Vamos tentar encontrar uma maneira de descrever *todos* os quadrados mágicos 3×3. Seja

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

um quadrado mágico com peso 0. As condições sobre as linhas, colunas e diagonais originam um sistema de oito equações lineares homogêneas nas variáveis $a, b, \ldots, i$.

Problema 6: Escreva esse sistema de equações e resolva-o. (*Observação:* usar um CAS facilitará as contas.)

Problema 7: Usando substituição, se necessário, use sua solução ao Problema 6 para mostrar que M pode ser escrito na forma

$$M = \begin{bmatrix} s & -s-t & t \\ -s+t & 0 & s-t \\ -t & s+t & -s \end{bmatrix}$$

Problema 8: Usando os Problemas 5 e 7, mostre que todo quadrado mágico 3×3 é da forma

$$\begin{bmatrix} r+s & r-s-t & r+t \\ r-s+t & r & r+s-t \\ r-t & r+s+t & r-s \end{bmatrix}$$

Problema 9: Você consegue encontrar uma maneira direta de provar que o elemento (2, 2) de um quadrado mágico 3×3 com peso w deve ser $w/3$? (*Sugestão:* some e subtraia as linhas, colunas e diagonais para obter um múltiplo do elemento central.)

Problema 10: Seja M um quadrado mágico 3×3 de peso 0, obtido de um quadrado mágico clássico 3×3, como descrito no Problema 5. Se M é da forma dada no Problema 7, escreva uma equação para a soma dos quadrados dos elementos de M. Mostre que essa equação é a equação de um círculo nas variáveis s e t e, cuidadosamente, desenhe seu gráfico. Mostre que existem exatamente oito pontos (s, t) sobre o círculo, com s e t ambos inteiros. Usando o Problema 8, mostre que esses oito pontos dão origem a oito quadrados mágicos clássicos 3×3. Qual é a relação existente entre esses quadrados?

6.2 Espaços Vetoriais e Subespaços

Nos Capítulos 1 e 3, vimos que a álgebra de vetores e a álgebra de matrizes são similares em muitos aspectos. Em particular, podemos fazer a adição de vetores e de matrizes, e podemos multiplicar ambos por um escalar. As propriedades resultantes dessas duas operações (Teorema 1 da Seção 1.2 e Teorema 1 da Seção 3.3) são idênticas nos dois ambientes. Nesta seção, vamos usar essas propriedades para

definir "vetores" de forma geral, que aparecem em uma grande variedade de exemplos. Ao provarmos teoremas gerais sobre esses "vetores", simultaneamente estaremos, portanto, provando resultados sobre todos esses exemplos. Esse é o verdadeiro poder da álgebra: sua habilidade em tomar propriedades de um ambiente concreto como $\mathbb{R}^n$, e as *abstrair* para um ambiente geral.

Definição Seja V um conjunto no qual duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação por escalar*, estão definidas. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão em V, a *soma* de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é denotada por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, e se c é um escalar, o *múltiplo escalar* de $\mathbf{v}$ por c é denotado por $c\mathbf{v}$. Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V e para todos os escalares c e d, então V é chamado ***espaço vetorial*** e seus elementos são chamados ***vetores***.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em V. — Fechado sob adição
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Comutatividade
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — Associatividade
4. Existe um elemento $\mathbf{0}$ em V, chamado ***vetor nulo***, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$ em V, existe um elemento $-\mathbf{u}$ em V tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{v}$ está em V. — Fechado sob multiplicação escalar
7. $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ — Distributividade
8. $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ — Distributividade
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Observações:

- Na maioria dos casos, os "escalares" serão os números reais. Dessa maneira, referimo-nos a V como um *espaço vetorial real* (ou *espaço vetorial sobre os números reais.*) É possível também tomarmos os escalares como números complexos ou pertencentes a $\mathbb{Z}_p$, para p primo. Nesses casos, V é chamado de *espaço vetorial complexo* ou *espaço vetorial sobre* $\mathbb{Z}_p$, respectivamente. A maioria de nossos exemplos será de espaços vetoriais reais, por isso omitiremos o adjetivo "real". Se nos referirmos a algo como um "espaço vetorial", assumiremos que estamos trabalhando com o sistema dos números reais.
  De fato, os escalares podem ser tomados de qualquer sistema numérico no qual, falando informalmente, possamos somar, subtrair, multiplicar e dividir de acordo com as leis habituais da aritmética. Em álgebra abstrata, um sistema desses é conhecido como um ***corpo***.
- A definição de espaço vetorial não especifica quais elementos formam o conjunto V. Também não especifica o que as operações chamadas "adição" e "multiplicação por escalar" devem ser. Freqüentemente, elas serão familiares, mas não precisam ser. Veja o Exemplo 6 a seguir e os Exercícios de 5 a 7.

Veremos agora vários exemplos de espaços vetoriais. Em cada caso, devemos especificar o conjunto V, bem como as operações de multiplicação escalar e de adição, e verificar os axiomas de 1 a 10. Devemos prestar atenção particular aos seguintes axiomas: fechamento (1 e 6), existência de um vetor nulo em V(4) e existência em V de vetor oposto a cada vetor de V(5).

EXEMPLO 1 Para cada $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial com as operações usuais de multiplicação por escalar e de adição. Os axiomas 1 e 6 seguem da definição dessas operações; os restantes seguem do Teorema 1 da Seção 1.2. ◆

EXEMPLO 2 O conjunto de todas as matrizes 2×3 é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matriz por escalar. Aqui os "vetores" são, na verdade, matrizes.

O matemático alemão Hermann Grassmann (1809–1877) é geralmente creditado como o primeiro a introduzir a idéia de um espaço vetorial (apesar de não o ter chamado assim), em 1844. Infelizmente, seu trabalho era muito difícil de ler e não recebeu a atenção que merecia. Uma pessoa que realmente o estudou foi o matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932). Em seu livro *Calcolo geometrico*, de 1888, Peano tornou claro o trabalho anterior de Grassmann e descreveu os axiomas para um espaço vetorial da maneira como hoje os conhecemos. O livro de Peano é também digno de nota por introduzir operações em conjuntos. Suas notações $\cup$, $\cap$ e $\in$ (para "união", "intersecção" e "é um elemento de") são as que ainda usamos, apesar de não terem sido adotadas de imediato por outros matemáticos. A definição axiomática de um espaço vetorial feita por Peano também teve pouca influência por muitos anos. A aceitação só veio em 1918, depois que Hermann Weyl (1885–1955) a repetiu em seu livro *Space, time, matter*, uma introdução à teoria geral da relatividade de Einstein.

Sabemos que a soma de duas matrizes 2×3 é também uma matriz 2×3, e que multiplicar uma matriz 2×3 por um escalar nos dá outra matriz 2×3; assim, temos o fechamento. Os axiomas restantes seguem do Teorema 1 da Seção 3.3. Em particular, o vetor nulo $\mathbf{0}$ é a matriz nula 2×3, e o oposto de uma matriz 2×3 A é tão-somente a matriz 2×3 $-A$.

Não existe nada especial sobre as matrizes 2×3. Para quaisquer inteiros positivos m e n, o conjunto de todas as matrizes $m\times n$ forma um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalar. Esse espaço vetorial é denotado por M_{mn}. ◆

EXEMPLO 3 Denote por $\mathcal{P}_2$ o conjunto de todos os polinômios de grau 2 ou menos com coeficientes reais. Defina da maneira usual a adição e a multiplicação por escalar. (Veja o Apêndice D.) Se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{e} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

estão em $\mathcal{P}_2$, então

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

tem grau no máximo 2 e, portanto, está em $\mathcal{P}_2$. Se c é um escalar, então

$$cp(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2$$

também está em $\mathcal{P}_2$. Isso verifica os axiomas 1 e 6.

O vetor nulo $\mathbf{0}$ é o polinômio zero — isto é, o polinômio cujos coeficientes são todos nulos. O oposto de um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ é o polinômio $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$. Agora é fácil verificar os axiomas restantes. Vamos checar o axioma 2 e deixar os outros para o Exercício 12. Com $p(x)$ e $q(x)$ como acima, temos

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &= q(x) + p(x) \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue da comutatividade da adição dos números reais. ◆

Em geral, para todo $n \geq 0$ fixo, o conjunto $\mathcal{P}_n$ de todos os polinômios de grau menor ou igual a n é um espaço vetorial, bem como o conjunto $\mathcal{P}$, formado por todos os polinômios.

