dt + \int_0^1 \frac{1}{1 + xu^4} \, du$

   b) $h(x) = \int_0^1 \text{sen } (x^2 t^2) \, dt$

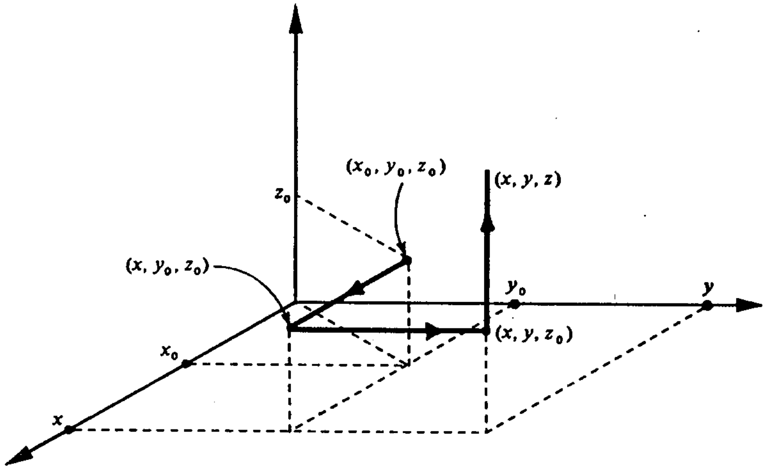
   c) $h(x) = \int_0^x \text{sen } (x^2 t^2) \, dt$

   d) $h(x) = \int_{x^2}^{\text{sen } x} \frac{1}{1 + x^4 t^4} \, dt$

2. Sejam $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funções a valores reais diferenciáveis no intervalo aberto I e $f(x, y)$ de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que, para todo $x \in I$, o segmento de extremidades $(x, \alpha(x))$ e $(x, \beta(x))$ esteja contido em Ω. Estabeleça uma fórmula para a derivada da função

$$h(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy, \ \ x \in I.$$

3. Suponha que o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tenha a seguinte propriedade: existe (x_0, y_0, z_0) em Ω tal que, para todo $(x, y, z) \in \Omega$, a poligonal de vértices (x_0, y_0, z_0), (x, y_0, z_0), (x, y, z_0) e (x, y, z) esteja contida em Ω.



Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ de classe C^1 no aberto Ω e suponha que rot $\vec{F} = \vec{0}$ em Ω. Seja

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0) \, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0) \, dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t) \, dt.$$

Prove que $\nabla\varphi = \vec{F}$.

4. Admita a seguinte propriedade: se $f(x, y)$ for contínua no retângulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) no retângulo,

$$\| (x, y) - (x, t) \| < \delta \Rightarrow | f(x, y) - f(s, t) | < \epsilon.$$

   a) Utilizando a propriedade acima, prove que

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx, \ y \in [c, d].$$

   é contínua em $[c, d]$, onde f é suposta contínua no retângulo acima. (*Sugestão:*

$$| \varphi(y + k) - \varphi(y) | = \left| \int_a^b [f(x, y + k) - f(x, y)] \, dx \right| \leq \int_a^b | f(x, y + k) - f(x, y)| \, dx.)$$

   b) Suponha f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas no retângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y \in I\}$, onde I é um intervalo aberto. Seja

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx, \ y \in I.$$

   Prove que

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx.$$

   (*Sugestão:*

$$\frac{\varphi(y + k) - \varphi(y)}{k} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx = \int_a^b \left[\frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] dx$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] dx$$

   para algum y_1 entre y e $y + k$. Utilize, então, a propriedade acima.)

5. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que $(0, 0) \in \Omega$ e que, para todo $(x, y) \in \Omega$, o segmento de extremidades $(0, 0)$ e (x, y) está contido em Ω. Suponha, ainda, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ em Ω. Seja

$$\varphi(u, v) = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$$

onde $\gamma(t) = (ut, vt)$, $t \in [0, 1]$. Prove que $\nabla\varphi = \vec{F}$.

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j},\ (x, y) \in \Omega.$$

Temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \text{ em } \Omega$$

e

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = 2\pi$$

onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (Verifique.) Assim, rot $\vec{F} = \vec{0}$ em Ω e $\vec{F}$ não é conservativo; logo $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não pode ser simplesmente conexo.

Pode ser provado que $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ é simplesmente conexo. (É razoável tal afirmação? Por quê?)

Exercícios 7.7

1. Prove que o conjunto dado é simplesmente conexo.

   a) $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$
   b) $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$
   (*Sugestão*: Verifique que o conjunto dado é estrelado.)

2. Utilizando o teorema da seção e o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$$

prove que $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ não é simplesmente conexo.

8

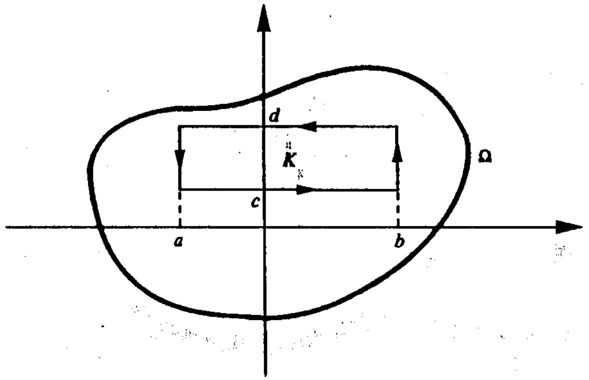
TEOREMA DE GREEN

8.1. TEOREMA DE GREEN PARA RETÂNGULOS

Teorema de Green (*para retângulos*). Seja K o retângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ e seja γ a fronteira de B orientada no sentido anti-horário. Suponhamos que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sejam de classe C^1 num aberto Ω contendo K. Então

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

Demonstração



Vamos provar que

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx = -\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx\,dy$$

e

$$\int_\gamma Q(x, y)\, dy = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy.$$

Temos:

① $$\int_\gamma P(x, y)\, dx = \int_a^b P(t, c)\, dt - \int_a^b P(t, d)\, dt.$$

Por outro lado,

$$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b [\, P(x, y)\,]_c^d\, dx$$

ou seja,

② $$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b |\, P(x, d) - P(x, c)\,|\, dx.$$

De ① e ② resulta

$$\int_\gamma P(x, y)\, dx = -\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy.$$

De forma análoga verifica-se que

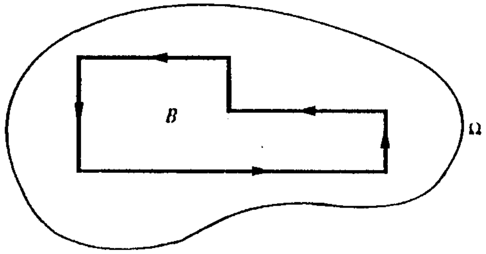
$$\int_\gamma Q(x, y)\, dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy.$$

Somando-se membro a membro as duas últimas igualdades resulta o teorema. ■

A notação $\oint P\, dx + Q\, dy$ é freqüentemente usada para indicar a integral de linha sobre uma curva fechada, orientada no sentido anti-horário. Com esta notação, a igualdade a que se refere o teorema de Green se escreve

$$\boxed{\oint_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.}$$

EXEMPLO. Suponha $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja γ a fronteira de B orientada no sentido anti-horário, onde B é o conjunto a seguir

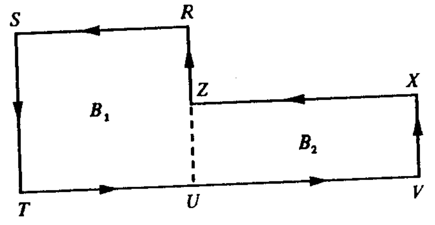


Prove que

$$\oint_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Solução

Inicialmente, vamos dividir B em dois retângulos: B_1 de vértices R, S, T, U; B_2 de vértices U, V, X, Z.



Pelo teorema de Green,

$$\int_{\overline{ZRSTU}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overline{UZ}} P\, dx + Q\, dy = \iint_{B_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

e

$$\int_{\overline{UVXZ}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overline{ZU}} P\, dx + Q\, dy = \iint_{B_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Somando-se membro a membro as duas últimas igualdades e observando que

$$\int_{\overline{UZ}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overline{ZU}} P\, dx + Q\, dy = 0 \quad \text{(por quê?)}$$

resulta

$$\oint_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$ ■

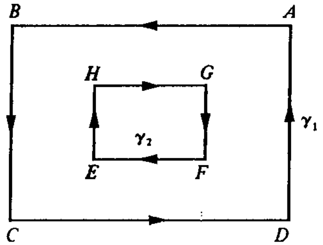
Exercícios 8.1

1. Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ de classe C^1 num aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $B \subset \Omega$ um retângulo de lados paralelos aos eixos e de comprimentos Δx e Δy. Prove que existe $(s, t) \in B$ tal que

$$\oint_\gamma P\, dx + Q\, dy = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial P}{\partial y}(s, t) \right] \Delta x\, \Delta y$$

onde γ é a fronteira de B orientada no sentido anti-horário.

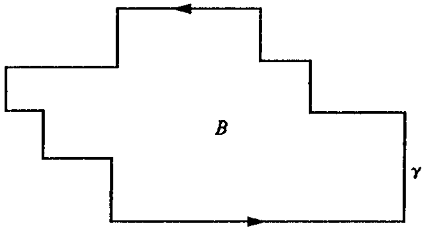
2. Sejam γ_1 a poligonal de vértices *A, B, C, D* orientada no sentido anti-horário e γ_2 a poligonal de vértices *H, G, F, E* orientada no sentido horário.



Suponha *P* e *Q* de classe C^1 num aberto contendo *K*, onde *K* é a região compreendida entre as poligonais. Prove que

$$\oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx\,dy.$$

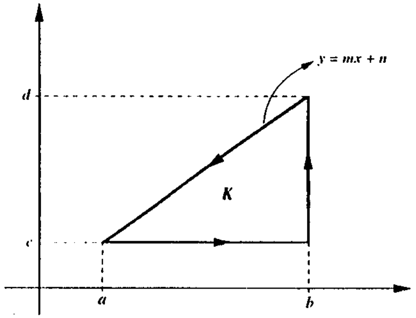
3. Seja *B* o conjunto



e seja γ a fronteira de *B* orientada no sentido anti-horário. Suponha $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ de classe C^1 num aberto Ω contendo *B*. Prove que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

4. Seja *K* o triângulo a seguir e γ a fronteira de *K* orientada no sentido anti-horário. Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ de classe C^1 num aberto contendo *K*.

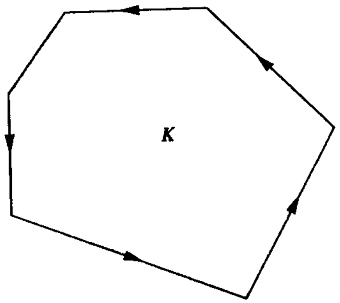


Prove que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$\left(\textit{Sugestão}: \text{Prove que } \oint_\gamma P\,dx = -\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \text{ e } \oint_\gamma Q\,dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy. \right)$

5. Seja *K* a região abaixo e γ a fronteira de *K* orientada no sentido anti-horário. Sejam *P* e *Q* de classe C^1 num aberto contendo *K*.



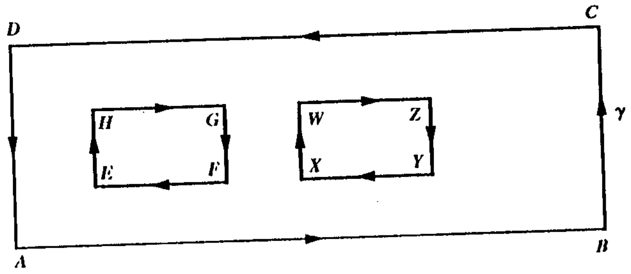
Prove que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx\,dy.$$

(*Sugestão*. Decomponha *K* em retângulos e triângulos. Utilize, então, o teorema da seção e o Exercício 4.)

6. Seja *K* a região hachurada; γ a poligonal *ABCD* orientada no sentido anti-horário; γ_1 a poligonal *EHGF* orientada no sentido horário; γ_2 a poligonal *XWZY* orientada no sentido horário. Prove que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$



7. Suponha $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ de classe C^1 num aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Prove que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é irrotacional se e somente se

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

para toda curva γ, orientada no sentido anti-horário e fronteira de um retângulo de lados paralelos aos eixos e contido em Ω.

8. (*Teorema de Green para um círculo.*) Seja B o círculo de centro na origem e raio r. Seja $\gamma(t) = (r\cos t,\ r\,\text{sen}\,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Suponha que P e Q sejam de classe C^1 num aberto Ω contendo B. Prove

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

9. Seja $y = f(x)$ de classe C^1 em $[a, b]$ e tal que $f'(x) > 0$ em $]a, b[$. Seja K o conjunto $a \leqslant x \leqslant b$ e $f(a) \leqslant y$ [illegible] x). Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K. Prove que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

onde γ é a fronteira de K orientada no sentido anti-horário.

(*Sugestão.* $\displaystyle\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{f(a)}^{f(b)}\left[\int_{g(y)}^{b} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx\right] dy$, onde $x = g(y)$ é a inversa de $y = f(x)$.)

10. Seja $y = f(x)$ de classe C^1 em $[a, b]$ e tal que $f'(x) < 0$ em $]a, b[$. Seja K o conjunto $a \leqslant x \leqslant b$ e $f(x) \leqslant y \leqslant f(a)$. Sejam P e Q de classe C^1 em um aberto contendo K. Prove que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

onde γ é a fronteira de K orientada no sentido anti-horário.