EXEMPLO 4 Denotemos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções a valores reais, definidas na reta real. Se f e g são duas dessas funções e c é um escalar, $f + g$ e cf são definidos por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (cf)(x) = cf(x)$$

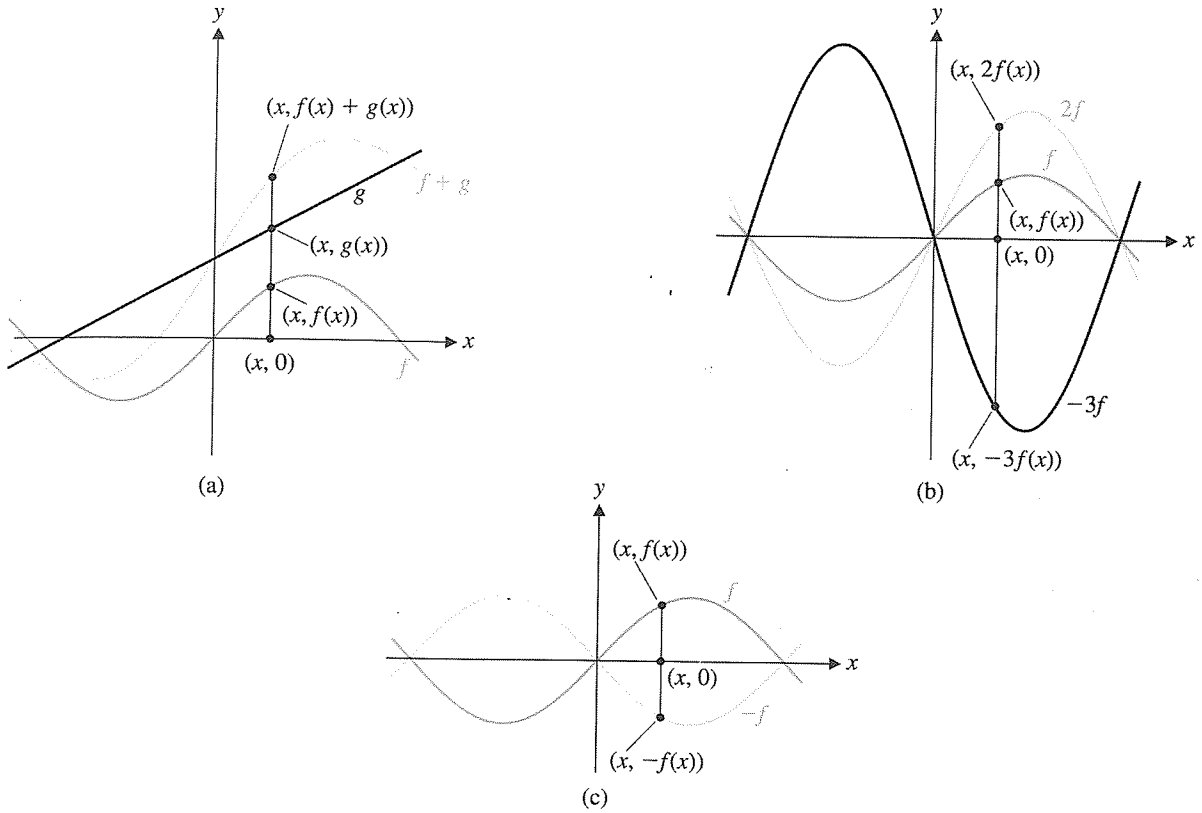


Figura 1 Os gráficos de (a) f, g e $f + g$, (b) f, $2f$ e $-3f$ e (c) f e $-f$

Em outras palavras, o *valor* de $f + g$ em x é obtido ao somarmos os valores de f e de g em x [Figura 1(a)]. De maneira similar, o valor de cf em x é tão-somente o valor de f em x multiplicado pelo escalar c [Figura 1(b)]. O vetor nulo em $\mathcal{F}$ é a função constante f_0, identicamente nula — isto é, $f_0(x) = 0$ para todo x. O oposto de uma função f é a função $-f$, definida por $(-f)(x) = -f(x)$ [Figura1(c)].

Os axiomas 1 e 6 são obviamente verdadeiros. A verificação dos axiomas restantes é pedida no Exercício 13. Portanto, $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial. ◆

No Exemplo 4, poderíamos também ter considerado somente as funções definidas em algum *intervalo fechado* $[a,b]$ da reta real. Essa abordagem também produz um espaço vetorial, denotado por $\mathcal{F}[a,b]$.

EXEMPLO 5 O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros com as operações usuais *não* é um espaço vetorial. Para demonstrar isso, é suficiente descobrir que *um* dos dez axiomas não se verifica e dar um exemplo específico para o qual isso acontece (chamado de *contra-exemplo*). Nesse caso, descobrimos que não temos o fechamento sob multiplicação por escalar. Por exemplo, o múltiplo do número inteiro 2 pelo escalar $\frac{1}{3}$ é $(\frac{1}{3})(2) = \frac{2}{3}$, o qual não é inteiro. Dessa forma, não é verdadeiro que cx está em $\mathbb{Z}$ para *todo* x em $\mathbb{Z}$ e *todo* escalar c (isto é, o axioma 6 não se verifica). ◆

EXEMPLO 6 Seja $V = \mathbb{R}^2$ com a definição usual de adição, mas com a seguinte definição de multiplicação por escalar:

$$c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, por exemplo,

$$1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

por isso o axioma 10 não se verifica. [Na verdade, os outros nove axiomas são todos verdadeiros (cheque essa afirmação), mas não precisamos procurar entre eles, pois já provamos que V não pode ser espaço vetorial. Este exemplo mostra o valor de olhar primeiro em vez de seguir mecanicamente a lista de axiomas na ordem em que foram apresentados.]

a + bi **EXEMPLO 7** Denote por $\mathbb{C}^2$ o conjunto de todos os pares ordenados de números complexos. Defina a adição e a multiplicação por escalar como em $\mathbb{R}^2$, exceto que aqui os escalares são números complexos. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3+2i \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3i \\ 6-3i \end{bmatrix}$$

e

$$(1-i)\begin{bmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) \\ (1-i)(2-3i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1-5i \end{bmatrix}$$

Usando as propriedades dos números complexos, é imediato verificar todos os dez axiomas. Portanto, $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial complexo.

Em geral, $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial complexo para todo $n \geq 1$.

EXEMPLO 8 Se p é primo, o conjunto $\mathbb{Z}_p^n$ (com as definições usuais de $\mathbb{Z}_p$ para a adição e para a multiplicação por escalar) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$, para todo $n \geq 1$.

Antes de considerarmos outros exemplos, vamos enunciar um teorema que contém algumas propriedades muito úteis dos espaços vetoriais. É importante observar que, ao provarmos esse teorema para espaços vetoriais *em geral*, realmente o estamos provando para todo espaço vetorial *em particular*.

TEOREMA 1

Seja V um espaço vetorial, $\mathbf{v}$ um vetor em V e c um escalar.

a. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

b. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

c. $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

d. Se $c\mathbf{v} = 0$, então $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos as propriedades (b) e (d) e deixaremos como exercício a demonstração das demais.

(b) Temos

$$c\mathbf{0} = c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$$

pelos axiomas 4 e 7 de espaços vetoriais. Somando o oposto de $c\mathbf{0}$ a ambos os lados, obtemos

$$c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) = (c\mathbf{0} + c\mathbf{0}) + (-c\mathbf{0})$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= c\mathbf{0} + (c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0})) && \text{Pelos axiomas 5 e 3} \\ &= c\mathbf{0} + \mathbf{0} && \text{Pelo axioma 5} \\ &= c\mathbf{0} && \text{Pelo axioma 4} \end{aligned}$$

(d) Suponha que $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Para provar que $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vamos assumir que $c \neq 0$. (Se $c = 0$, não há nada a provar.) Então, como $c \neq 0$, seu recíproco $1/c$ está definido, e

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= 1\mathbf{v} && \text{Pelo axioma 10} \\
&= \left(\frac{1}{c}c\right)\mathbf{v} \\
&= \frac{1}{c}(c\mathbf{v}) && \text{Pelo axioma 9} \\
&= \frac{1}{c}\mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} && \text{Pela propriedade (b)}
\end{aligned}$$

◆

Escreveremos $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ para $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, dessa forma definindo a *subtração* de vetores. Iremos explorar a propriedade associativa da adição para poder escrever de forma não ambígua a soma de três vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, e, mais geralmente,

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$$

para uma ***combinação linear*** de vetores.

Subespaços

Vimos que, em $\mathbb{R}^n$, é possível que um espaço vetorial esteja contido em outro espaço vetorial, originando a noção de subespaço. Por exemplo, um plano através da origem é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Agora, vamos estender esse conceito para espaços vetoriais em geral.

Definição Um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado de subespaço de V se W é um espaço vetorial com os mesmos escalares, a mesma adição e a mesma multiplicação por escalar que V.

Como em $\mathbb{R}^n$, testar se um subconjunto W é um subespaço de um espaço vetorial V envolve apenas a verificação de dois dos dez axiomas de espaços vetoriais. Essa afirmação é provada por um teorema.

◆ TEOREMA 2

Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições se verificam:

a. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão em W, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em W.
b. Se $\mathbf{v}$ está em W e c é um escalar, então $c\mathbf{v}$ está em W.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor que W seja um subespaço de V. Então, W satisfaz os axiomas 1 a 10 dos espaços vetoriais. Em particular, o axioma 1 é a condição (a), e o axioma 6 é a condição (b).

Reciprocamente, vamos supor que W seja um subconjunto do espaço vetorial V, satisfazendo as condições (a) e (b). Por hipótese, os axiomas 1 e 6 estão satisfeitos. Os axiomas 2, 3, 7, 8, 9 e 10 estão verificados em W, porque são verdadeiros para *todos* os vetores de V e, em particular, são verdadeiros para os vetores que estão em W. (Dizemos que W *herda* essas propriedades de V.) Resta verificar os axiomas 4 e 5.

Como W é não vazio, ele contém pelo menos um vetor $\mathbf{v}$. Com isso, a condição (b) e o Teorema 1(a) implicam que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ também está em W. Esse é o axioma 4.

Se $\mathbf{v}$ está em V, então, tomando $c = -1$ na condição (b), temos que $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ também está em W, usando o Teorema 1(c). ◆

Observação: ◆ Como o Teorema 2 generaliza a noção de um subespaço do contexto de $\mathbb{R}^n$ a espaços vetoriais em geral, todos os subespaços de $\mathbb{R}^n$ que encontramos no Capítulo 3 são subespaços de $\mathbb{R}^n$ nesse contexto. Em particular, linhas e planos que passam através da origem são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLO 9 Já provamos que o conjunto $\mathcal{P}_n$, formado por todos os polinômios de grau menor ou igual a n, é um espaço vetorial. Assim, $\mathcal{P}_n$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{P}$ formado por *todos* os polinômios. ◆

EXEMPLO 10 Seja W o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$. Prove que W é um subespaço de M_{nn}.

SOLUÇÃO: É claro que W é não vazio, por isso só precisamos checar as condições (a) e (b) do Teorema 2. Sejam A e B em W e seja c um escalar. Então, $A^T = A$ e $B^T = B$, e, conseqüentemente,

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

Portanto, $A + B$ é simétrica e, assim, está em W. De maneira similar,

$$(cA)^T = cA^T = cA$$

Dessa forma, cA é simétrica e, portanto, está em W. Provamos que W é fechado sob adição e sob multiplicação por escalar. Logo, é um subespaço de M_{nn}, pelo Teorema 2. ◆

EXEMPLO 11 Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as funções contínuas a valores reais definidas em $\mathbb{R}$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis a valores reais definidas em $\mathbb{R}$. Prove que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são subespaços de $\mathcal{F}$, o espaço vetorial de todas as funções a valores reais definidas em $\mathbb{R}$.

SOLUÇÃO: Do Cálculo, sabemos que, se f e g são funções contínuas e c é um escalar, $f + g$ e cf também são contínuas. Dessa forma, $\mathcal{C}$ é fechado sob adição e sob multiplicação por escalar e, portanto, é um subespaço de $\mathcal{F}$. Se f e g são diferenciáveis, $f + g$ e cf também o são. De fato,

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{e} \quad (cf)' = c(f')$$

Portanto, $\mathcal{D}$ é fechado sob adição e multiplicação por escalar, o que o torna um subespaço de $\mathcal{F}$. ◆

Toda função diferenciável é contínua, diz um dos teoremas do Cálculo. Conseqüentemente, $\mathcal{D}$ está contido em $\mathcal{C}$ (denotamos por $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$), o que torna $\mathcal{D}$ um subespaço de $\mathcal{C}$. Esse também é o caso da afirmação de que todo polinômio é uma função diferenciável, e, assim, $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$; logo, $\mathcal{P}$ é um subespaço de $\mathcal{D}$. Temos uma *hierarquia* de subespaços de $\mathcal{F}$, um dentro do outro:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$$

Essa hierarquia está esquematizada na Figura 2.

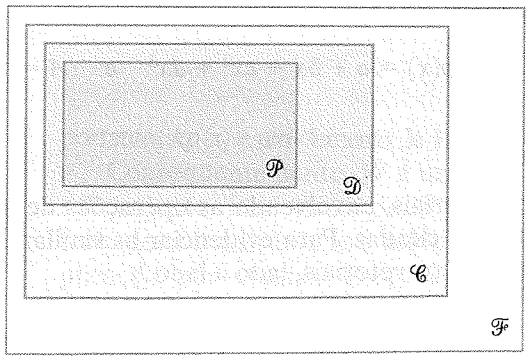


Figura 2 A hierarquia dos subespaços de $\mathcal{F}$

Existem outros subespaços de $\mathcal{F}$ que podem ser colocados nessa hierarquia. Alguns deles serão explorados nos exercícios.

Na discussão anterior, poderíamos ter limitado nossa atenção às funções definidas em um intervalo fechado [a,b]. Então, os subespaços de $\mathcal{F}[a, b]$ correspondentes seriam $\mathcal{C}[a, b]$, $\mathcal{D}[a, b]$ e $\mathcal{P}[a, b]$.

EXEMPLO 12 Seja S o conjunto de todas as funções que satisfazem a equação diferencial

$$f'' + f = 0 \tag{1}$$

[Ou seja, S é o conjunto solução da equação (1).] Prove que S é um subespaço de $\mathcal{F}$.

SOLUÇÃO: Sem dúvida, S é não vazio, uma vez que a função identicamente nula é uma solução para a equação (1). Sejam f e g em S e seja c um escalar. Então:

$$\begin{aligned}(f + g)'' + (f + g) &= (f'' + g'') + (f + g)\\ &= (f'' + f) + (g'' + g)\\ &= 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

o que prova que $f + g$ está em S. De maneira similar,

$$\begin{aligned}(cf)'' + cf &= cf'' + cf\\ &= c(f'' + f)\\ &= c0\\ &= 0\end{aligned}$$

e, assim, cf também está em S.

Portanto, S é fechado sob adição e sob multiplicação por escalar, e é um subespaço de $\mathcal{F}$. ◆

A equação diferencial (1) é um exemplo de ***equação diferencial linear homogênea***. Os conjuntos solução de tais equações são sempre subespaços de $\mathcal{F}$. Observe que, no Exemplo 12, não resolvemos a equação (1) (isto é, não encontramos nenhuma solução específica, além da função identicamente nula). Discutiremos na Seção 6.8 técnicas para encontrar soluções para esse tipo de equação.

À medida que você ganhar experiência no trabalho com espaços vetoriais e subespaços, perceberá que certos exemplos tendem a se parecer uns com os outros. Por exemplo, considere os espaços vetoriais $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{P}_3$ e M_{22}. Elementos típicos desses espaços vetoriais são, respectivamente,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Quaisquer cálculos nesses espaços vetoriais, envolvendo as operações de adição e de multiplicação por escalar, são os mesmos nas três situações citadas. Para evidenciar as similaridades, no próximo exemplo faremos os passos necessários nos três espaços vetoriais, lado a lado.[1]

[1] Nas palavras do Zé Colmeia: "É *déja vu* de novo".

EXEMPLO 13 (a) Mostre que o conjunto W de todos os vetores da forma

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Mostre que o conjunto W de todos os polinômios da forma $a + bx - bx^2 + ax^3$ é um subespaço de $\mathcal{P}_3$.

(c) Prove que o conjunto W formado por todas as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ é um subespaço de M_{22}.

SOLUÇÃO:

a) W é não vazio, pois contém o vetor nulo $\mathbf{0}$. (Tome $a = b = 0$.) Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ elementos de W — digamos,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ -d \\ c \end{bmatrix}$$

Então:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \\ -b - d \\ a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \\ -(b + d) \\ a + c \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ também é um elemento de W (porque é descrito da mesma *forma*).

De maneira similar, se k é um escalar, então

$$k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \\ -kb \\ ka \end{bmatrix}$$

portanto, $k\mathbf{v}$ é um elemento de W.

Conseqüentemente, W é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^4$, fechado sob adição e sob multiplicação por escalar. Portanto, pelo Teorema 2, W é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) W é não vazio, pois contém o polinômio identicamente nulo. (Tome $a = b = 0$.) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ elementos de W — digamos,

$$p(x) = a + bx - bx^2 + ax^3$$

e

$$q(x) = c + dx - dx^2 + cx^3$$

Então:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) = (a + c) \\ + (b + d)x \\ - (b + d)x^2 \\ + (a + c)x^3 \end{aligned}$$

e, portanto, $p(x) + q(x)$ também é um elemento de W (porque é descrito da mesma forma).

De maneira similar, se k é um escalar, então

$$kp(x) = ka + kbx - kbx^2 + kax^3$$

portanto, $kp(x)$ é um elemento de W.

Conseqüentemente, W é um subconjunto não vazio de $\mathcal{P}_3$, fechado sob adição e sob multiplicação por escalar. Portanto, pelo Teorema 2, W é um subespaço de $\mathcal{P}_3$.

(c) W é não vazio, pois contém a matriz nula O. (Tome $a = b = 0$.) Sejam A e B elementos de W — digamos,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

Então:

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{bmatrix}$$

e, portanto, $A + B$ também é um elemento de W (porque é descrito da mesma *forma*).