11. Faça uma lista de conjuntos para os quais você acha que o teorema de Green se aplica. Justifique.

8.2. TEOREMA DE GREEN PARA CONJUNTO COM FRONTEIRA C^1 POR PARTES

O próximo teorema, que enunciaremos sem demonstração (para demonstração veja referência bibliográfica [1]), conta-nos que o teorema de Green, visto na seção anterior, continua válido se substituirmos o retângulo por um compacto K, com interior não-vazio, cuja fronteira é imagem de uma curva simples, fechada, C^1 por partes. Uma curva $\gamma: [a, b] \to \Omega$, fechada, se diz simples se $\gamma(s) \neq \gamma(t)$, quaisquer que sejam s e t em $[a, b[$, com $s \neq t$. (Desenhe algumas curvas simples.)

Teorema de Green. Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, com interior não-vazio, cuja fronteira é imagem de uma curva $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$, fechada, simples, C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K. Nestas condições.

① $$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy$$

O teorema de Green nos afirma que se P e Q forem de classe C^1 no aberto Ω e se K estiver *contido* em Ω, então ① se verifica. Entretanto, se K *contiver um ponto que não pertença a* Ω, a relação ① não terá nenhuma obrigação de se verificar. (Veja Exemplo 2.)

EXEMPLO 1. Utilizando o teorema de Green, transforme a integral de linha

$$\oint_\gamma (x^4 - y^3)\,dx + (x^3 + y^5)\,dy$$

numa integral dupla e calcule, onde γ é dada por $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Solução

$P(x, y) = x^4 - y^3$ e $Q(x, y) = x^3 + y^5$ são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. A imagem de γ é a fronteira do círculo K dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$, que está contido em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Green

$$\oint_\gamma \underbrace{(x^4 - y^3)}_{P}\,dx + \underbrace{(x^3 + y^5)}_{Q}\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$, resulta

$$\oint_\gamma (x^4 - y^3)\,dx + (x^3 + y^5)\,dy = 3\iint_K (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Passando para coordenadas polares,

$$\iint_K (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right] d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\oint_\gamma (x^4 - y^3)\,dx + (x^3 + y^5)\,dy = \frac{3\pi}{2}.$$

■

EXEMPLO 2. Calcule $\displaystyle\oint_\gamma \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

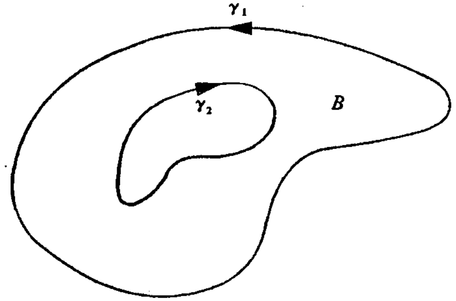
Solução

$P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ são de classe C^1 no aberto $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. A imagem de γ é a fronteira do círculo $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; B não está contido em Ω, pois $(0, 0) \in B$, mas não pertence a Ω. Como as hipóteses do teorema de Green não estão satisfeitas, o teorema de Green não se aplica. A integral deve ser calculada diretamente:

$$\oint_\gamma \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Observe que $\iint_B \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = 0.$ ■

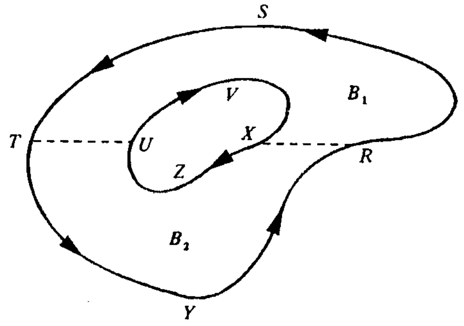
EXEMPLO 3. Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas fechadas, simples, C^1 por partes, sendo γ_1 orientada no sentido anti-horário e γ_2 no sentido horário, como na figura que se segue.



Seja B a região compreendida entre as curvas γ_1 e γ_2. Suponha que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são de classe C^1 num aberto contendo B. Prove

$$\oint_{\gamma_1} P\, dx + Q\, dy + \oint_{\gamma_2} P\, dx + Q\, dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Solução



Seja B_1 a região limitada pela curva $\widehat{RSTUVXR}$ e B_2 limitada pela curva $\widehat{RXZUTYR}$. Pelo teorema de Green aplicado a B_1, obtemos:

$$\int_{\widehat{RST}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overline{TU}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\widehat{UVX}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overline{XR}} P\, dx + Q\, dy$$
$$= \iint_{B_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

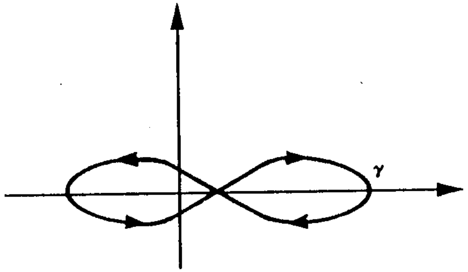
Da mesma forma,

$$\int_{\overline{RX}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\widehat{XZU}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overline{UT}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\widehat{TYR}} P\, dx + Q\, dy$$
$$= \iint_{B_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

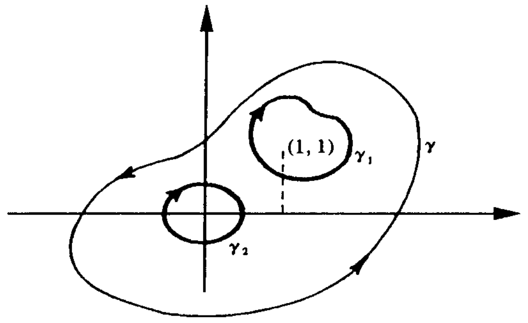
Somando-se membro a membro as igualdades acima, obtemos a relação desejada. ■

Exercícios 8.2

1. Sejam γ e K como no teorema de Green. Prove que área de $K = \oint_\gamma x\, dy$.
2. Calcule a área da região limitada pela curva $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e pelo eixo $0x$.
3. Calcule a área da região limitada pela elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, onde $a > 0$ e $b > 0$.
4. Calcule $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$, onde γ é uma curva fechada, simples, C^1 por partes, cuja imagem é a fronteira de um compacto B e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\,\vec{i} + (3x - y)\,\vec{j}$.
5. Calcule $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$ onde $\vec{F}(x, y) = 4x^3y^3\,\vec{i} + (3x^4y^2 + 5x)\,\vec{j}$ e γ a fronteira do quadrado de vértices $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
6. Calcule $\oint_\gamma \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\, dy$ onde γ é uma curva fechada, C^1 por partes, simples, fronteira de um conjunto B, cujo interior contém o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. (*Sugestão*. Aplique o teorema de Green à região K compreendida entre a curva γ e a circunferência.)
7. Calcule $\oint_\gamma \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\, dy$ onde γ é a curva



8. Suponha P e Q de classe C^1 em $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0), (1, 1)\}$. Suponha, ainda, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ em Ω. Calcule $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$, sabendo que $\oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = 1$ e $\oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 2$. ($\gamma_1$ e γ_2 são orientadas no sentido horário e γ no sentido anti-horário.)



9. Calcule a área da região limitada pela reta $y = x$ e pela curva $x = t^3 + t$ e $y = t^5 + t$, com $0 \leq t \leq 1$. Desenhe a região.

8.3. TEOREMA DE STOKES NO PLANO

Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e sejam γ e K como no teorema de Green. Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\text{rot } \vec{F}\right) \cdot \vec{k}$$

resulta

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k}\,dx\,dy$$

ou seja,

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_K \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k}\,dx\,dy}$$

Nesta forma, o teorema de Green é, também, conhecido como *teorema de Stokes no plano.*

EXEMPLO. Desenhe o campo

$$F(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$$

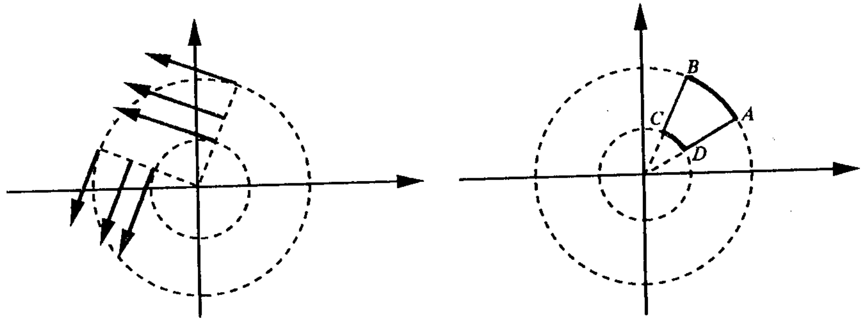
e conclua que $\vec{F}$ não é irrotacional.

Solução

$\vec{F}\,(x, y)$ é paralelo a $-y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$. Segue que $\vec{F}\,(x, y)$ é tangente, no ponto (x, y), à circunferência de centro na origem e que passa por este ponto. Além disso, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\|\vec{F}\,(x, y)\| = 1;$$

isto é, a intensidade do campo é constante e igual a 1.



Seja K o compacto $ABCD$. (Veja figura.) Imaginemos $\vec{F}$ como um campo de forças. Como $\vec{F}$ é normal aos lados BC e DA, são nulos os trabalhos realizados sobre estes lados. O módulo do trabalho realizado de A até B é maior que o módulo do realizado de C até D. Por quê? Logo, $\vec{F}$ não é irrotacional, pois se $\vec{F}$ fosse irrotacional, pelo teorema de Green, o trabalho ao longo da fronteira de K deveria ser nulo. ■

8.4. TEOREMA DA DIVERGÊNCIA NO PLANO

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva. Se γ for de classe C^1 e se, para todo $t \in\,]a, b[$, $\gamma'\,(t) \neq \vec{0}$, então diremos que γ é *regular.*

Suponhamos que $\gamma\,(t) = (x\,(t), y\,(t))$, $a \leq t \leq b$, seja regular e injetora em $]a, b[$. Podemos, então, considerar os campos vetoriais $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ dados por

$$\vec{n_1}\,(\gamma\,(t)) = \frac{1}{\|\gamma'\,(t)\|}\,(y'(t)\,\vec{i} - x'(t)\,\vec{j}),\ a < t < b,$$

e

$$\vec{n_2}\,(\gamma(t)) = -\vec{n_1}\,(\gamma(t)).$$

Observe que $y'(t)\,\vec{i} - x'(t)\,\vec{j}$, $a < t < b$, é *normal* a $\gamma'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$. Deste modo, $\vec{n_1}$ associa a cada ponto $\gamma\,(t)$ da imagem de γ, $a < t < b$, um vetor *unitário* e *normal* a γ, no ponto $\gamma\,(t)$.

Pelo teorema de Green,

$$\oint_\gamma -Q\,dx + P\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

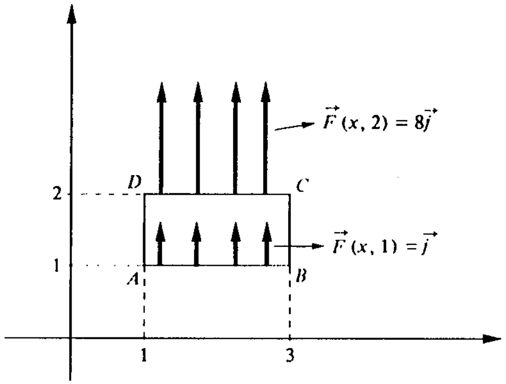
E, portanto,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy. \qquad \blacksquare$$

Dizemos que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é *regular por partes* se for C^1 por partes e se cada "trecho" $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2$ satisfizer a condição $\gamma_i'(t) \neq \vec{0}$ em $]t_{i-1}, t_i[$. Fica a seu cargo estender o teorema acima para o caso em que a fronteira de K seja regular por partes.

EXEMPLO 1. Seja $\vec{F}(x, y) = y^3\,\vec{j}$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da fronteira γ do retângulo $1 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, sendo $\vec{n}$ a normal unitária que aponta para fora do retângulo.

Solução



A normal exterior sobre o lado CD é $\vec{j}$; a componente de $\vec{F}(x, 2)$ na direção $\vec{j}$ é $\vec{F}(x, 2) \cdot \vec{j} = 8$. Como a componente normal de $\vec{F}$ é constante, o fluxo de $\vec{F}$ através do lado CD é o produto da componente normal pelo comprimento do lado CD. Portanto, o fluxo de $\vec{F}$ através do lado CD é 16. A normal exterior sobre o lado AB é $-\vec{j}$; o fluxo através de AB é -2. Como $\vec{F}$ é normal a $\vec{i}$, os fluxos através de BC e DA são nulos. Temos, então

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = 14.$$

Poderíamos, também, ter chegado ao resultado acima aplicando o teorema da divergência.

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K div\, \vec{F}\, dx\, dy$$

onde K é o retângulo dado e γ sua fronteira orientada no sentido anti-horário e $\vec{n}$ a normal exterior. Como $\operatorname{div} \vec{F} = 3y^2$ vem

$$\iint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy = \int_1^3 \left[\int_1^2 3y^2\, dy\right] dx = 14. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 2. Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ de classe C^1 num aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Suponha que div $\vec{F}$ é diferente de zero no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Prove que existe uma bola aberta B, de centro (x_0, y_0), tal que, para todo $K \subset B$, K nas condições do teorema de Green, tem-se

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds \neq 0$$

onde γ é a fronteira de K e $\vec{n}$ a normal unitária exterior a K.

Solução

Sendo $\vec{F}$ de classe C^1, div $\vec{F}$ será contínuo em Ω. Para fixar o raciocínio suporemos $\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0) > 0$. Pelo teorema da conservação do sinal, existe uma bola aberta B, de centro (x_0, y_0) (podemos supor $B \subset \Omega$, pois Ω é aberto) tal que, para todo $(x, y) \in B$,

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) > 0.$$

Segue que para todo $K \subset B$, K nas condições do teorema de Green, tem-se

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy > 0. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 3. Seja $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y}{(x^2 + y^2)^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^2}\,\vec{j}$.

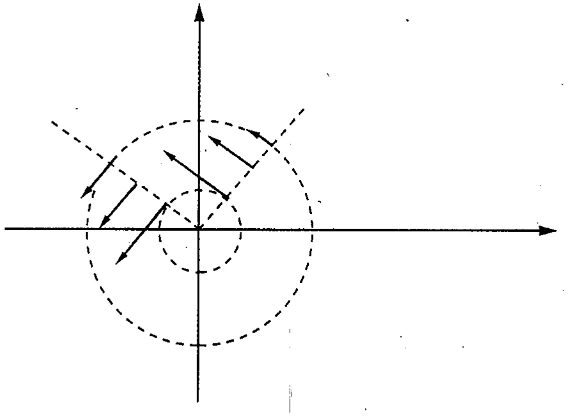
a) Desenhe o campo.
b) Calcule div $\vec{F}$.

Solução

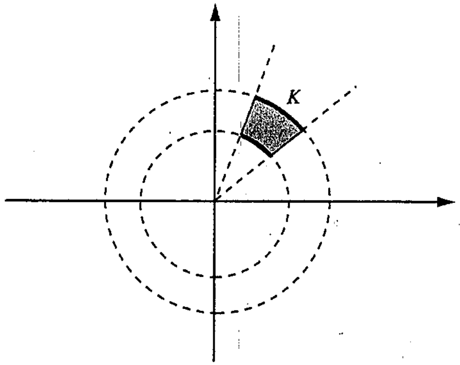
a) $\vec{F}(x, y)$ é tangente à circunferência de centro na origem e que passa pelo ponto (x, y). Temos, ainda:

$$\|\vec{F}(x, y)\| = \frac{1}{\rho^3}$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ é o raio da circunferência de centro na origem e que passa pelo ponto (x, y).



Observe que qualquer que seja o conjunto K da forma abaixo (veja figura), o *fluxo através da sua fronteira, e na direção da normal exterior, é nulo.* Por quê?



É razoável esperar div $\vec{F} = 0$. (Veja exemplo anterior.)

b) div $\vec{F} = 0$. (Verifique.) ■

Exercícios 8.4

1. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ sendo dados (para evitar repetição, ficará subentendido que $\vec{n}$ é unitário):

   a) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\vec{n}$ a normal exterior.

   b) $\vec{F}(x, y) = y\vec{j}$, γ a fronteira do quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1) e $\vec{n}$ a normal que aponta para fora do quadrado, sendo γ orientada no sentido anti-horário.

   c) $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i}$, $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e $\vec{n}$ a normal que aponta para fora da região $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

   d) $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i}$, $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$, e $\vec{n}$ a normal com componente $y \geq 0$.

   e) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, e $\vec{n}$ a normal com componente $y < 0$.

2. Prove que se $\vec{F} \cdot \vec{n}$ for constante sobre $Im\ \gamma$, então o fluxo de $\vec{F}$ através de γ é o produto de $\vec{F} \cdot \vec{n}$ pelo comprimento de γ, onde $\vec{n}$ é normal a γ.

3. Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^5}\vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^5}\vec{j}$ e $\vec{n}$ a normal unitária exterior ao círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

   (*Sugestão.* Verifique que $\vec{F} \cdot \vec{n}$ é constante.)

4. Desenhe o campo do exercício anterior. (Sugerimos ao leitor desenhar algumas circunferências de centro na origem e, em seguida, desenhar o campo nos pontos destas circunferências.)

   a) Olhando o desenho do campo é possível decidir se div $\vec{F}$ é zero ou não? Por quê?

   b) Calcule div $\vec{F}$.

5. Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}$.

   a) Desenhe o campo.

   b) Olhando para o desenho é possível decidir se $\vec{F}$ é ou não *solenoidal*? (Dizemos que $\vec{F}$ é *solenoidal* se div $\vec{F} = 0$ em seu domínio.)

6. Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}\vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha}\vec{j}$. Determine α para que $\vec{F}$ seja solenoidal. Desenhe o campo para o α determinado.

7. Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ duas funções a valores reais, de classe C^2, no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $\gamma: [a, b] \to \Omega$ uma curva regular, fechada, simples, orientada no sentido anti-horário, fronteira de um compacto K, com interior não-vazio e contido em Ω; seja $\vec{n}$ a normal exterior a K. Prove:

   a) $\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \iint_K \nabla^2 g\, dx\, dy$. $\left(\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \text{ é a derivada direcional de } g \text{ na direção } \vec{n} \text{ e } \nabla^2 g \text{ o laplaciano de } g. \right)$

   b) $\oint_\gamma f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \iint_K (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy$. (Veja Exercício 9*c* da Seção 1.4 deste volume.)

   c) $\oint_\gamma f \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, ds = \iint_K (f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2)\, dx\, dy$.

8. Seja $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto Ω e sejam γ e K como no exercício anterior. Prove que se $\nabla^2 v = 0$ no interior de K e $v(\gamma(t)) = 0$ em $[a, b]$, então $v(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in K$. Suponha, ainda, que K seja um círculo.
(*Sugestão.* Utilize o item *c* do exercício anterior.)

9. Sejam γ e K como no Exercício 8. Seja $F(x, y)$ uma função a valores reais definida e contínua no interior de K e seja $f(x)$ uma função a valores reais definida e contínua em $[a, b]$. Considere o problema com *condição de fronteira*

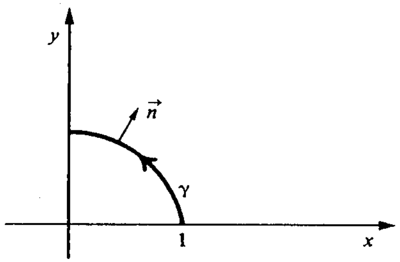
$$① \begin{cases} \nabla^2 u = F \text{ no interior de } K \\ u(\gamma(t)) = f(t) \text{ em } [a, b]. \end{cases}$$

Prove que se u_1 e u_2 são funções a valores reais, de classe C^2 num aberto contendo K, satisfazendo ①, então $u_1 = u_2$ em K.

10. Seja $\vec{F}(x, y) = x^3y^3\,\vec{i} + \left(3y - \frac{3}{4}x^2y^4\right)\vec{j}$ e seja $\gamma(t) = (t^3, \text{sen}\,(4\,\text{arctg}\,t^2)), 0 \leq t \leq 1$. Seja α a área do conjunto limitado pelo eixo x e pela curva γ. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ onde $\vec{n}$ é a norm·l a γ que aponta para fora do conjunto acima mencionado.

11. Seja $\vec{F}$ o campo do exercício anterior e seja $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ onde $\vec{n}$ é a normal com componente $y \geq 0$.
(*Sugestão.* Escolha um compacto K conveniente e aplique o teorema da divergência.)

12. Seja $\vec{F}(x, y) = x^{10}\,\vec{i} + (3x - 10x^9y)\,\vec{j}$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$, onde γ e $\vec{n}$ estão dados pela figura abaixo.



13. Sejam $\vec{F}(x, y) = x^3\,\vec{i} - 3x^2y\,\vec{j}$, $\gamma_1(t) = \left(t, e^{t^2 - 1}\right), 0 \leq t \leq 1$, e $\gamma_2(t) = (t, t^2), 0 \leq t \leq$ 1. Sejam $\vec{n_1}$ a normal a γ_1 com componente $y > 0$ e $\vec{n_2}$ a normal a γ_2 com componente $y < 0$. Calcule $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\, ds$.
(*Sugestão.* Verifique que $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\, ds = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2}\, ds$.)

9

ÁREA E INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

9.1. SUPERFÍCIES

Por uma *superfície parametrizada* σ entendemos uma transformação $\sigma: A \to \mathbb{R}^3$, onde A é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Supondo que as componentes de σ sejam dadas por $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$, então $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

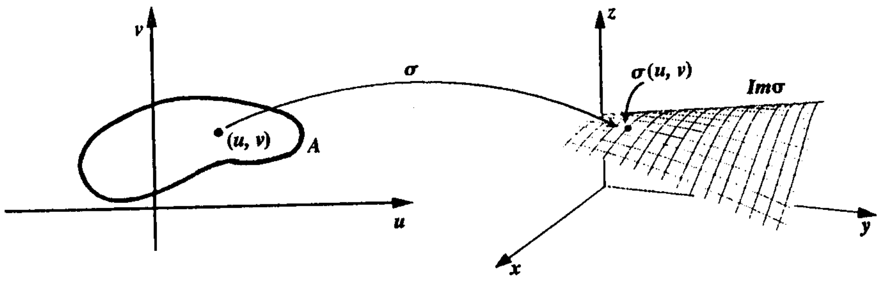
Escreveremos com freqüência

$$① \qquad \sigma: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A$$

para indicar a superfície parametrizada σ dada por $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

O lugar geométrico descrito por $\sigma(u, v)$, quando (u, v) percorre A, é a *imagem* de σ:

$$Im\, \sigma = \left\{\sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (u, v) \in A\right\}.$$



$$P = (\cos u, \operatorname{sen} u, 1) \text{ e } B = \left(\left(1 + \operatorname{sen}\frac{u}{2}\right)\cos u, \left(1 + \operatorname{sen}\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen} u, 1 + \cos\frac{u}{2}\right)$$

O segmento AB tem a seguinte parametrização:

$$(x, y, z) = P + v(B - P), \ -1 \leqslant v \leqslant 1,$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 1) + v\left(\operatorname{sen}\frac{u}{2}\cos u, \operatorname{sen}\frac{u}{2}\operatorname{sen} u, \cos\frac{u}{2}\right).$$

Assim, σ é dada por

$$\begin{cases} x = \left(1 + v\ sen\ \dfrac{u}{2}\right)\cos u \\ y = \left(1 + v\ sen\ \dfrac{u}{2}\right) sen\ u & \qquad -1 \leqslant v \leqslant 1, 0 \leqslant u \leqslant 2\pi. \\ z = 1 + v\cos\dfrac{u}{2}. \end{cases}$$

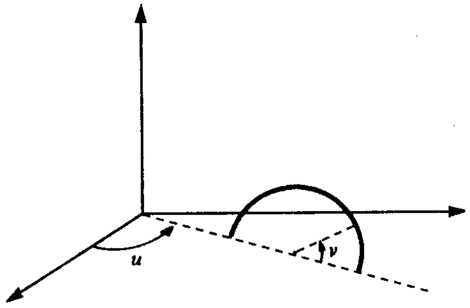
Sugerimos ao leitor construir uma faixa de Möbius utilizando uma fita de papel. ■

Exercícios 9.1

1. Desenhe a imagem da superfície parametrizada dada.

a) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
b) $\sigma(u, v) = (1, u, v), 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$.
c) $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u - v), u \geqslant 0, v \geqslant 0$ e $u + v \leqslant 1$.
d) $\sigma(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), u^2 + v^2 \leqslant 1$.
e) $\sigma(u, v) = (v\cos u, v \operatorname{sen} u, v), 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0 \leqslant v \leqslant h$, onde $h > 0$ é um real dado.
f) $\sigma(u, v) = \left(v\cos u, v\ sen\ u, \dfrac{1}{v^2}\right), 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, v > 0$.
g) $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u^2), u \geqslant 0, v \geqslant 0$ e $u + v \leqslant 1$.

2. Seja $A = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (y - 2)^2 = 1\}$ e seja B o conjunto do espaço obtido pela rotação em torno do eixo z do conjunto A. Determine uma parametrização para B.
(*Sugestão*: Parametrize B utilizando os parâmetros u e v conforme figura seguinte.)



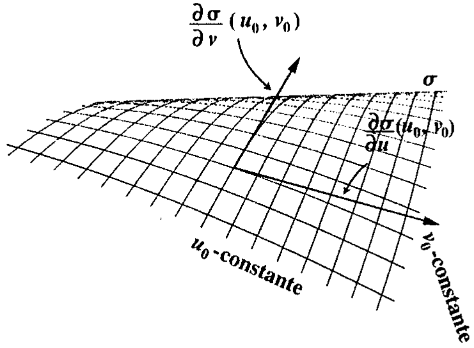
3. Determine uma parametrização para o conjunto de todos (x, y, z) tais que $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, onde a, b e c são constantes estritamente positivas.

4. Parametrize o conjunto dado.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$.
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 4z = 5\}$.
c) Conjunto obtido pela rotação em torno do eixo z da curva $y = 0$ e $z = e^x, x \geqslant 0$.
d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2x\}$.
e) Conjunto obtido pela rotação em torno do eixo z da curva $y = 0$ e $z = \dfrac{1}{x}, x > 0$.
f) Conjunto obtido pela rotação em torno do eixo z da curva $y = 0$ e $z = x - x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

9.2. PLANO TANGENTE

Seja $\sigma: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto, uma superfície parametrizada de classe C^1 e seja (u_0, v_0) um ponto de Ω. Fixado u_0, $v \mapsto \sigma(u_0, v)$ é uma curva cuja imagem está contida na imagem de σ. Se $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, então $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$ será um vetor tangente a esta curva no ponto $\sigma(u_0, v_0)$. De modo análogo, fixado v_0, podemos considerar a curva $u \mapsto \sigma(u, v_0)$; se $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, então $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$ será um vetor tangente a esta curva no ponto $\sigma(u_0, v_0)$.