De maneira similar, se k é um escalar, então

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{bmatrix}$$

portanto, kA é um elemento de W.

Conseqüentemente, W é um subconjunto não vazio de M_{22}, fechado sob adição e sob multiplicação por escalar. Portanto, pelo Teorema 2, W é um subespaço de M_{22}.

O Exemplo 13 mostra que, freqüentemente, é possível relacionar exemplos que, observados superficialmente, parecem não ter nada em comum. Em conseqüência, podemos aplicar nosso conhecimento sobre o $\mathbb{R}^n$ * a polinômios, matrizes e outros exemplos. Encontraremos essa idéia várias vezes neste capítulo, e vamos formalizá-la na Seção 6.6.

EXEMPLO 14 Se V é um espaço vetorial, então V é claramente um subespaço de si mesmo. O conjunto $\{\mathbf{0}\}$, formado apenas pelo vetor nulo, é também um subespaço de V, chamado ***subespaço nulo***. Para provar isso, simplesmente observamos que as condições de fechamento do Teorema 2 estão satisfeitas:

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad c\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{para qualquer escalar } c$$

Os subespaços $\{\mathbf{0}\}$ e V são chamados ***subespaços triviais*** de V. ◆

Um exame da demonstração do Teorema 2 revela o seguinte fato, muito útil:

Se W é um subespaço de um espaço vetorial V, então W contém o vetor nulo $\mathbf{0}$ de V.

Esse fato é consistente com — e análogo a — o fato de que linhas e planos são subespaços de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, eles contêm a origem. A condição de que todo subespaço deve conter $\mathbf{0}$ é útil algumas vezes para provar que um conjunto *não* é um subespaço.

EXEMPLO 15 Seja W o conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

W é um subespaço de M_{22}?

SOLUÇÃO: Cada matriz em W tem por propriedade que seu elemento (1, 2) seja igual a seu elemento (1, 1) somado com um. Como a matriz nula

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não tem essa propriedade, ela não pertence a W. Dessa forma, W não é um subespaço de M_{22}. ◆

EXEMPLO 16 Seja W o conjunto de todas as matrizes 2×2 com determinante 0. W é um subespaço de M_{22}? (Como $\det O = 0$, a matriz nula pertence a W; conseqüentemente, o método do Exemplo 15 não nos serve.)

SOLUÇÃO: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $\det A = \det B = 0$, e, como conseqüência, A e B são elementos de W. Mas

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

assim, $\det(A + B) = 1 \neq 0$, e, portanto, $A + B$ não pertence a W. Por causa disso, W não é fechado sob adição e, conseqüentemente, não é um subespaço de M_{22}. ◆

* N.T.: Como um espaço vetorial.

Conjuntos Geradores

A noção de conjunto de vetores geradores se transpõe facilmente de $\mathbb{R}^n$ a espaços vetoriais em geral.

Definição Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores em um espaço vetorial V, então o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ é chamado de ***conjunto gerado*** por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, e é denotado por $\text{ger}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ou $\text{ger}(S)$. Se $V = \text{ger}(S)$, então S é chamado de ***conjunto de geradores*** de V, e diz-se que V é ***gerado*** por S.

EXEMPLO 17 Prove que os polinômios 1, x e x^2 geram $\mathcal{P}_2$.

SOLUÇÃO: Por sua própria definição, um polinômio $p(x) = a + bx + cx^2$ é uma combinação linear de 1, x e x^2. Portanto, $\mathcal{P}_2 = \text{ger}(1, x, x^2)$. ◆

O Exemplo 17 pode ser facilmente generalizado para provar que $\mathcal{P}_n = \text{ger}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$. No entanto, não é possível que um conjunto finito de polinômios possa gerar $\mathcal{P}$, o espaço vetorial de todos os polinômios. (Veja o Exercício 44, na Seção 6.3.) Mas, se permitirmos que o conjunto gerador seja infinito, então é claro que *todas* as potências não negativas de x serão suficientes. Isto é, $\mathcal{P} = \text{ger}(1, x, x^2, \ldots)$.

EXEMPLO 18 Prove que $M_{23} = \text{ger}(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$, onde

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ou seja, E_{ij} é a matriz com um 1 na linha i, coluna j, e zeros nas outras posições.)

SOLUÇÃO: Só precisamos observar que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23}$$ ◆

Estendendo este exemplo, vemos que, em geral, M_{mn} é gerado por mn matrizes E_{ij}, onde $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

EXEMPLO 19 Em $\mathcal{P}_2$, determine se $r(x) = 1 - 4x + 6x^2$ pertence ao $\text{ger}(p(x), q(x))$, onde

$$p(x) = 1 - x + x^2 \quad \text{e} \quad q(x) = 2 + x - 3x^2$$

SOLUÇÃO: Estamos procurando por escalares c e d tais que $cp(x) + dq(x) = r(x)$. Isso significa que

$$c(1 - x + x^2) + d(2 + x - 3x^2) = 1 - 4x + 6x^2$$

Reordenando de acordo com as potências de x, temos

$$(c + 2d) + (-c + d)x + (c - 3d)x^2 = 1 - 4x + 6x^2$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, obtemos

$$\begin{aligned} c + 2d &= 1 \\ -c + d &= -4 \\ c - 3d &= 6 \end{aligned}$$

que é facilmente resolvido, e assim $c = 3$ e $d = -1$. Portanto, $r(x) = 3p(x) - q(x)$, e, conseqüentemente, $r(x)$ pertence ao ger $(p(x), q(x))$. (Verifique.) ◆

EXEMPLO 20 Em $\mathcal{F}$, determine se sen $2x$ pertence ao ger(sen x, cos x).

SOLUÇÃO: Fazemos c sen $x + d$ cos x = sen $2x$ e tentamos determinar c e d de forma a tornar a equação verdadeira. Como são funções, a equação deve ser satisfeita para *todos* os valores de x. Tomando $x = 0$, temos

$$c \operatorname{sen} 0 + d \cos 0 = \operatorname{sen} 0 \quad \text{ou seja} \quad c(0) + d(1) = 0$$

a partir do que sabemos que $d = 0$. Tomando $x = \pi/2$, obtemos

$$c \operatorname{sen}(\pi/2) + d \cos(\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi) \quad \text{ou seja} \quad c(1) + d(0) = 0$$

que nos dá $c = 0$. Mas isso implica que sen $2x = 0(\text{sen } x) + 0(\cos x) = 0$ para todo x, o que é absurdo, pois sen $2x$ não é a função identicamente nula. Concluímos que sen $2x$ não pertence ao ger(sen x, cos x). ◆

Observação: ◆ *É* verdade que sen $2x$ pode ser escrito em termos de sen x e cos x. Por exemplo, temos a fórmula do ângulo duplo sen $2x = 2$ sen x cos x. Entretanto, essa não é uma combinação *linear.*

EXEMPLO 21 Descreva o conjunto gerado em M_{22} por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Toda combinação linear de A, B e C é da forma

$$\begin{aligned} cA + dB + eC &= c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c + d & c + e \\ c + e & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Essa matriz é simétrica, por isso ger(A, B, C) está contido no subespaço das matrizes simétricas 2×2. De fato, temos uma igualdade — isto é, *toda* matriz simétrica 2×2 pertence ao ger(A, B, C). Para provarmos isso, consideremos $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica 2×2. Fazendo

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + d & c + e \\ c + e & d \end{bmatrix}$$

e resolvendo para c e d, encontramos $c = x - z$, $d = z$ e $e = -x + y + z$. Portanto,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = (x - z)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-x + y + z)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Verifique.) Segue que ger(A, B, C) é o subespaço das matrizes simétricas 2×2. ◆

Como acontecia em $\mathbb{R}^n$, o conjunto gerado por um conjunto de vetores é sempre um subespaço do espaço vetorial que os contém. O teorema a seguir formaliza esse resultado. Ele generaliza o Teorema 1 da Seção 3.5.

◆ TEOREMA 3

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vetores de um espaço vetorial V.

a. $\text{ger}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ é um subespaço de V.
b. $\text{ger}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ é o menor subespaço de V que contém $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) A demonstração da propriedade (a) é idêntica à demonstração do Teorema 1 da Seção 3.5, com V no lugar de $\mathbb{R}^n$.
(b) Para provar a propriedade (b), precisamos mostrar que qualquer subespaço de V que contenha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ também contém $\text{ger}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Assim, seja W um subespaço de V que contém $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Então, uma vez que W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar, ele contém todas as combinações lineares $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$ de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Portanto, $\text{ger}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ está contido em W. ◆

◆ EXERCÍCIOS 6.2 ◆

Nos Exercícios de 1 a 11, determine se o conjunto dado com as operações especificadas de adição e de multiplicação por escalar é um espaço vetorial. Caso não seja, faça uma relação de todos os axiomas não satisfeitos.

1. O conjunto de todos os vetores em $\mathbb{R}^2$ da forma $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

2. O conjunto de todos os vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ com $x \geq 0, y \geq 0$ (isto é, o primeiro quadrante), com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

3. O conjunto de todos os vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ com $xy \geq 0$ (isto é, a união do primeiro e do terceiro quadrantes), com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

4. O conjunto de todos os vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ com $x \geq y$, com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

5. $\mathbb{R}^2$, com a operação usual de adição, mas com a multiplicação por escalar definida por

$$c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ y \end{bmatrix}$$

6. $\mathbb{R}^2$, com a operação usual de multiplicação por escalar, mas com a adição de matrizes definida por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{bmatrix}$$

7. O conjunto de todos os números reais positivos, com a adição $\oplus$ definida por $x \oplus y = xy$, e a multiplicação por escalar $\odot$ definida por $c \odot x = x^c$.

8. O conjunto de todos os números racionais, com as operações usuais de adição e multiplicação.

9. O conjunto de todas as matrizes 2×2, triangulares superiores, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por escalar.

10. O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde $ad = 0$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por escalar.

11. O conjunto das matrizes $n \times n$ anti-simétricas, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por escalar (veja os Exercícios 3.3).

12. Termine de verificar que $\mathcal{P}_2$ é um espaço vetorial (veja o Exemplo 3).

13. Termine de verificar que $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial (veja o Exemplo 4).

Nos Exercícios de 14 a 17, determine se o conjunto dado com as operações especificadas de adição e de multiplicação por escalar é um espaço vetorial complexo. Caso não seja, faça uma relação de todos os axiomas não satisfeitos.

a + bi

14. O conjunto de todos os vetores de $\mathbb{C}^2$ da forma $\begin{bmatrix} z \\ \bar{z} \end{bmatrix}$, com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar.

15. O conjunto $M_{mn}(\mathbb{C})$ de todas as matrizes complexas $m \times n$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por escalar.

16. O conjunto $\mathbb{C}^2$, com a adição de vetores usual, mas com a multiplicação por escalar definida por

$$c\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}z_1 \\ \bar{c}z_2 \end{bmatrix}.$$

17. $\mathbb{R}^n$, com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

Nos Exercícios de 18 a 21, determine se o conjunto dado com as operações especificadas de adição e de multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre o $\mathbb{Z}_p$ indicado. Caso não seja, faça uma relação de todos os axiomas não satisfeitos.

18. O conjunto de todos os vetores em $\mathbb{Z}_2^n$ com um número par de elementos iguais a 1, sobre $\mathbb{Z}_2$, com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

19. O conjunto de todos os vetores em $\mathbb{Z}_2^n$ com um número ímpar de elementos iguais a 1, sobre $\mathbb{Z}_2$, com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar.

20. O conjunto $M_{mn}(\mathbb{Z}_p)$ de todas as matrizes $m \times n$ com elementos de $\mathbb{Z}_p$, sobre $\mathbb{Z}_p$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por escalar.

21. $\mathbb{Z}_6$, sobre $\mathbb{Z}_3$, com as operações usuais de adição e multiplicação. (Pense cuidadosamente!)

22. Demonstre o Teorema 1(a).

23. Demonstre o Teorema 1(c).

Nos Exercícios de 24 a 45, use o Teorema 2 para determinar se W é um subespaço de V.

24. $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}\right\}$

25. $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{\begin{bmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{bmatrix}\right\}$

26. $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b+1 \end{bmatrix}\right\}$

27. $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ |a| \end{bmatrix}\right\}$

28. $V = M_{22}, W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix}\right\}$

29. $V = M_{22}, W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad \geq bc\right\}$

30. $V = M_{nn}$, $W = \{A \text{ em } M_{nn} : \det A = 1\}$

31. $V = M_{nn}$, W é o conjunto de todas as matrizes diagonais $n \times n$

32. $V = M_{nn}$, W é o conjunto de todas as matrizes idempotentes $n \times n$

33. $V = M_{nn}$, $W = \{A \text{ em } M_{nn} : AB = BA\}$, onde B é uma matriz dada (fixa)

34. $V = \mathcal{P}_2, W = \{bx + cx^2\}$

35. $V = \mathcal{P}_2, W = \{a + bx + cx^2 : a + b + c = 0\}$

36. $V = \mathcal{P}_2, W = \{a + bx + cx^2 : abc = 0\}$

37. $V = \mathcal{P}$, W é o conjunto de todos os polinômios de grau 3

38. $V = \mathcal{F}, W = \{f \text{ em } \mathcal{F} : f(-x) = f(x)\}$

39. $V = \mathcal{F}, W = \{f \text{ em } \mathcal{F} : f(-x) = -f(x)\}$

40. $V = \mathcal{F}, W = \{f \text{ em } \mathcal{F} : f(0) = 1\}$

41. $V = \mathcal{F}, W = \{f \text{ em } \mathcal{F} : f(0) = 0\}$

42. $V = \mathcal{F}$, W é o conjunto de todas as funções integráveis

dy/dx

43. $V = \mathcal{D}, W = \{f \text{ em } \mathcal{D} : f'(x) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x\}$

dy/dx

44. $V = \mathcal{F}$, $W = \mathcal{C}^{(2)}$, o conjunto de todas as funções com derivada segunda contínua

45. $V = \mathcal{F}$, $W = \{f \text{ em } \mathcal{F} : \lim_{x \to 0} f(x) = \infty\}$

Denote por Mag_n o conjunto de todos os quadrados mágicos $n \times n$, e por Mag_n^0 o conjunto de todos os quadrados mágicos $n \times n$ de peso zero. (Veja as definições na Seção 6.1.)

46. Prove que Mag_3 é um subespaço de M_{33}.

47. Prove que Mag_3^0 é um subespaço de M_{33}.

48. Seja V um espaço vetorial com subespaços U e W. Prove que $U \cap W$ é um subespaço de V.

49. Seja V um espaço vetorial com subespaços U e W. Dê um exemplo com $V = \mathbb{R}^2$ para mostrar que $U \cup W$ não é necessariamente um subespaço de V.

50. Seja V um espaço vetorial com subespaços U e W. Defina a ***soma de U e W*** como

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{u} \text{ pertence a } U, \mathbf{w} \text{ pertence a } W\}$$

(a) Se $V = \mathbb{R}^3$, U é o eixo x e W é o eixo y, o que é $U + W$?
(b) Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V, prove que $U + W$ é um subespaço de V.

Nos Exercícios 51 e 52, sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine se C pertence ao ger(A, B).

51. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **52.** $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 53 e 54, sejam $p(x) = 1 - 2x$, $q(x) = x - x^2$ *e* $r(x) = -2 + 3x + x^2$. *Determine se $s(x)$ pertence ao ger($p(x)$, $q(x)$, $r(x)$).*

53. $s(x) = 3 - 5x - x^2$ **54.** $s(x) = 1 + x + x^2$

Nos Exercícios de 55 a 58, $f(x) = sen^2 x$ *e* $g(x) = cos^2 x$. *Determine se $h(x)$ pertence ao ger($f(x)$, $g(x)$).*

55. $h(x) = 1$ **56.** $h(x) = \cos 2x$

57. $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ **58.** $h(x) = \operatorname{sen} x$

59. M_{22} é gerado $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

60. M_{22} é gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

61. $\mathcal{P}_2$ é gerado por $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$?

62. $\mathcal{P}_2$ é gerado por $1 + x + 2x^2$, $2 + x + 2x^2$, $-1 + x + 2x^2$?

63. Prove que, em qualquer espaço vetorial, existe um único vetor nulo.

64. Prove que, para cada vetor $\mathbf{v}$ de um espaço vetorial V, existe um único $\mathbf{v}'$ em V tal que $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$.

6.3 Dependência Linear, Base e Dimensão

Nesta seção, estendemos as noções de dependência linear, base e dimensão aos espaços vetoriais generalizados, ampliando os resultados das Seções 2.4 e 3.5. Na maioria dos casos, as demonstrações dos teoremas se repetem; simplesmente trocamos $\mathbb{R}^n$ pelo espaço vetorial V.

Dependência Linear

Definição Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ em um espaço vetorial V é ***linearmente dependente*** se existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, *não todos nulos*, tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Um conjunto de vetores não linearmente dependente é chamado de ***linearmente independente.***

Assim como em $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente no espaço vetorial V se, e somente se,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \text{implica que} \quad c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$$

Temos, ainda, a seguinte formulação alternativa e útil de dependência linear:

◆ TEOREMA 1

Um conjunto de vetores, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente dependente, em um espaço vetorial V, se, e somente se, pelo menos um dos vetores pode ser expresso como uma combinação linear dos demais.

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é idêntica à do Teorema 2 da Seção 2.4. ◆

Como um caso especial do Teorema 1, temos que um conjunto de *dois* vetores é linearmente dependente se, e somente se, um vetor é múltiplo escalar do outro.