Se $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, podemos considerar o plano que passa por $\sigma(u_0, v_0)$ e que seja normal ao vetor $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$. Tal plano denomina-se *plano tangente* à superfície σ no ponto $(x_0, y_0, z_0) = \sigma(u_0, v_0)$ e tem por equação

$$\boxed{(x, y, z) = \sigma(u_0, v_0) + s\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) + t\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \ (s, t \in \mathbb{R}).}$$

Tal equação pode, também, ser colocada na forma

$$\boxed{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0}$$

Seja $\sigma: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto, de classe C^1. Dizemos que σ é *regular* no ponto $(u_0, v_0) \in \Omega$ se $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$. Diremos que σ é *regular em* Ω se for regular em todo ponto de Ω. Observamos que σ ser regular em Ω significa que σ admite plano tangente em todo ponto $\sigma(u, v)$, com $(u, v) \in \Omega$.

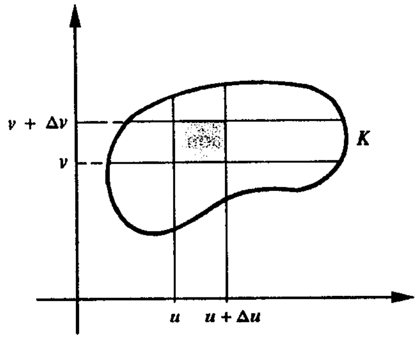
Exercícios 9.2

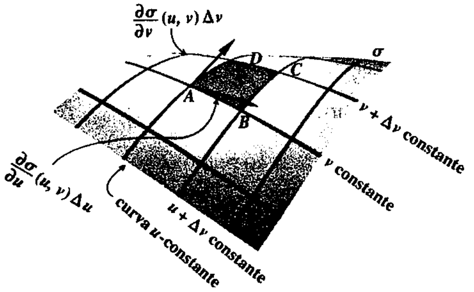
1. Determine o plano tangente à superfície dada, no ponto dado.
   - *a*) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, no ponto $\sigma(1, 1)$.
   - *b*) $\sigma(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, no ponto $\sigma\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.
   - *c*) $\sigma(u, v) = (2u + v, u - v, 3u + 2v)$, no ponto $\sigma(0, 0)$.
   - *d*) $\sigma(u, v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$, no ponto $\sigma(1, 1)$.
   - *e*) $\sigma(u, v) = (\operatorname{arctg} uv, e^{u^2 - v^2}, u - v)$, no ponto $\sigma(1, -1)$.
2. Seja $\sigma: \Omega \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto em $\mathbb{R}^2$, uma superfície de classe C^1 e seja $\gamma: I \to \Omega$ uma curva de classe C^1, com $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. (Observe que $\gamma(t)$ é um ponto de Ω, para todo $t \in I$.) Seja $\Gamma: I \to Im\, \sigma$ a curva dada por $\Gamma(t) = \sigma(\gamma(t))$. Prove que $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\gamma(t)) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\gamma(t))$ é ortogonal a $\Gamma'(t)$. Interprete.
3. Seja $\sigma: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto, uma superfície de classe C^1 dada por $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Verifique que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k}.$$

9.3. ÁREA DE SUPERFÍCIE

Seja $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$, onde K é um compacto com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. No que segue suporemos que σ é de classe C^1 em K e regular no interior de K. (Dizer que σ é de classe C^1 em K significa que existe uma transformação $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 no aberto Ω, com K contido em Ω, tal que, para todo (u, v) em K, $\sigma(u, v) = \varphi(u, v)$.





σ transforma o retângulo de lados Δu e Δv no "paralelogramo curvilíneo" $ABCD$ contido na imagem de σ. Queremos avaliar a "área" deste "paralelogramo curvilíneo" para Δu e Δv suficientemente pequenos.

A área do paralelogramo determinado pelos vetores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\,\Delta u$ *e* $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\,\Delta v$ é

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\,\Delta u \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\,\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u\,\Delta v.$$

(Observe que este paralelogramo está contido no plano tangente a σ, no ponto $\sigma(u, v)$.)

Temos:

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\,\Delta u \right\| \cong \text{comprimento do arco } AB$$

e

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\,\Delta v \right\| \cong \text{comprimento do arco } AD$$

A "área" ΔS de $ABCD$ é, então, aproximada pela área do paralelogramo de lados $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)\,\Delta u$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\,\Delta v$:

$$\boxed{\text{“área” } \Delta S \cong \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u\,\Delta v.}$$

Nada mais natural, então, do que definir a *área* de σ por

$$\boxed{\text{área de } \sigma = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\,dv.}$$

Observe que a integral acima existe, pois $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|$ é contínua em K e a fronteira de K tem conteúdo nulo.

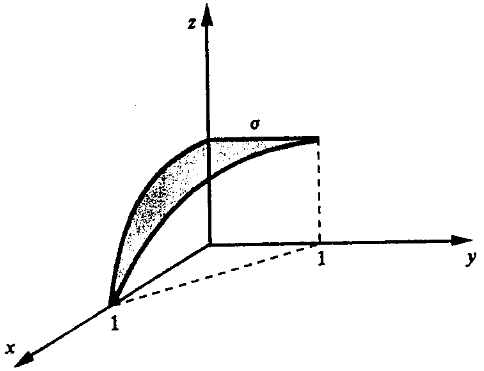
EXEMPLO. Calcule a área da superfície σ dada por $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u^2)$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ e $u + v \leqslant 1$.

Solução

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -2u)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, 0).$$

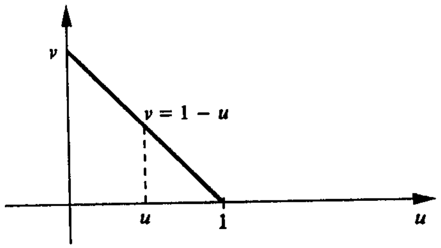


Temos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2u\,\vec{i} + \vec{k}.$$

$$\text{área de } \sigma = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\,dv = \iint_K \sqrt{4u^2 + 1}\, dudv$$

onde K é o triângulo



Temos:

$$\iint_K \sqrt{1 + 4u^2}\, du\,dv = \int_0^1 \left[\int_0^{1-u} \sqrt{1 + 4u^2}\, dv \right] du = \int_0^1 (1 - u)\sqrt{1 + 4u^2}\, du.$$

Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} 2u = \operatorname{tg} \theta;\ du = \dfrac{1}{2} \sec^2 \theta\, d\theta \\ u = 0;\ \theta = 0 \\ u = 1;\ \theta = \operatorname{arctg} 2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1 - u)\sqrt{1 + 4u^2}\, du = \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta\right) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}\, \frac{1}{2} \sec^2 \theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta\right) \sec^3 \theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^3 \theta\, d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \operatorname{tg} \theta \sec^3 \theta\, d\theta.$$

Como

$$\int \sec^3 \theta\, d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) + k$$

resulta

$$\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^3 \theta\, d\theta = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{5}).$$

Por outro lado,

$$\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \operatorname{tg} \theta \sec^3 \theta\, d\theta = \left[\frac{1}{3} \sec^3 \theta \right]_0^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{1}{3} (\sqrt{5})^3 - \frac{1}{3}.$$

Portanto, a área de $\sigma = \dfrac{\sqrt{5}}{12} + \dfrac{1}{4} \ln (2 + \sqrt{5}) + \dfrac{1}{12}$.

Observação. $\displaystyle\int \operatorname{tg} \theta \sec^3 \theta\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^4 \theta}\, d\theta = \frac{1}{3 \cos^3 \theta} + k.$ ■

Exercícios 9.3

1. Calcule a área. (Sugerimos ao leitor desenhar a imagem da superfície dada.)
   a) $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.
   b) $\sigma(u, v) = (u, v, 2 - u - v)$, $u^2 + v^2 \leq 1$.
   c) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 \leq 4$.
   d) $\sigma(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$, $(u, v) \in K$, onde K é o conjunto no plano uv limitado pelo eixo u e pela curva (em coordenadas polares) $\rho = e^{-\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
   e) $\sigma(u, v) = \left(u, v, \dfrac{1}{2} u^2\right)$, $0 \leq v \leq u$ e $u \leq 2$.
   f) $\sigma(u, v) = (\cos u, v, \operatorname{sen} u)$, $u^2 + 4v^2 \leq 1$.
2. Seja $A = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (y - 2)^2 = 1\}$; ache a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo Oz do conjunto A.
3. Seja $f: K \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto K com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Mostre que a área da superfície $z = f(x, y)$ (isto é, da superfície σ dada por $x = u$, $y = v$ e $z = f(u, v)$) é dada pela fórmula

$$\iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy.$$

4. Calcule a área da parte da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 4$ e acima do plano xy.

5. Calcule a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x - 2)^2 + 4y^2 \leqslant 1$.

7. Calcule a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que se encontra dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

8. Calcule a área da parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 2x$, fora do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e acima do plano xy.

9. Calcule a área da superfície $z = x^{3/2} + y^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{9}$ e $0 \leqslant y \leqslant \frac{9}{16} x^2$.

10. Calcule a área de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 2x$, $x \geqslant 1$ e $y \geqslant 0$.

11. Calcule a área da parte da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compreendida entre os planos $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x = 0$ e $y = 0$.

12. Calcule a área da parte da superfície $z = xy$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 4$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

13. Seja K o conjunto do plano xy limitado pelas curvas (em coordenadas polares) $\rho = \operatorname{tg} \theta$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calcule a área da superfície $z = xy$, $(x, y) \in K$.

14. Seja K o conjunto do plano xy limitado pela curva (em coordenadas polares) $\rho^2 = \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Calcule a área da superfície $z = xy$, $(x, y) \in K$.

15. Calcule a área da parte do parabolóide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ que se encontra dentro do cilindro $4x^2 + 16y^2 \leqslant 1$.

16. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, com $f(u) \geqslant 0$ em $[a, b]$. Considere a superfície de revolução $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, u)$, com $a \leqslant u \leqslant b$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Estabeleça uma fórmula para o cálculo da área de σ. Compare com a fórmula obtida na Seção 13.4 do Vol. 1, 5.ª edição.

17. Estabeleça uma fórmula para o cálculo da área da superfície $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ são constantes dadas.

18. Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, Ω aberto, uma função de classe C^1 tal que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ em Ω. Seja $f : K \to \mathbb{R}$, onde K é um compacto com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio contido em Ω, tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in K$, isto é, $z = f(x, y)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$. Mostre que a área da superfície $z = f(x, y)$ é dada pela fórmula

$$\iint_K \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \, dx \, dy.$$

19. Sejam $\sigma : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\varphi : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares nos abertos Ω e Ω_1, respectivamente. Suponha que exista uma transformação $H : \Omega_1 \to \Omega$, com $H(\Omega_1) = \Omega$, dada por

$$H: \begin{cases} u = u(s, t) \\ v = v(s, t) \end{cases} \qquad (s, t) \in \Omega_1$$

sendo H de classe C^1, inversível e tal que, para todo $(s, t) \in \Omega_1$,

$$\varphi(s, t) = \sigma(u(s, t), v(s, t)).$$

Diremos, então, que *φ é obtida de σ pela mudança de parâmetros* $(u, v) = H(s, t)$. Suponha, então, que φ seja obtida de σ pela mudança de parâmetros $(u, v) = H(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$.

a) Verifique que $Im\ \varphi = Im\ \sigma$.
b) Prove que

$$① \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

onde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}$$

é o determinante jacobiano da transformação $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$.

c) Interprete geometricamente a relação ① supondo $\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} > 0$.

20. Sejam $\sigma : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\varphi : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares, sendo φ obtida de σ pela mudança de parâmetros $(u, v) = H(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ (veja exercício anterior). Sejam $K \subset \Omega$ e $K_1 \subset \Omega_1$, compactos com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio e tais que $H(\overset{\circ}{K}_1) = \overset{\circ}{K}$. Prove que

$$\iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\,dv = \iint_{K_1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| ds dt.$$

21. Seja $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in K$. Mostre que a área de σ pode ser expressa na forma

$$\text{área de } \sigma = \iint_K \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2} \, du\,dv.$$

(*Sugestão*: Veja Exercício 3 da Seção 9.2.)

9.4. INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

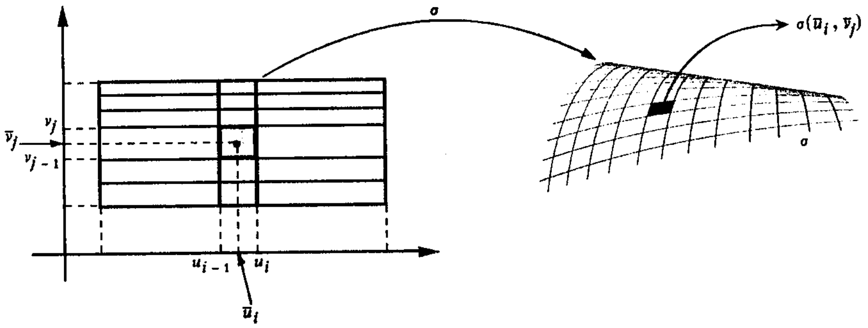
Seja K um compacto de $\mathbb{R}^2$, com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio; seja $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 em K, regular e injetora no interior de K.

Seja $w = f(x, y, z)$ uma função a valores reais definida e contínua na imagem de σ. Definimos a *integral de superfície de f sobre σ* por

$$\boxed{\iint_\sigma f(x, y, z)\, dS = \iint_K f(\sigma(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dS}}$$

onde $dS = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$ é o *elemento de área.*

Observação 1. Seja $P = \{(u_i, v_j) \mid i = 0, 1, 2, ..., n, j = 0, 1, 2, ..., m\}$ uma partição de K; para facilitar, vamos supor que K seja um retângulo de lados paralelos aos eixos.



Consideremos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\sigma(\bar{u}_i, \bar{v}_j))\, \Delta S_{ij}$$

onde ΔS_{ij} é a área da região hachurada na superfície σ. Demonstra-se que

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\sigma(\bar{u}_i, \bar{v}_j))\, \Delta S_{ij} = \iint_\sigma f(x, y, z)\, dS.$$

Observação 2. Na definição de integral de superfície a função $f(x, y, z)$ não precisa estar definida em todos os pontos da imagem de σ; basta estar definida nos pontos $X = \sigma(u, v)$, com (u, v) no interior de K. Neste caso, definimos

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, dS = \iint_K f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$$

desde que a integral do 2.º membro exista no sentido da definição apresentada na Seção 2.5.

EXEMPLO 1. Se $f(x, y, z) = 1$, para todo $(x, y, z) \in Im\ \sigma$, teremos

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, dS = \iint_\sigma dS = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv = \text{área de } \sigma.$$

Assim,

$$\boxed{\iint_\sigma dS = \text{área de } \sigma.}$$

A integral de superfície pode ser aplicada no cálculo da massa, centro de massa e momento de inércia de uma superfície σ, que será imaginada como um corpo delgado, com densidade superficial de massa (massa por unidade de área) conhecida. Sejam σ e f como na definição acima. Se $f(x, y, z)$ for a densidade superficial de massa no ponto $(x, y, z) \in Im\ \sigma$, então a massa M de σ será dada por

$$\boxed{M = \iint_\sigma f(x, y, z)\, dS}$$

É comum referir-se a $dm = f(x, y, z)\, dS$ como *elemento de massa.*
O *momento de inércia* da superfície em relação a um eixo fixo é definido por

$$I = \iint_\sigma r^2\, dm$$

onde $r = r(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) ao eixo. O *centro de massa* (x_c, y_c, z_c) é definido por

$$x_c = \frac{\iint_\sigma x\, dm}{M},\quad y_c = \frac{\iint_\sigma y\, dm}{M} \text{ e } z_c = \frac{\iint_\sigma z\, dm}{M}$$

onde M é a massa e $dm = f(x, y, z)\, dS$ o elemento de massa. ■

EXEMPLO 2. Calcule a massa da chapa fina σ dada por $x = u$, $y = v$ e $z = u + 2v$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ e $0 \leqslant v \leqslant 1$, sendo $f(x, y, z) = x + y + z$ a densidade superficial.

Solução

$$M = \iint_\sigma (x + y + z)\, dS = \iint_K (2u + 3v) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$$

onde K é o quadrado $0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$. Temos:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

e, portanto,

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Segue que

$$M = \sqrt{6} \iint_K (2u + 3v)\, du\, dv = \sqrt{6} \int_0^1 \left[\int_0^1 (2u + 3v)\, du \right] dv = \frac{5\sqrt{6}}{2};$$

Portanto, a massa é $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ unidades de massa. ■

EXEMPLO 3. Sejam σ e f como no exemplo anterior. Calcule o momento de inércia de σ em relação ao eixo z.

Solução

$$I = \iint_\sigma r^2\, (x + y + z)\, dS$$

onde $r = r(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) ao eixo z. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, vem

$$I = \iint_\sigma (x^2 + y^2)(x + y + z)\, dS = \iint_K (u^2 + v^2)(2u + 3v) \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$$

onde K é o quadrado $0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$. Como

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{6} \text{ (veja exemplo anterior)}$$

resulta

$$I = \sqrt{6} \iint_K (2u^3 + 3u^2v + 2uv^2 + 3v^3)\, du\, dv = \frac{25\sqrt{6}}{12}$$

Assim, o momento de inércia da chapa em relação ao eixo z é $\frac{25\sqrt{6}}{12}$. (Observe que o momento de inércia tem dimensões ML^2, onde M é massa e L, comprimento.) ■

EXEMPLO 4. Sejam σ e f como no Exemplo 2. Calcule o centro de massa de σ.

Solução

$$\iint_\sigma x\, dm = \iint_\sigma x(x + y + z)\, dS = \sqrt{6} \iint_K u(2u + 3v)\, du\, dv = \frac{17\sqrt{6}}{12}.$$

$$\iint_\sigma y\, dm = \iint_\sigma y(x + y + z)\, dS = \sqrt{6} \iint_K v(2u + 3v)\, du\, dv = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$$\iint_\sigma z\, dm = \iint_\sigma z(x + y + z)\, dS = \sqrt{6} \iint_K (u + 2v)(2u + 3v)\, du\, dv = \frac{53\sqrt{6}}{12}.$$

Pelo Exemplo 2, $M = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. Temos, então:

$$x_c = \frac{\iint_\sigma x\, dm}{M} = \frac{17}{30},\ y_c = \frac{\iint_\sigma y\, dm}{M} = \frac{3}{5} \text{ e } z_c = \frac{\iint_\sigma z\, dm}{M} = \frac{53}{30}.$$

Assim, o centro de massa da chapa é o ponto $\left(\frac{17}{30}, \frac{3}{5}, \frac{53}{30} \right)$. ■

Exercícios 9.4

1. Calcule $\iint_\sigma f(x, y, z)\, dS$ sendo
   - *a)* $f(x, y, z) = x$ e $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v), 0 \leqslant u \leqslant 1$ e $u^2 \leqslant v \leqslant 1$.
   - *b)* $f(x, y, z) = xy$ e $\sigma(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1), 0 \leqslant u \leqslant 1$ e $0 \leqslant v \leqslant u$.
   - *c)* $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), u^2 + v^2 \leqslant 1$.
   - *d)* $f(x, y, z) = y$ e $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u^2), 0 \leqslant u \leqslant 1$ e $0 \leqslant v \leqslant \sqrt{u}$.
   - *e)* $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e σ a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geqslant 1$. (Fica entendido aqui que σ é a parametrização mais "natural" do conjunto dado.)
   - *f)* $f(x, y, z) = xy$ e σ é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant 2x$, $y \geqslant 0$.
   - *g)* $f(x, y, z) = x$ e σ é a parte da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre os planos $z = 1$ e $z = 3$.
   - *h)* $f(x, y, z) = z$ e σ é a parte da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra acima do parabolóide $4z = x^2 + y^2 + 3$.
   - *i)* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2}$ e σ é a parte da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.
   - *j)* $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ e σ é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 2y$.
2. Calcule o centro de massa da superfície homogênea (densidade constante) dada.
   - *a)* $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), u^2 + v^2 \leqslant 1$.
   - *b)* σ é a parte da superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

3. Calcule a massa da superfície σ dada, com função densidade superficial de massa $f(x, y, z)$ dada.

   a) $f(x, y, z) = z$ e σ é a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$.

   b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e σ é a superfície $z^2 = x^2 + y^2, 1 \leqslant z \leqslant 2$.

   c) $f(x, y, z) = 2$ e $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u^2), 0 \leqslant u \leqslant 1$ e $0 \leqslant v \leqslant 1$.

4. Calcule o momento de inércia da superfície esférica de raio R, homogênea, de massa M, em torno de qualquer diâmetro. (Tal superfície deve ser imaginada como um corpo delgado e homogêneo.)

5. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa M, de equação $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leqslant R^2$ $(R > 0)$, em torno do eixo Oz.

6. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa M, de equação $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$, com $0 \leqslant z \leqslant 1$, em torno do eixo Oz.

10

FLUXO DE UM CAMPO VETORIAL. TEOREMA DA DIVERGÊNCIA OU DE GAUSS

10.1. FLUXO DE UM CAMPO VETORIAL

Seja $\sigma : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, onde K é um compacto com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Suponhamos que σ seja injetora e regular no interior de K. Podemos, então, considerar os campos vetoriais $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ dados por

$$\vec{n_1}(\sigma(u, v)) = \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|}, (u, v) \in \overset{\circ}{K},$$

e

$$\vec{n_2}(\sigma(u, v)) = -\vec{n_1}(\sigma(u, v)).$$

O campo $\vec{n_1}$ associa a cada ponto $\sigma(u, v)$ da imagem de σ, com $(u, v) \in \overset{\circ}{K}$, um vetor *unitário* e *normal* a σ. Observe que o domínio de $\vec{n_1}$ é o conjunto

$$\{X \in Im\, \sigma \mid X = \sigma(u, v) \text{ com } (u, v) \in \overset{\circ}{K}, \}.$$

Como σ é injetora no interior de K, o campo $\vec{n_1}$ está bem definido.

EXEMPLO 6. Seja

$$\vec{E}\,(x, y, z) = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

o campo elétrico criado por uma carga q localizada na origem. Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície esférica de raio r e centrada na origem, com normal $\vec{n}$ apontando para fora da esfera.

Solução

Queremos calcular $\iint_\sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$, onde σ é a superfície esférica de centro na origem e raio r e $\vec{n}\,(x, y, z) = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Temos:

$$\vec{E}\,(x, y, z) \cdot \vec{n}\,(x, y, z) = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{r^2}$$

pois (x, y, z) varia na superfície esférica de centro na origem e raio r. Daí,

$$\iint_\sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_\sigma \frac{q}{r^2}\, dS = \frac{q}{r^2} \iint_\sigma dS.$$

Como $\iint_\sigma dS = 4\pi r^2$ = área da superfície esférica, resulta

$$\iint_\sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Observe que o fluxo de $\vec{E}$ através de σ *não* depende do raio da superfície esférica σ. ■

Exercícios 10.1

(Para evitar repetição, ficará subentendido que a normal $\vec{n}$ que ocorre em $\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ será sempre *unitária*.)

1. Sejam $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$, σ a fronteira de B e $\vec{F}\,(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Verifique que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde $\vec{n}$ é a normal que aponta para fora de B.

2. Seja $\sigma\,(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$, e seja $\Gamma\,(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3)$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Considere o campo vetorial $\vec{F}\,(x, y, z) = \vec{i} + (x + y + z)\,\vec{j}$.

   a) Desenhe as imagens de σ e de Γ.
   b) Verifique que

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$$

onde $\vec{n}$ é a normal $\dfrac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$.

3. Seja B o cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$; seja σ a fronteira de B. Verifique que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde $\vec{F}\,(x, y, z) = xy\,\vec{i} - \vec{j} + z^2\,\vec{k}$ e $\vec{n}$ a normal a σ que aponta para fora de B.

4. Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$ e seja σ a fronteira de B. Verifique que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde $\vec{F}\,(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ e $\vec{n}$ a normal que aponta para fora de B.

5. Considere o cilindro $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ e seja $\vec{F}\,(x, y, z) = R\,(x, y, z)\,\vec{k}$ de classe C^1 num aberto contendo B. Verifique que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde σ é a fronteira de B com normal $\vec{n}$ apontando para fora de B.

6. Considere o cilindro $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ e seja

$$\vec{F}\,(x, y, z) = P\,(x, y, z)\,\vec{i} + Q\,(x, y, z)\,\vec{j}$$

de classe C^1 num aberto contendo B. Verifique que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde σ é a fronteira de B com normal $\vec{n}$ apontando para fora de B.

(*Sugestão*: Trabalhe com a cadeia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, onde

$\sigma_1 (u, v) = (u, v, 0), u^2 + v^2 \leqslant 1;$
$\sigma_2 (u, v) = (u, v, 1), u^2 + v^2 \leqslant 1;$
$\sigma_3 (u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v), 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0 \leqslant v \leqslant 1.$)

7. Considere o cilindro $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ e seja

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

de classe C^1 num aberto contendo B. Verifique que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde σ é a fronteira de B com normal $\vec{n}$ apontando para fora de B.

(*Sugestão*: Utilize os Exercícios 5 e 6.)

8. Seja $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 em K, injetora e regular no interior de K, onde K é um compacto com fronteira de conteúdo nulo. Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ contínuo em $Im\,\sigma$. Seja $\vec{n}$ a normal

$$\frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}.$$

Mostre que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \left[P \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} + Q \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} + R \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right] du\, dv$$

onde P, Q e R são calculadas em $\sigma (u, v) = (x (u, v), y (u, v), z (u, v))$.

9. Sejam $\sigma (u, v) = (x (u, v), y (u, v), z (u, v)), (u, v) \in K$, e $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ como no exercício anterior. A notação

$$\iint_\sigma P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

é usada para representar a integral

$$\iint_K \left[P \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} + Q \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} + R \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right] du\, dv.$$

Assim,

$$\iint_\sigma P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy = \iint_K \left[P \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} + Q \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} + R \frac{\partial (x, z)}{\partial (u, v)} \right] du\, dv,$$

onde P, Q e R são calculados em $\sigma (u, v)$. (Para lembrar a relação acima, basta observar que na passagem do 1.° membro para o 2.° fizemos $dy \wedge dz = \dfrac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}\, du\, dv$ etc.) Verifique que

a) $\displaystyle\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_\sigma P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$

onde $\vec{n}$ é a normal $\dfrac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$.

b) $\displaystyle\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_\sigma P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$

onde $\vec{n}$ é a normal $-\dfrac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$.

10. Seja σ a superfície = ( ), ( ) , com classe ^{1} num aberto contendo (Trata-se da superfície dada por = = e = ( ).) Seja $\vec{n}$ a normal a σ com componente $z > 0$ e seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ um campo vetorial contínuo na imagem de σ. Mostre que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \left[-P \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - Q \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + R \right] dx\, dy$$

onde P, Q e R são calculadas em $(x, y, f(x, y))$.