EXEMPLO 1 Em $\mathcal{P}_2$, o conjunto $\{1 + x + x^2, 1 - x + 3x^2, 1 + 3x - x^2\}$ é linearmente dependente, uma vez que

$$2(1 + x + x^2) - (1 - x + 3x^2) = 1 + 3x - x^2$$

◆

EXEMPLO 2 Em M_{22}, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $A + B = C$, e, portanto, o conjunto $\{A, B, C\}$ é linearmente dependente. ◆

EXEMPLO 3 Em $\mathcal{F}$, o conjunto $\{\text{sen}^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\}$ é linearmente dependente, uma vez que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

◆

EXEMPLO 4 Prove que o conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{P}_n$.

SOLUÇÃO 1: Suponha que $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sejam escalares tais que

$$c_0 \cdot 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

Então, o polinômio $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ vale zero para todos os valores de x. Mas um polinômio de grau no máximo n não pode ter mais que n zeros (veja o Apêndice D). Dessa forma, $p(x)$ deve ser o polinômio identicamente nulo, o que significa que $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Portanto, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é linearmente independente.

SOLUÇÃO 2: Começamos, como na primeira solução, assumindo que

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

Como isso vale para todo x, podemos substituir $x = 0$ para obter $c_0 = 0$. Ficamos com

$$c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

Derivando, obtemos

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} = 0$$

e, calculando em $x = 0$, vemos que $c_1 = 0$. Diferenciando $2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} = 0$ e calculando em $x = 0$, encontramos $2c_2 = 0$, portanto, $c_2 = 0$. Continuando dessa forma, vemos que $k!c_k = 0$ para $k = 0, \ldots, n$. Portanto, $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, e $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é linearmente independente. ◈

EXEMPLO 5 Em $\mathcal{P}_2$, determine se o conjunto $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ é linearmente independente.

SOLUÇÃO: Suponha que c_1, c_2 e c_3 sejam escalares tais que

$$c_1(1 + x) + c_2(x + x^2) + c_3(1 + x^2) = 0$$

Então

$$(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3)x^2 = 0$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} c_1 + \phantom{c_2 +{}} c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 \phantom{{}+ c_3} &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Portanto, $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ é linearmente independente. ◈

Observação: ◆ Compare o Exemplo 5 acima com o Exemplo 6(b) da Seção 2.4. O sistema de equações que aparece é exatamente o mesmo. Isso acontece por causa da correspondência entre $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$, que relaciona

$$1 + x \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x + x^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 1 + x^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e produz as colunas da matriz de coeficientes do sistema linear que temos que resolver. Dessa forma, provar que $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ é linearmente independente equivale a provar que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente. Mas isso é imediato, uma vez que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem posto 3, pelo Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis.

EXEMPLO 6 Em $\mathcal{F}$, determine se o conjunto $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ é linearmente independente.

SOLUÇÃO: As funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ são linearmente *dependentes* se, e somente se, uma delas é um múltiplo escalar da outra. No entanto, a partir de seus gráficos, fica claro que esse não é o caso, pois, por exemplo, qualquer múltiplo não nulo de $f(x) = \operatorname{sen} x$ tem os mesmos zeros, nenhum dos quais é um zero de $g(x) = \cos x$.

Essa maneira de pensar nem sempre é apropriada. A seguir, explicaremos um método direto, mais computacional. Suponha que c e d sejam escalares tais que

$$c \operatorname{sen} x + d \cos x = 0$$

Para $x = 0$, obtemos $d = 0$, e, calculando em $x = \pi/2$, obtemos $c = 0$. Portanto, o conjunto $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ é linearmente independente.

Apesar das definições de dependência e independência linear terem sido feitas para conjuntos *finitos* de vetores, podemos estender esses conceitos para conjuntos *infinitos*:

Um conjunto S de vetores de um espaço vetorial V é ***linearmente dependente*** se contém um número finito de vetores linearmente dependentes. Um conjunto de vetores que não é linearmente dependente é chamado de ***linearmente independente***.

Observe que, para um conjunto finito de vetores, essa é apenas a definição original. A seguir, temos um exemplo de um conjunto infinito de vetores linearmente independentes.

EXEMPLO 7 Prove que $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ é linearmente independente em $\mathcal{P}$.

SOLUÇÃO: Suponha que existe um subconjunto finito T de S, linearmente dependente. Seja x^m a maior potência de x em T, e x^n, a menor. Então, existem escalares $c_n, c_{n+1}, \ldots, c_m$, não todos nulos, tais que

$$c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \cdots + c_m x^m = 0$$

No entanto, por um argumento semelhante ao usado no Exemplo 4, isso implica que $c_n = c_{n+1} = \ldots = c_m = 0$, o que é uma contradição. Assim, S não pode conter um número finito de vetores linearmente dependentes, por isso é linearmente independente.

Bases

Agora, podemos estender facilmente o conceito, tão importante, de uma base para espaços vetoriais arbitrários.

Definição Um subconjunto $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial V é uma ***base*** de V se

1. $\mathcal{B}$ gera V.
2. $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

EXEMPLO 8 Se $\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna da matriz-identidade $n \times n$, então $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base para $\mathbb{R}^n$, conhecida como ***base canônica*** de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 9 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base para $\mathcal{P}_n$, conhecida como ***base canônica*** de $\mathcal{P}_n$.

EXEMPLO 10 O conjunto $\mathcal{E} = \{E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$ é uma base para M_{mn}, onde as matrizes E_{ij} são as definidas no Exemplo 18 da Seção 6.2. $\mathcal{E}$ é conhecida como ***base canônica*** de M_{mn}.

Já vimos que $\mathcal{E}$ gera M_{mn}. É fácil provar que $\mathcal{E}$ é linearmente independente. (Verifique!) Assim, $\mathcal{E}$ é uma base para M_{mn}.

EXEMPLO 11 Prove que $\mathcal{B} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ é uma base para $\mathcal{P}_2$.

SOLUÇÃO: No Exemplo 5, provamos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Para provar que $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{P}_2$, seja $a + bx + cx^2$ um polinômio arbitrário em $\mathcal{P}_2$. Devemos mostrar que existem escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1 + x) + c_2(x + x^2) + c_3(1 + x^2) = a + bx + cx^2$$

ou, equivalentemente,

$$(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3)x^2 = a + bx + cx^2$$

Igualando os coeficientes de acordo com as potências de x, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} c_1 + \phantom{c_2 +{}} c_3 &= a \\ c_1 + c_2 \phantom{{}+ c_3} &= b \\ c_2 + c_3 &= c \end{aligned}$$

o qual tem uma solução, pois a matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem posto 3 e, por isso, é invertível. (Não precisamos saber *qual* é a solução; só precisamos saber que ela existe.) Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{P}_2$. ◆

Observação: ◆ Observe que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a chave para o Exemplo 11. Podemos obtê-la imediatamente usando a correspondência entre $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$, como indicado na observação que aparece após o Exemplo 5.

EXEMPLO 12 Prove que $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ é uma base para $\mathcal{P}$.

SOLUÇÃO: No Exemplo 7, vimos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Ele também gera $\mathcal{P}$, pois todo polinômio é, claramente, uma combinação linear (de um número finito) de potências de x. ◆

EXEMPLO 13 Encontre bases para os três espaços vetoriais do Exemplo 13 da Seção 6.2:

(a) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix} \right\}$ (b) $W_2 = \{a + bx - bx^2 + ax^3\}$ (c) $W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \right\}$

SOLUÇÃO: Mais uma vez, vamos trabalhar os três exemplos lado a lado para destacar as similaridades entre eles. Em certo sentido, eles são todos *o mesmo* exemplo, mas devemos trabalhar até a Seção 6.6 para tornar essa idéia precisa.

a) Como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos que $W_1 = \text{ger}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_1.

(b) Como

$$\begin{aligned} &a + bx - bx^2 + ax^3 \\ &= a(1 + x^3) + b(x - x^2) \end{aligned}$$

temos que $W_2 = \text{ger}(u(x), v(x))$, onde

$$u(x) = 1 + x^3$$

e

$$v(x) = x - x^2$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{u(x), v(x)\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_2.

(c) Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $W_3 = \text{ger}(U, V)$, onde

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{U, V\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_3. ◆

Coordenadas

A Seção 3.5 introduziu a idéia de coordenadas de um vetor com respeito a uma base para subespaços de $\mathbb{R}^n$. Agora, vamos estender esse conceito para espaços vetoriais arbitrários.

◆ TEOREMA 2

Seja V um espaço vetorial, e seja $\mathcal{B}$ uma base para V. Para todo vetor $\mathbf{v}$ de V, existe uma única maneira de escrever $\mathbf{v}$ como uma combinação linear de vetores da base $\mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é a mesma do Teorema 11 da Seção 3.5. Ela funciona mesmo que a base $\mathcal{B}$ seja infinita, pois combinações lineares são, por definição, finitas. ◆

A recíproca do Teorema 2 também é verdadeira — isto é, se $\mathcal{B}$ é um conjunto de vetores em um espaço vetorial V com a propriedade de todo vetor de V poder ser escrito de forma única como uma combinação linear de vetores de $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é uma base para V (veja o Exercício 30). Nesse sentido, a *propriedade de representação única* caracteriza uma base.