11. Considere um escoamento com velocidade $\vec{v}\,(x, y, z)$ e densidade $\rho\,(x, y, z)$, tal que $\vec{u} = \rho\,\vec{v}$ seja dado por $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} - 2z\,\vec{k}$. Seja σ a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geqslant \sqrt{2}$, e seja $\vec{n}$ a normal com componente $z > 0$. Calcule o fluxo de $\vec{u}$ através de σ. (Observe que, neste caso, o fluxo tem dimensões MT^{-1} (massa por unidade de tempo).)

12. Seja $\vec{u}$ o campo do exercício anterior e seja $B = \{(x, y, z) \in {}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \text{ e } z \geqslant \sqrt{2}\}$. Mostre que

$$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{u}\, dx\, dy\, dz$$

onde σ é a fronteira de B e $\vec{n}$ a normal unitária apontando para fora de B. Interprete.

13. Seja $\vec{u}$ o campo do Exercício 11 e seja B a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$. Calcule $\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS$

onde σ é a fronteira de B, com normal $\vec{n}$ apontando para fora de B.

(*Sugestão*: Utilize coordenadas esféricas.)

14. Sejam $\sigma_1(u, v), (u, v) \in K_1$ e $\sigma_2(s, t), (s, t) \in K_2$, duas superfícies de classe C^1 e com imagens iguais; σ_1 e σ_2 são supostas injetoras e regulares nos interiores de K_1 e K_2, respectivamente. Seja $\varphi : K_1 \to K_2$ uma transformação dada por

$$\varphi : \begin{cases} s = s\,(u, v) \\ t = t\,(u, v) \end{cases}$$

e que satisfaz as condições do teorema de mudança de variáveis na integral dupla. Suponhamos que, para todo $(u, v) \in K_1$,

$$\sigma_1(u, v) = \sigma_2(s\,(u, v), t\,(u, v)).$$

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo na imagem de σ_1 e seja $\vec{n}$ um campo normal unitário ao conjunto $Im\ \sigma_1 = Im\ \sigma_2$. Prove que

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

ou seja, o *fluxo através do conjunto* $Im\ \sigma_1$ *não depende da parametrização.*

(*Sugestão*: Utilize a relação $\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \right) \frac{\partial\,(s, t)}{\partial\,(u, v)}$ do Exercício 19 da Seção 9.3.)

10.2. TEOREMA DA DIVERGÊNCIA OU DE GAUSS

Seja $B \subset {}^3$ um compacto, com interior não-vazio, cuja fronteira coincide com a imagem de uma cadeia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$. Suponhamos que, para cada índice i, seja possível escolher uma normal unitária $\vec{n_i}$ a σ_i, com $\vec{n_i}$ apontando para fora de B. Seja $\vec{n}$ um campo vetorial definido na fronteira de B e que coincide com $\vec{n_i}$ sobre $\sigma_i(\overset{\circ}{K_i})$. Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ um campo vetorial de classe C^1 num aberto contendo B. Pode ser provado (veja Seção 10.3 e referências bibliográficas [19] e [15]) que para uma classe bastante ampla de conjuntos B, nas condições acima, é válida a relação

$$\boxed{\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz}$$

conhecida como *teorema da divergência ou de Gauss.* (Observamos que a todo compacto B que ocorrer nesta seção e que satisfaça as condições descritas acima, o teorema da divergência se aplica.)

Os próximos exemplos mostram algumas aplicações do teorema da divergência. Na próxima seção, destacaremos uma classe bastante ampla de compactos B para os quais o teorema da divergência se verifica.

EXEMPLO 1. Utilizando o teorema da divergência, transforme a integral de superfície $\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ numa integral tripla e calcule, onde σ é a fronteira do cilindro $B = \{(x, y, z) \in {}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ e $\vec{n}$ a normal apontando para fora de B.

Solução

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz.$$

Temos

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B (2 + 2z)\, dx\, dy\, dz = \iint_K \left[\int_0^1 (2 + 2z)\, dz \right] dx\, dy$$

onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Portanto,

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = 3\pi.$$

Segue que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 3\pi.$$

(Sugerimos ao leitor verificar a igualdade acima, calculando diretamente $\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$)

■

EXEMPLO 2. Seja $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j} + (5 - 4xyz)\,\vec{k}$ e seja σ a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geqslant 0$, sendo $\vec{n}$ a normal a σ com componente $z > 0$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de σ, na direção $\vec{n}$.

Solução

Seja B o compacto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, z \geqslant 0$. Seja σ_1 a superfície

$$\sigma_1(u, v) = (u, v, 0), u^2 + v^2 \leqslant 4.$$

isto é, se *diâmetro de B for suficientemente pequeno e se $P \in \dot{B}$, então o fluxo de $\vec{F}$ através da fronteira σ de B será aproximadamente div $\vec{F}$ $(P) \cdot$ vol (B), sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for o diâmetro de B.* ■

Exercícios 10.2

1. Seja $\vec{u}$ um campo vetorial de classe C^2 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e seja $B \subset \Omega$ um compacto ao qual o teorema da divergência se aplica. Seja σ a fronteira de B, com normal $\vec{n}$ apontando para fora de B. Calcule

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS.$$

2. Seja $\vec{F}$ $(x, y, z) = (x + y + z^2) \vec{k}$ e seja σ a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 4$ e $0 \leqslant z \leqslant 3$. Calcule $\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ onde $\vec{n}$ é a *normal exterior*, isto é, $\vec{n}$ é a normal que aponta para fora do cilindro.

3. Seja $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ e seja B um compacto ao qual o teorema da divergência se aplica. Prove

$$\text{vol } B = \frac{1}{3} \iint_\sigma \vec{r} \cdot \vec{n} \, dS$$

onde σ é a fronteira de B com normal exterior $\vec{n}$.

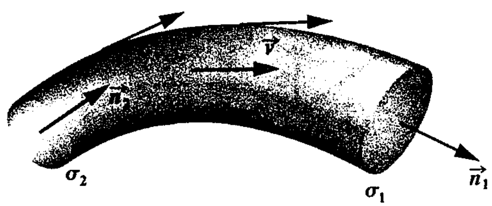
4. Seja $\vec{F}$ $(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + xyz \vec{j} + \left(z - y^2 z - \frac{1}{2} xz^2 \right) \vec{k}$ e seja σ a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, sendo $\vec{n}$ a normal com componente $z \geqslant 0$. Calcule $\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

(*Sugestão*: Aplique o teorema da divergência tomando para B o conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$. Cuidado, σ não é a fronteira de B. Veja o Exemplo 2 desta seção.)

5. Seja $\vec{v}$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ e tal que div $\vec{v} = 0$ em Ω. Sejam σ_1 e σ_2 superfícies esféricas de centros $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$, respectivamente, e raios iguais a $\frac{1}{4}$, com normais exteriores $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$. Seja σ_3 uma superfície esférica de centro na origem e raio 5, com normal exterior $\vec{n_3}$. Prove que

$$\iint_{\sigma_3} \vec{v} \cdot \vec{n_3} \, dS = \iint_{\sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{n_1} \, dS + \iint_{\sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{n_2} \, dS.$$

6. Seja $\vec{v}$ um campo vetorial de classe C^1 num aberto Ω de $\mathbb{R}^3$, com div $\vec{v} = 0$ em Ω. Seja $B \subset \Omega$ um compacto em forma de "tubo" (veja figura) ao qual o teorema da divergência se aplica. Sejam σ_1 e σ_2 as secções transversais, com normais $\vec{n_1}$ apontando para fora e $\vec{n_2}$ apontando para dentro de B. Suponha que $\vec{v}$ seja *tangente* à superfície lateral do tubo.



Prove: $\iint_{\sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{n_1} \, dS = \iint_{\sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{n_2} \, dS$.

7. Calcule $\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$, sendo σ a fronteira de B com normal exterior $\vec{n}$, sendo

a) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x \text{ e } 0 \leqslant z \leqslant 4\}$ e $\vec{u} = xy \vec{i} + yz \vec{j} + z^2 \vec{k}$.

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \text{ e } z \geqslant x + y\}$ e $\vec{u} = -2xy \vec{i} + y^2 \vec{j} + 3z \vec{k}$.

c) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ e $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z^2 \vec{k}$.

d) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 5 - x^2 - y^2\}$ e $\vec{u} = 3xy \vec{i} - \frac{3}{2} y^2 \vec{j} + z \vec{k}$.

e) B é o paralelepípedo $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$ e $\vec{u} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$.

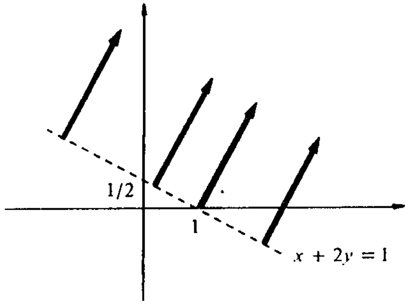
8. Seja σ o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leqslant 1$, e seja $\vec{n}$ a normal a σ com componente $z \leqslant 0$. Seja $\vec{F}$ $(x, y, z) = x^2 y \vec{i} - xy^2 \vec{j} + \vec{k}$. Calcule $\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

9. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$ e seja $\vec{u}$ um campo vetorial de classe C^1 em Ω. Suponha que

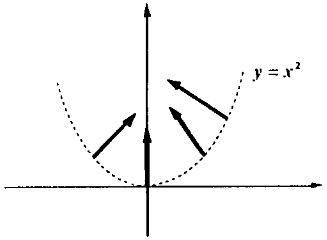
$$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

para toda superfície esférica σ, com normal exterior $\vec{n}$, contida em Ω. Prove, então, que $\vec{u}$ é *solenoidal*, isto é, div $\vec{u} = 0$ em Ω.

(RESPOSTAS)



5. $\nabla\varphi(x, y) = (-2x, 1)$ é normal, no ponto (x, y), à curva de nível de φ que passa por este ponto. Como $y = x^2$ é uma curva de nível de φ $(\varphi(x, y)) = 0$, $\nabla\varphi(x, y)$, com $y = x^2$, é normal, no ponto (x, y), à parábola $y = x^2$.



6. $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Seja (x, y, z) um ponto da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Neste ponto, $\nabla f(x, y, z)$ é normal à superfície acima.

1.3

1. *a)* $2\vec{k}$ *b)* $-z\vec{j}$ *c)* $\vec{0}$
   d) $-2y\vec{k}$ *e)* $-3x\vec{k}$

2. $\vec{g}(x, y) = (x f(u), y f(u))$, onde $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. Temos:

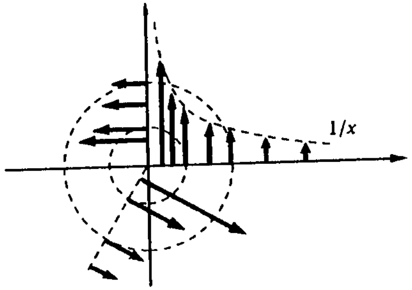
$$\frac{\partial}{\partial x}[y f(u)] = y f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{xy\, f'(u)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e de forma análoga obtém-se:

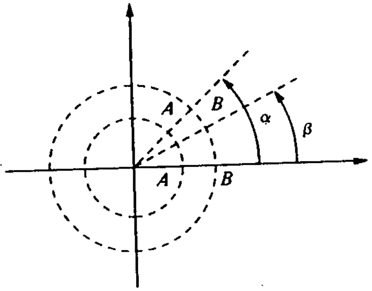
$$\frac{\partial}{\partial y}[x f(u)] = \frac{xy\, f'(u)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Portanto, rot $\vec{g} = \vec{0}$.

5. *a)* $\|\vec{v}(x, y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\vec{v}(x, y)$ é tangente, no ponto (x, y), à circunferência de centro na origem que passa por este ponto.



Observe que as trajetórias das partículas do fluido são circunferências de centro na origem. A velocidade angular da partícula que descreve a circunferência de raio $\sqrt{x^2 + y^2}$ é o quociente da velocidade escalar pelo raio, ou seja, $\frac{1}{x^2 + y^2}$. Sejam A e B duas partículas do fluido que no instante $t = 0$ encontram-se sobre o eixo Ox. Suponhamos que a distância de A à origem é menor que a de B à origem. Assim, a velocidade angular de A é maior que a de B. Seja $t > 0$ um real suficientemente pequeno. A figura a seguir mostra as posições de A e B nos instantes $t = 0$ e t.



β é o ângulo descrito por B no intervalo de tempo t e α o descrito por A neste mesmo intervalo de tempo; $\alpha > \beta$, pois, a velocidade angular de A é maior que a de B.

b) rot $\vec{v} = \vec{0}$ o que significa que $\vec{v}$ é irrotacional.

1.4

1. *a)* 0 *b)* 3 *c)* $2x + 2y\cos(x^2 + y^2) + \frac{1}{1 + z^2}$

   d) $2z\left[\operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}\right]$

3. *a)* Não, pois div $\vec{v}(x, y, z) = 1$.

   b) div $\rho\vec{v} = 0$, ou seja, div $(\rho(y)\, y\,\vec{j}) = 0$. Daí

$$\frac{d}{dy}(\rho(y)\, y) = 0.$$

7.3

1. *a*) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} y\,dx + x\,dy = [xy]_{(1,1)}^{(2,2)} = 4 - 1 = 3$. Observe que $d(xy) = y\,dx + x\,dy$.

   b) $\frac{23}{6}$

   c) $\left[-\text{arctg}\,\frac{x}{y}\right]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = -\text{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4} + \text{arctg}\,\frac{2}{3}$

   d) 0 *e*) $[x \text{ sen } xy]_{\gamma(-1)}^{\gamma(1)} = 0$

   f) $[\theta(x, y)]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = \theta(-1, -1) - \theta(1, 1) = \pi$, onde

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\,\frac{x}{y} & \text{se } y > 0 \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \text{arctg}\,\frac{x}{y} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

3. $\frac{3\pi}{2}$

4. Verifique que $\theta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\,\frac{x}{y} & \text{se } y > 0 \text{ e } x < \frac{3}{2} \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \text{arctg}\,\frac{x}{y} & \text{se } y < 0 \\ 2\pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x > \frac{3}{2} \\ \frac{5\pi}{2} - \text{arctg}\,\frac{x}{y} & \text{se } y > 0 \text{ e } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

é uma primitiva em Ω. Isto é,

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy, \text{ em } \Omega.$$

Como é o gráfico de θ? O valor da integral é $\theta(2, 2) - \theta(1, 1) = 2\pi$.

7.6

1. *a*) $h'(x) = 2x \text{ sen } x^4 - \int_0^1 \frac{u^4}{(1 + xu^4)^2}\,du$

   b) $h'(x) = \int_0^1 2xt^2 \cos(x^2t^2)\,dt$ *c*) $h'(x) = \text{sen } x^4 + 2x \int_0^x t^2 \cos(x^2t^2)\,dt$

   d) Considere $\varphi(u, v, w) = \int_u^v \frac{1}{1 + wt^4}\,dt$. Segue que $h(x) = \varphi(u, v, w)$, $u = x^2$, $v = \text{sen } x$ e $w = x^4$. Pela regra da cadeia,

$$h'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Portanto,

$$h'(x) = -\frac{2x}{1 + x^{12}} + \frac{\cos x}{1 + x^4 (\text{sen } x)^4} + 4x^3 \int_{x^2}^{\text{sen } x} \frac{-t^4}{(1 + x^4 t^4)^2}\,dt$$

2. $h'(x) = f(x, \beta(x))\,\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\,\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy.$

4. *a*) Seja $y_0 \in [c, d]$. Precisamos provar que, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in [c, d]$,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) no retângulo,

$$\|(x, y) - (s, t)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(s, t)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Então, para todo $x \in [a, b]$,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow \|(x, y) - (x, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Como

$$\left|\varphi(y) - \varphi(y_0)\right| = \left|\int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)]\,dx\right|$$

resulta

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)|\,dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a}\,dx = \epsilon$$

ou seja,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \epsilon.$$

b) Seja $y_0 \in I$. Sejam c, $d \in I$, com $c < y_0 < d$. Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) no retângulo acima,

$$\| (x, y) - (s, t) \| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) \right| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Temos

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)]\, dx.$$

Pelo teorema do valor médio, para todo $y \in [c, d]$ existe y_1 no intervalo aberto de extremos y_0 e y tal que

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1)(y - y_0).$$

Segue que

$$\left| \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \right| = \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right] dx \right|$$

e, portanto,

$$\left| \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \right| \leqslant \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right] dx \right|$$

Para todo $y \in [c, d]$ e para todo $x \in [a, b]$,

$$| y - y_0 | < \delta \Rightarrow \| (x, y) - (x, y_0) \| < \delta \Rightarrow \| (x, y_1) - (x, y_0) \| < \delta,$$

pois $| y - y_0 | \geqslant | y_1 - y_0 |$. Portanto,

$$| y - y_0 | < \delta \Rightarrow \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| dx < \epsilon.$$

Ou seja,

$$0 < | y - y_0 | < \delta \Rightarrow \left| \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \right| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx.$$

(**Observação:** Para a demonstração da propriedade enunciada no início do exercício, veja A2-1 do Apêndice 2.)

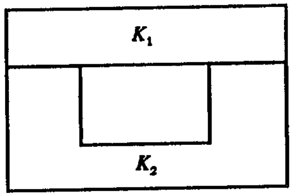
CAPÍTULO 8

8.1

1. Pelo teorema de Green, $\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_B \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $(s, t) \in B$, com

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial P}{\partial y}(s, t) \right) \text{área de } B.$$

2.



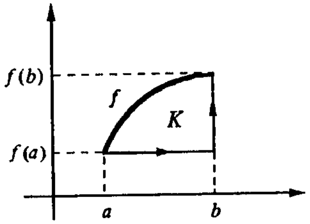
Aplique o teorema de Green aos conjuntos K_1 e K_2 e some membro a membro as igualdades obtidas.

8. **Sugestão:**

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) dy$$
$$= \int_{-r}^{r} \left[Q\left(\sqrt{r^2 - y^2},\ y \right) - Q\left(-\sqrt{r^2 - y^2},\ y \right) \right] dy;$$

faça agora $y = r \operatorname{sen} \theta$ e boa sorte!

9.



$$\oint_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_a^b P(t, f(a))\, dt + \int_{f(a)}^{f(b)} Q(b, t)\, dt$$
$$- \int_a^b [P(t, f(t)) + Q(t, f(t)) f'(t)]\, dt.$$

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{f(a)}^{f(b)} \left[\int_{g(y)}^{a} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx \right] dy = \int_{f(a)}^{f(b)} [Q(a, y) - Q(g(y), y)]\, dy.$$

Fazendo a mudança de variável $y = f(t)$ vem:

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_a^b [Q(a, f(t)) - Q(t, f(t))]\, f'(t)\,dt.$$

Por outro lado,

$$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, f(a))]\,dx.$$

Conclua. (Observe que este raciocínio não se aplica ao setor circular $-r \leqslant x \leqslant 0$ e $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2 - x^2}$, pois $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ não é de classe C^1 em $[-r, 0]$.)

8.2

2. 3π 3. πab

4. 2α, onde α é a área de B. (Observe que B tem área, pois sua fronteira tem conteúdo nulo.)

5. 10 6. 2π 7. 2π 8. -3 9. $\frac{5}{24}$

8.4

1. *a*) Pelo teorema da divergência $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds = \iint_K \operatorname{div} \vec{F}\,dx\,dy$, onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Assim, $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds = 2\pi$.

b) 1

c) $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds = \iint_K 2x\,dx\,dy$, onde K é a região $\frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1$. Assim, $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds = 0$. Olhando só para o campo você seria capaz de prever este resultado? Por quê?

d) *Cuidado*, o teorema da divergência não se aplica. Por quê? Temos:

$$\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\left(y'(t)\,\vec{i} - x'(t)\,\vec{j}\right) = \frac{\cos t\,\vec{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\vec{j}}{\sqrt{4\,\text{sen}^2\,t + \cos^2 t}}$$

é normal a γ e tem a componente $y \geqslant 0$, para $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Temos, então,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds =$$

$$= \left[\int_0^\pi \left| (2\cos t)^2\,\vec{i}\,\right| \cdot \frac{\cos t\,\vec{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\vec{j}}{\sqrt{4\,\text{sen}^2\,t + \cos^2 t}}\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^\pi 4\cos^3 t\,dt = 0.\right]$$

Observe que bastaria olhar para o campo para se concluir este resultado.

e) $\frac{1}{3}$

7. *a*) $\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\,ds = \int_\gamma \nabla g \cdot \vec{n}\,ds = \iint_K \operatorname{div}(\nabla g)\,dx\,dy$

$$= \iint_K \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) dx\,dy = \iint_K \nabla^2 g\,dx\,dy$$

10. 3α 11. $\frac{3\pi}{4}$

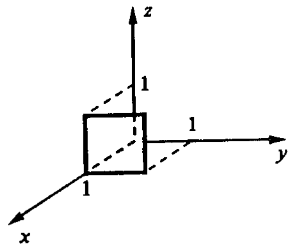
12. $\frac{3}{2}$ 13. 1

CAPÍTULO 9

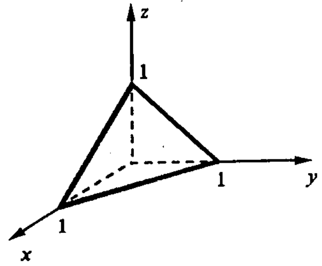
9.1

1. *a*) A imagem é o parabolóide de rotação $z = x^2 + y^2$.

b)



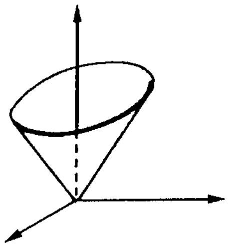
c)



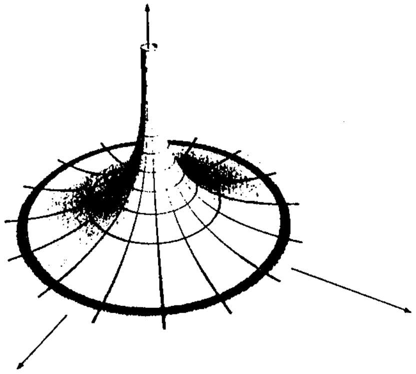
d) A imagem é a semi-superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geqslant 0$.

e) $x = v\cos u$, $y = v\,\text{sen}\,u$ e $z = v \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$. A imagem de σ é a face lateral do cone

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h.$$



f) A imagem de σ coincide com o gráfico da função $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.



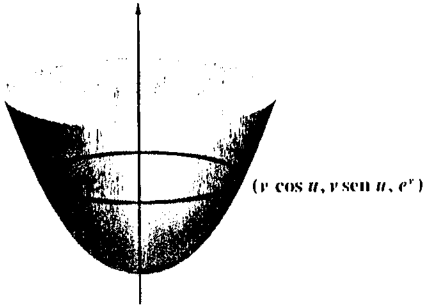
2. $x = (2 + \cos v) \cos u$, $y = (2 + \cos v) \operatorname{sen} u$ e $z = \operatorname{sen} v$ com $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

3. $\dfrac{x}{a} = \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $\dfrac{y}{b} = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ e $\dfrac{z}{c} = \cos \varphi$, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

4. *a*) $x = \cos u$, $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} u$ e $z = v$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$

b) $x = u$, $y = v$ e $z = \dfrac{1}{4} (5 - 2u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

c)



$$(x, y, z) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, e^v), 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \text{ e } v \geqslant 0$$

Observe que a imagem desta superfície coincide com o gráfico da função $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $(x, y, z) = (1 + \cos u, \operatorname{sen} u, v)$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$

9.2

1. *a*) $(x, y, z) = \sigma(1, 1) + s \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(1, 1) + t \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(1, 1)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + s(1, 0, 2) + t(0, 1, 2), (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

e) $(x, y, z) = \left(-\dfrac{\pi}{4}, 1, 2\right) + s\left(-\dfrac{1}{2}, 2, 1\right) + t\left(\dfrac{1}{2}, 2, -1\right)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$

9.3

1. *a*) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *b*) $\pi \sqrt{3}$

c) $\dfrac{\pi}{6}[17 \sqrt{17} - 1]$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\int_0^{e^{-\theta}} \rho \sqrt{4\rho^2 + 1}\, d\rho \right] d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{\pi} \left[4e^{-2\theta} + 1\right]^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{1}{12} \int_0^{\pi} 1\, d\theta.$

Faça $u^2 = 4e^{-2\theta} + 1$ e boa sorte!

e) $\dfrac{1}{3}\left[5\sqrt{5} - 1\right]$ *f*) $\dfrac{\pi}{2}$

2. $8\pi^2$

4. 16

5. $\pi(2 - \sqrt{2})$

6. $\dfrac{\pi \sqrt{2}}{2}$

9. $\dfrac{80}{81} - \dfrac{64}{1215}[9 \sqrt{3} - 1]$

12. $\dfrac{2\pi}{3}\left[5 \sqrt{5} - 2 \sqrt{2}\right]$

13. Área $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\operatorname{tg} \theta} \rho \sqrt{1 + \rho^2}\, d\rho \right] d\theta = \frac{1}{6}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] - \frac{\pi}{12}$

9.4

1. *a*) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}(3 \sqrt{3} - 2)$ *b*) $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$

c) $\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{5 \sqrt{5}}{3} + \dfrac{1}{15}\right]$ *d*) $\dfrac{1}{24}\left[5 \sqrt{5} - 1\right]$

f) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left[\frac{(16\cos^2\theta+1)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(16\cos^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}{48} \right] d\theta$$

$+ \dfrac{1}{120}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Para calcular a 1.ª integral faça $u = 16\cos^2\theta + 1$.