Como a representação de um vetor com respeito a uma base é única, a definição a seguir faz sentido.

Definição Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para o espaço vetorial V. Seja $\mathbf{v}$ um vetor em V, e escreva $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. Então, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são as ***coordenadas de*** $\mathbf{v}$ ***relativas à base*** $\mathcal{B}$, e o vetor coluna

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

é o ***vetor de coordenadas de*** $\mathbf{v}$ ***relativo à base*** $\mathcal{B}$.

Observe que, se a base $\mathcal{B}$ de V tem n vetores, então $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ é um vetor (coluna) de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 14 Encontre o vetor de coordenadas $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ de $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$, relativo à base canônica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

SOLUÇÃO: O polinômio $p(x)$ já é uma combinação linear de 1, x e x^2, por isso

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

◆

Essa é a correspondência entre $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$ sobre a qual fizemos uma observação após o Exemplo 5, e pode ser generalizada facilmente para provar que o vetor de coordenadas de um polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ de } \mathcal{P}_n$$

relativo à base canônica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é apenas o vetor

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^{n+1}$$

Observação: ◆ A *ordem* na qual os vetores da base aparecem em $\mathcal{B}$ afeta a ordem dos elementos de um vetor de coordenadas. Por exemplo, no Exemplo 14, assuma que os vetores da base canônica estejam ordenados como $\mathcal{B}' = \{x^2, x, 1\}$. Então, o vetor das coordenadas de $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$, relativo a $\mathcal{B}'$, é

$$[p(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 15 Encontre o vetor de coordenadas $[A]_{\mathcal{B}}$ de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, relativo à base canônica $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ de M_{22}.

SOLUÇÃO: Como

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 2E_{11} - E_{12} + 4E_{21} + 3E_{22}$$

temos

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Essa é a correspondência entre M_{22} e $\mathbb{R}^4$, sobre a qual fizemos uma observação antes da introdução ao Exemplo 13 da Seção 6.2. Ela também pode ser generalizada facilmente para obtermos uma correspondência entre M_{mn} e $\mathbb{R}^{mn}$. ◆

EXEMPLO 16 Encontre o vetor de coordenadas $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ de $p(x) = 1 + 2x - x^2$, relativo à base $\mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

SOLUÇÃO: Precisamos encontrar c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1 + x) + c_2(x + x^2) + c_3(1 + x^2) = 1 + 2x - x^2$$

ou, equivalentemente,

$$(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3)x^2 = 1 + 2x - x^2$$

Assim como no Exemplo 11, isso significa que precisamos resolver o sistema

$$\begin{aligned} c_1 + \phantom{c_2 +{}} c_3 &= 1 \\ c_1 + c_2 \phantom{{}+ c_3} &= 2 \\ c_2 + c_3 &= -1 \end{aligned}$$

cuja solução é $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$. Portanto,

$$[p(x)]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[Uma vez que esse resultado diz que $p(x) = 2(1 + x) - (1 + x^2)$, é fácil verificar que isso está correto.]

O próximo teorema prova que formar vetores de coordenadas é um processo compatível com as operações de adição e de multiplicação por escalar do espaço vetorial.

TEOREMA 3

Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V. Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de V e c, um escalar. Então:

a. $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_B = [\mathbf{v}]_B + [\mathbf{w}]_B$
b. $[c\mathbf{v}]_B = c[\mathbf{v}]_B$

DEMONSTRAÇÃO: Começamos escrevendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em termos dos vetores da base — digamos, como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

Então, usando propriedades de espaço vetorial, temos

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\mathbf{v}_n$$

e

$$c\mathbf{v} = (cc_1)\mathbf{v}_1 + (cc_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (cc_n)\mathbf{v}_n$$

Assim,

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{v}]_B$$

e

$$[c\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} cc_1 \\ cc_2 \\ \vdots \\ cc_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c[\mathbf{u}]_B$$

Um corolário imediato do Teorema 3 afirma que vetores de coordenadas preservam combinações lineares:

$$[c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k]_B = c_1[\mathbf{u}_1]_B + \cdots + c_k[\mathbf{u}_k]_B \tag{1}$$

No Exercício 31, será pedido que você prove esse corolário.

O aspecto mais útil dos vetores de coordenadas é que eles nos permitem transferir informações de um espaço vetorial em geral para $\mathbb{R}^n$, onde temos as ferramentas dos Capítulos 1 a 3 à nossa disposição. Exploraremos essa idéia com algum detalhe nas Seções 6.4 e 6.7. Por enquanto temos o teorema a seguir, que é de grande utilidade.

◆ TEOREMA 4

Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para o espaço vetorial V, e sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vetores de V. Então, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é linearmente independente em V se, e somente se, $\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO: Assuma que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ seja linearmente independente em V e

$$c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_k[\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$$

esteja em $\mathbb{R}^n$. Então, temos

$$[c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$$

usando a equação (1). Portanto, as coordenadas do vetor $c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$, relativas a $\mathcal{B}$, são todas nulas — isto é,

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

A independência linear de $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, por isso $\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}\}$ é linearmente independente.

A implicação recíproca, que se utiliza de idéias similares, é deixada para o Exercício 32. ◆

Observe que, no caso especial onde $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$, temos

$$\mathbf{v}_i = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + 1 \cdot \mathbf{v}_i + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v}_n$$

portanto, $[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_i$, e $\{[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}}\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Dimensão

A definição de dimensão de um espaço vetorial é a mesma usada para um subespaço de $\mathbb{R}^n$ — o número de vetores em uma base do espaço. Como um espaço vetorial pode ter mais de uma base, precisamos provar que essa definição faz sentido — isto é, precisamos estabelecer que bases diferentes de um mesmo espaço vetorial contêm o mesmo número de vetores.

O item (a) do próximo teorema generaliza o Teorema 5 da Seção 2.4.

◆ TEOREMA 5

Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V.

a. Qualquer conjunto de V com mais de n vetores é linearmente dependente.
b. Qualquer conjunto de V com menos de n vetores não pode gerar V.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um conjunto de vetores de V, com $m > n$. Então, $\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_m]_{\mathcal{B}}\}$ é um conjunto de $\mathbb{R}^n$ com mais de n vetores, e por isso é linearmente dependente, pelo Teorema 5 da Seção 2.4. Pelo Teorema 4, isso implica que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ também é linearmente dependente.

(b) Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um conjunto de vetores de V, com $m < n$. Então, $S = \{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_m]_{\mathcal{B}}\}$ é um conjunto de $\mathbb{R}^n$ com menos de n vetores. Porém, $\text{ger}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m) = V$ se, e somente se, $\text{ger}(S) = \mathbb{R}^n$ (veja o Exercício 33). Mas $\text{ger}(S)$ é somente o espaço-coluna da matriz $n \times m$

$$A = [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [\mathbf{u}_m]_{\mathcal{B}}]$$

portanto, $\dim(\text{ger}(S)) = \dim(\text{col}(A)) \leq m < n$. Disso segue que S não pode gerar $\mathbb{R}^n$, portanto, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ não gera V. ◆

Agora, estenderemos o Teorema 5 da Seção 3.5.

◆ TEOREMA 6 O Teorema da Base

Se um espaço vetorial V tem uma base com n vetores, então toda base para V tem exatamente n vetores.

A demonstração do Teorema 5 da Seção 3.5 também funciona aqui, praticamente palavra por palavra. Entretanto, é mais fácil usar o Teorema 5.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B}$ uma base para V com n vetores, e seja $\mathcal{B}'$ uma outra base para V com m vetores. Pelo Teorema 5, $m \leq n$; caso contrário, $\mathcal{B}'$ seria linearmente dependente.

Usamos agora o Teorema 5 trocando os papéis de $\mathcal{B}$ e de $\mathcal{B}'$. Como $\mathcal{B}'$ é uma base de V com m vetores, o Teorema 5 implica que qualquer conjunto com mais de m vetores de V é linearmente dependente. Segue que $n \leq m$, pois $\mathcal{B}$ é uma base e, portanto, é linearmente independente.

Como $n \leq m$ e $m \leq n$, devemos ter $n = m$, como afirmamos. ◆

A definição a seguir agora faz sentido, uma vez que o número de vetores em uma base (finita) não depende da escolha da base.

Definição Um espaço vetorial V é chamado de ***dimensão finita*** se ele tem uma base que contém um número finito de vetores. A ***dimensão*** de V, denotada por dim V, é o número de vetores em uma base para V. A dimensão do espaço vetorial nulo $\{\mathbf{0}\}$ é definida como zero. Um espaço vetorial que não tem base finita é chamado de ***dimensão infinita***.

EXEMPLO 17 Uma vez que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ tem n vetores, dim $\mathbb{R}^n = n$. No caso de $\mathbb{R}^3$, um subespaço unidimensional é apenas o gerado de um único vetor não nulo, e, dessa forma, é uma linha que passa pela origem. Um subespaço bidimensional é gerado por sua base de dois vetores linearmente independentes (isto é, não paralelos) e, portanto, é um plano através da origem. Pelo Teorema Fundamental, quaisquer três vetores linearmente independentes devem gerar o espaço $\mathbb{R}^3$. Agora, os subespaços de $\mathbb{R}^3$ estão completamente classificados de acordo com a dimensão, como provado pela Tabela 1.

Tabela 1

dim V	V
3	$\mathbb{R}^3$
2	Plano através de $\mathbf{0}$
1	Linha através de $\mathbf{0}$
0	$\{\mathbf{0}\}$

◆

EXEMPLO 18 A base canônica de $\mathcal{P}_n$ contém $n + 1$ vetores (veja o Exemplo 9), portanto, dim $\mathcal{P}_n = n + 1$. ◆

EXEMPLO 19 A base canônica de M_{mn} contém mn vetores (veja o Exemplo 10), portanto, dim $M_{mn} = mn$. ◆

EXEMPLO 20 $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ têm dimensão infinita, uma vez que ambos contêm o conjunto infinito $\{1, x, x^2, \ldots\}$, que é linearmente independente (veja o Exercício 44). ◆

EXEMPLO 21 Encontre a dimensão do espaço vetorial W formado pelas matrizes simétricas 2×2 (veja o Exemplo 10 da Seção 6.2).

SOLUÇÃO: Uma matriz simétrica 2×2 é da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto, W é gerado pelo conjunto

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Se S for linearmente independente, ele será uma base para W. Calculando

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

do que é imediato que $a = b = c = 0$. Segue que S, além de linearmente independente, é uma base para W. Concluímos que $\dim W = 3$. ◆

A dimensão de um espaço vetorial é seu "número mágico". Conhecer a dimensão de um espaço vetorial V nos dá muita informação sobre V e pode simplificar enormemente o trabalho necessário em certos tipos de cálculo, como ilustram os teoremas e exemplos a seguir.

◆ TEOREMA 7

Seja V um espaço vetorial com $\dim V = n$. Então:

a. Qualquer conjunto linearmente independente em V contém no máximo n vetores.
b. Qualquer conjunto gerador de V contém no mínimo n vetores.
c. Qualquer conjunto linearmente independente em V, com exatamente n vetores, é uma base para V.
d. Qualquer conjunto gerador de V, com exatamente n vetores, é uma base para V.
e. Qualquer conjunto linearmente independente em V pode ser estendido para uma base para V.
f. Qualquer conjunto gerador de V pode ser reduzido a uma base para V.

DEMONSTRAÇÃO: As demonstrações das propriedades (a) e (b) seguem das partes (a) e (b) do Teorema 5, respectivamente.

(c) Seja S um conjunto com exatamente n vetores, linearmente independente em V. Se S não gera V, então existe algum vetor $\mathbf{v}$ em V que não é uma combinação linear dos vetores em S. Juntando $\mathbf{v}$ a S, produzimos um conjunto S' com $n + 1$ vetores, que ainda é linearmente independente (veja o Exercício 54). Mas isso é impossível, pelo Teorema 5(a). Concluímos que S deve gerar V e, portanto, deve ser uma base para V.

(d) Seja S um conjunto gerador de V que contém exatamente n vetores. Se S é linearmente dependente, então algum vetor $\mathbf{v}$ em S é uma combinação linear dos outros. Deixando $\mathbf{v}$ de lado, ficamos com um conjunto S' com $n - 1$ vetores, que ainda gera V (veja o Exercício 55). Mas isso é impossível, pelo Teorema 5(b). Concluímos que S deve ser linearmente independente e, portanto, deve ser uma base para V.

(e) Seja S um conjunto de vetores linearmente independente em V. Se S gera V, ele é uma base para V e, portanto, pelo Teorema da Base, consiste exatamente em n vetores. Se S não gera V, então, como na demonstração da propriedade (c), existe algum vetor $\mathbf{v}$ em V que não é uma combinação linear dos vetores em S. Juntando $\mathbf{v}$ a S, produzimos um conjunto S' que ainda é linearmente independente. Se S' ainda não gera V, podemos repetir o processo e expandi-lo para um conjunto maior, linearmente independente. Finalmente, esse processo deve parar, pois, pelo Teorema 5(a), nenhum conjunto linearmente independente em V pode conter mais que n vetores. Quando o processo termina, temos um conjunto linearmente independente, S^*, que contém S e ainda gera V. Portanto, S^* é uma base para V que estende S.

(f) Pediremos que você prove essa propriedade no Exercício 56. ◆

Você deve ver o Teorema 7, em parte, como um mecanismo para nos poupar trabalho. Em muitas ocasiões, ele pode diminuir incrivelmente a quantidade de trabalho necessário para verificar se um conjunto de vetores é linearmente independente, se é um conjunto gerador ou se é uma base.

EXEMPLO 22 Em cada caso, determine se S é uma base de V.

(a) $V = \mathcal{P}_2, \quad S = \{1 + x, 2 - x + x^2, 3x - 2x^2, -1 + 3x + x^2\}$

(b) $V = M_{22}, \quad S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

(c) $V = \mathcal{P}_2, \quad S = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$

SOLUÇÃO: (a) Como $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$ e S contém quatro vetores, S é linearmente dependente, pelo Teorema 7(a). Segue que S não é uma base para $\mathcal{P}_2$.
(b) Como $\dim(M_{22}) = 4$ e S contém três vetores, S não pode gerar M_{22}, pelo Teorema 7(b). Segue que S não é uma base para M_{22}.
(c) Como $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$ e S contém três vetores, S será uma base para $\mathcal{P}_2$ se ele for linearmente independente ou se ele gerar $\mathcal{P}_2$, pelo Teorema 7(c) ou (d). É mais fácil provar que S é linearmente independente; fizemos isso no Exemplo 5. Portanto, S é uma base para $\mathcal{P}_2$. (Esse é o mesmo problema do Exemplo 11 — mas observe quão simples ele se torna ao usarmos o Teorema 7!) ◆

EXEMPLO 23 Estenda $\{1 + x, 1 - x\}$ a uma base de $\mathcal{P}_2$.

SOLUÇÃO: Observe que $\{1 + x, 1 - x\}$ é linearmente independente. (Por quê?) Como $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$, precisamos de um terceiro vetor — um que não dependa linearmente dos dois primeiros. Poderíamos proceder como na demonstração do Teorema 7(e) e usar o método de tentativa e erro para encontrar um vetor com essa propriedade. Entretanto, na prática, é mais fácil proceder de outra maneira. Vamos aumentar o conjunto de vetores dado, juntando *toda* a base canônica de $\mathcal{P}_2$. Obtemos

$$S = \{1 + x, 1 - x, 1, x, x^2\}$$

Agora, de acordo com o Teorema 7(a), S é linearmente dependente, portanto, precisamos deixar de lado alguns vetores — neste caso, dois. Quais? Usamos para isso o Teorema 7(f), começando com o primeiro vetor adicionado, 1. Como $1 = \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{1}{2}(1 - x)$, o conjunto $\{1 + x, 1 - x, 1\}$ é linearmente dependente, por isso deixamos de lado o 1. De maneira similar, $x = \frac{1}{2}(1 + x) - \frac{1}{2}(1 - x)$, portanto, $\{1 + x, 1 - x, x\}$ também é linearmente dependente. Finalmente, verificamos que $\{1 + x, 1 - x, x^2\}$ é linearmente independente. (Você vê uma maneira rápida de provar isso?) Portanto, $\{1 + x, 1 - x, x^2\}$ é uma base para $\mathcal{P}_2$ que estende $\{1 + x, 1 - x\}$. ◆

No Exemplo 21, o espaço vetorial W das matrizes simétricas 2×2 é um subespaço do espaço vetorial M_{22} formado por todas as matrizes 2×2. Como provamos, $\dim W = 3 \leq 4 = \dim M_{22}$. Esse é um exemplo de um resultado geral, como mostra o último teorema desta seção.

◆ TEOREMA 8

Seja W um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então:

a. W é de dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$.
b. $\dim W = \dim V$ se, e somente se, $W = V$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Suponha que $\dim V = n$. Se $W = \{\mathbf{0}\}$, então $\dim(W) = 0 \leq n = \dim V$. Se W é não nulo, então qualquer base $\mathcal{B}$ para V (com n vetores) certamente gera W, uma vez que W está contido em V. Mas $\mathcal{B}$ pode ser reduzida a uma base $\mathcal{B}'$ de W (com no máximo n vetores), pelo Teorema 7(f). Segue que W é de dimensão finita e $\dim(W) \leq n = \dim V$.
(b) Se $W = V$, certamente $\dim W = \dim V$. Por outro lado, se $\dim W = \dim V = n$, então qualquer base $\mathcal{B}$ para W contém exatamente n vetores. Mas então esses são n vetores linearmente independentes em V, e, pelo Teorema 7(c), segue que formam uma base para V. Portanto, $V = \text{ger}(\mathcal{B}) = W$. ◆

◆ EXERCÍCIOS 6.3 ◆

Nos Exercícios de 1 a 4, teste