2. *a*) $\left(0, 0, \dfrac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}\right)$ *b*) $\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$

3. *a*) π *b*) $\dfrac{28\pi}{3}$

4. $\dfrac{2MR^2}{3}$ 6. MR^2

CAPÍTULO 10

10.1

5. O fluxo através da superfície lateral do cilindro é zero. Sejam $\sigma_1(u, v) = (u, v, 0)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, a base inferior do cilindro e $\sigma_2(u, v) = (u, v, 1)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, a base superior; a normal a σ_1 é $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ e a normal a σ_2 é $\vec{n}_2 = \vec{k}$. Segue que

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_K R(u, v, 0)\, du\, dv + \iint_K R(u, v, 1)\, du\, dv$$

onde K é o círculo $u^2 + v^2 \leq 1$. Ou seja,

① $$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K [R(u, v, 1) - R(u, v, 0)]\, du\, dv.$$

Por outro lado,

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_K \left[\int_0^1 \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right] dx\, dy$$

ou seja,

② $$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_K [R(x, y, 1) - R(x, y, 0)]\, dx\, dy$$

onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. De ① e ② resulta

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz.$$

6. O fluxo através das bases do cilindro é zero. Seja $\sigma_3(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$,

onde P e Q são calculados em $(\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ e K_3 é o retângulo $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$. Segue que

① $$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{K_3} [P(\cos u, \operatorname{sen} u, v) \cos u + Q(\cos u, \operatorname{sen} u, v) \operatorname{sen} u]\, du\, dv.$$

Por outro lado,

② $$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz.$$

Temos:

$$\iiint_B \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{A_1} \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx \right] dy\, dz$$

onde A_1 é o retângulo $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Assim,

$$\iiint_B \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{A_1} \left[P\left(\sqrt{1-y^2}, y, z\right) - P\left(-\sqrt{1-y^2}, y, z\right) \right] dy\, dz.$$

Façamos, agora, a mudança de variável

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq 1;$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\iiint_B \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_1} [P(\cos u, \operatorname{sen} u, v) - P(-\cos u, \operatorname{sen} u, v)] \cos u\, du\, dv$$

onde D_1 é o retângulo $-\dfrac{\pi}{2} \leq u \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 1$. Vamos mostrar, agora, que

$$\iint_{D_1} -P(-\cos u, \operatorname{sen} u, v) \cos u\, du\, dv = \iint_{D_2} P(\cos u, \operatorname{sen} u, v) \cos u\, du\, dv,$$

onde D_2 é o retângulo $\dfrac{\pi}{2} \leq u \leq \dfrac{3\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 1$. De fato, fazendo a mudança de variável

$$\begin{cases} u = -\theta + \pi \end{cases}$$

h) $e^2 - e$ (*Sugestão*: Faça $u = y - x^2$ e $v = x$.)

i) $x^2 + y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Faça $x - \frac{1}{2} = \rho\cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$.

$$\iint_B x\,dx\,dy = \frac{\pi}{8}.$$

(Outro processo: faça $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ e observe que a equação da circunferência $x^2 + y^2 - x = 0$ em coordenadas polares é $\rho = \cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.)

j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2\,d\rho\right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} \rho^2\,d\rho\right] d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

k) $\frac{1}{16}\left[1 + \frac{\pi}{2}\right]$ *l*) 0

2. *a*) O que se quer é o valor da integral $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, onde A é o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant 2$, $y \geqslant x^2$ e $0 \leqslant x \leqslant 1$. Em coordenadas polares, a equação da parábola $y = x^2$ se escreve

$$\rho = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}.$$

Então,

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}} \rho^2\,d\rho\right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\,d\rho\right] d\theta.$$

Observe que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^6\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1 - \cos^2\theta)}{\cos^6\theta}\,d\theta$; faça, então, $u = \cos\theta$.

b) $\frac{\pi}{16}$ *c*) $\frac{2}{3}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \rho^2\,d\rho\right] d\theta = \frac{a^3}{6}\,[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ *e*) $\frac{\pi a^3}{6}$

---

f) *Sugestão*: $(\cos 3\theta)^3 \cos\theta = (\cos 3\theta)^2 \cos 3\theta \cos\theta = (\cos 3\theta)^2 \left[\frac{1}{2}(\cos 4\theta + \cos 2\theta)\right]$

$$= \frac{1}{2}\cos 3\theta\,[\cos 3\theta\cos 4\theta + \cos 3\theta\cos 2\theta] = \ldots$$

g) $\iint_B dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\cos 2\theta} \rho\,d\rho\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2\,d\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right] d\theta = \ldots$$

h) $\frac{2}{3}$

3. Faça $u = y - x$ e $v = y + x$. $\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}\,dx\,dy = \frac{9}{32}$.

4. πab

4.3

1. *a*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ *b*) $\left(0, \frac{3\pi}{32}\right)$ $(\delta(x, y) = ky)$

c) $\iint_B x\,dm = \iint_B kx\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = k\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\sec\theta} \rho^3\cos\theta\,d\rho\right] d\theta$

$$= \frac{k}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = \ldots$$

d) (0,0) *f*) $\left(0, \frac{45}{14\pi}\right)$

3. *a*) Volume $= 2\pi d$ (área de B), onde d é a distância do centro de massa de B (B sendo olhado como um corpo homogêneo) à reta $y = x + 2$. Vol $= 2\pi^2\sqrt{2}$

c) $\frac{3}{2}\pi^2\sqrt{2}$

CAPÍTULO 5

5.4

1. *a*) $\frac{3}{2}$ *b*) $\frac{1}{2}$ *c*) $\frac{1}{3}$ *d*) $\frac{\pi}{4}$

e) $\iint_A \left[\int_{x^2+y^2}^{2x} dz\right] dx\,dy = \iint_A [2x - x^2 - y^2]\,dx\,dy$, onde A é o círculo $(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$.

Então,

$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{2}$$

f) $\frac{7\pi}{12}$

g) $\iiint_B dx\,dy\,dz = \iint_A [2x + 2y - x^2 - y^2 - 1]\,dx\,dy$, onde A é o círculo $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

h) 0 *i)* $\frac{16}{3}$ *j)* $\frac{7\pi}{2}$ *l)* 0 *m)* $\frac{1}{2}(e-1)$ *n)* $\frac{11}{120}$ *o)* 8π *q)* 2

r) Fixe (x, y) e integre em relação a z; em seguida faça $u = x + y$ e $v = xy$ e boa sorte!

2. *a)* Vol $= \iiint_B dx\,dy\,dz = \frac{11}{3}$ *b)* $\frac{25}{84}$ *c)* 8π

f) $\frac{2\pi}{9}$ *g)* $\frac{4}{3}\pi abc$

h) Vol $= \iint_A [4x + 2y - x^2 - y^2]\,dx\,dy$, onde A é o círculo $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 5$.

l) $\frac{16}{3}a^3\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$ *m)* $\frac{16}{3}a^3$ *n)* $\frac{5\pi a^3}{24}$ *o)* $\frac{4}{15}$

3. Massa $= \iiint_B (x + y + z)\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2}$

4. $\frac{1}{12}$ $\left(\iiint_V (x+y)\,dx\,dy\,dz = \iint_A (x+y)(1-x-y)\,dx\,dy\right.$, onde A é o triângulo $x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$; faça a mudança de variável $u = x + y$ e $v = x$.$\left.\right)$

5. 16π

6. $\iiint_B k(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = k\iint_A \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2 + y^2)\,dz\right]dx\,dy$, onde A é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Massa $= \frac{k\pi}{10}$, onde k é a constante de proporcionalidade.

5.5

1. *a)* 4π *b)* $\frac{15\pi}{4}$

c) Faça $x = 2\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $y = 3\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ e $z = \rho\cos\varphi$ com $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Tem-se $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = 3\pi$

d) Faça $u = x + y$, $v = x + 2y - z$ e $w = z$.

$$\iiint_B \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x + 2y - z}\,dx\,dy\,dz = \iiint_T \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,du\,dv\,dw$$

onde T é o paralelepípedo $1 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ e $0 \leqslant w \leqslant 1$.

$\left(\text{Observe que } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1.\right)$

e) $\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{4}\left[32 - 14\sqrt{3} + \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]$

2. $\frac{4}{3}\pi abc$

3. Massa $= k\iiint_B z\,dx\,dy\,dz = \frac{k\pi}{8}$

4. πa^3

5. *Sugestão:* $\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2} = \sqrt{a^2\cos^2\theta - (\rho - a\cos\theta)^2}$. Para calcular a integral

$$\int_0^{a\cos\theta} \rho\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}\,d\rho$$

faça $\rho - a\cos\theta = a\cos\theta\operatorname{sen} u$ e boa sorte!

5.7

1. $I = \iiint_B k(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, onde k é a densidade, k constante. $I = \frac{512}{15}k$.

2. $\frac{2}{3}L^2M$, onde M é a massa do cubo.

3. *a)* $I = \iiint_B r^2\,dm = \iiint_B x(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, onde B é o cubo dado. $I = \frac{5}{12}$

b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4. *a)* $\frac{Ma^2}{2}$, onde M é a massa do cilindro. *b)* $\frac{3Ma^2}{2}$

5. Podemos supor que o centro de massa do corpo B seja a origem, e que o eixo que passa pelo centro de massa seja o eixo z. Então $I_{cm} = \iiint_B (x^2 + y^2)\,dm$. Consideremos, agora, o eixo $x = a$ e $y = b$, com $h^2 = a^2 + b^2$. O momento de inércia com relação a este eixo é $I = \iiint_B [(x-a)^2 + (y-b)^2]\,dm$. Tendo em vista que $\iiint_B x\,dm = \iiint_B y\,dm = 0$, resulta $I = I_{cm} + Mh^2$.

8. $\frac{2MR^2}{5} + Mh^2$, onde M é a massa da esfera.

7.3

1. *a*) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} y\,dx + x\,dy = [xy]_{(1,1)}^{(2,2)} = 4 - 1 = 3$. Observe que $d(xy) = y\,dx + x\,dy$.

b) $\dfrac{23}{6}$

c) $\left[-\text{arctg}\,\dfrac{x}{y}\right]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = -\text{arctg}\left(-\dfrac{2}{3}\right) + \text{arctg}\,1 = \dfrac{\pi}{4} + \text{arctg}\,\dfrac{2}{3}$

d) 0 *e*) $[x \text{ sen } xy]_{\gamma(-1)}^{\gamma(1)} = 0$

f) $[\theta(x, y)]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = \theta(-1, -1) - \theta(1, 1) = \pi$, onde

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y} & \text{se } y > 0 \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

3. $\dfrac{3\pi}{2}$

4. Verifique que $\theta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y} & \text{se } y > 0 \text{ e } x < \dfrac{3}{2} \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y} & \text{se } y < 0 \\ 2\pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5\pi}{2} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y} & \text{se } y > 0 \text{ e } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

é uma primitiva em Ω. Isto é,

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy, \text{ em } \Omega.$$

Como é o gráfico de θ? O valor da integral é $\theta(2, 2) - \theta(1, 1) = 2\pi$.

7.6

1. *a*) $h'(x) = 2x \text{ sen } x^4 - \int_0^1 \dfrac{u^4}{(1 + xu^4)^2}\,du$

b) $h'(x) = \int_0^1 2xt^2 \cos(x^2t^2)\,dt$ *c*) $h'(x) = \text{sen } x^4 + 2x \int_0^x t^2 \cos(x^2t^2)\,dt$

d) Considere $\varphi(u, v, w) = \int_u^v \dfrac{1}{1 + wt^4}\,dt$. Segue que $h(x) = \varphi(u, v, w)$, $u = x^2$, $v = \text{sen } x$ e $w = x^4$. Pela regra da cadeia,

$$h'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Portanto,

$$h'(x) = -\frac{2x}{1 + x^{12}} + \frac{\cos x}{1 + x^4(\text{sen } x)^4} + 4x^3 \int_{x^2}^{\text{sen } x} \frac{-t^4}{(1 + x^4t^4)^2}\,dt$$

2. $h'(x) = f(x, \beta(x))\,\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\,\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy.$

4. *a*) Seja $y_0 \in [c, d]$. Precisamos provar que, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in [c, d]$,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) no retângulo,

$$\|(x, y) - (s, t)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(s, t)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Então, para todo $x \in [a, b]$,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow \|(x, y) - (x, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Como

$$\left|\varphi(y) - \varphi(y_0)\right| = \left|\int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)]\,dx\right|$$

resulta

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)|\,dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a}\,dx = \epsilon$$

ou seja,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \epsilon.$$

b) Seja $y_0 \in I$. Sejam $c, d \in I$, com $c < y_0 < d$. Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) no retângulo acima,

$$\|(x, y) - (s, t)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, t)\right| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Temos

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0}\int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)]\, dx.$$

Pelo teorema do valor médio, para todo $y \in [c, d]$ existe y_1 no intervalo aberto de extremos y_0 e y tal que

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1)(y - y_0).$$

Segue que

$$\left|\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx\right| = \left|\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right] dx\right|$$

e, portanto,

$$\left|\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx\right| \leqslant \left|\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right] dx\right|$$

Para todo $y \in [c, d]$ e para todo $x \in [a, b]$,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow \|(x, y) - (x, y_0)\| < \delta \Rightarrow \|(x, y_1) - (x, y_0)\| < \delta,$$

pois $|y - y_0| \geqslant |y_1 - y_0|$. Portanto,

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx < \epsilon.$$

Ou seja,

$$0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx\right| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx.$$

(**Observação:** Para a demonstração da propriedade enunciada no início do exercício, veja A2-1 do Apêndice 2.)

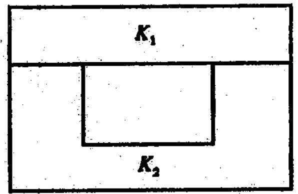
CAPÍTULO 8

8.1

1. Pelo teorema de Green, $\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_B \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $(s, t) \in B$, com

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial P}{\partial y}(s, t)\right) \text{área de } B.$$

2.



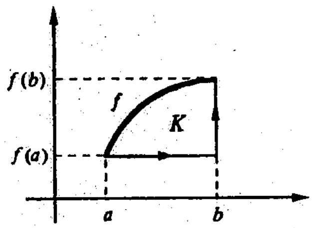
Aplique o teorema de Green aos conjuntos K_1 e K_2 e some membro a membro as igualdades obtidas.

8. **Sugestão:**

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\right) dy$$
$$= \int_{-r}^{r}\left[Q\left(\sqrt{r^2 - y^2}, y\right) - Q\left(-\sqrt{r^2 - y^2}, y\right)\right] dy;$$

faça agora $y = r$ sen θ e boa sorte!

9.



$$\oint_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_a^b P(t, f(a))\, dt + \int_{f(a)}^{f(b)} Q(b, t)\, dt$$
$$- \int_a^b [P(t, f(t)) + Q(t, f(t)) f'(t)]\, dt.$$

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{f(a)}^{f(b)}\left[\int_{g(y)}^{a} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx\right] dy = \int_{f(a)}^{f(b)} [Q(a, y) - Q(g(y), y)]\, dy.$$

Fazendo a mudança de variável $y = f(t)$ vem: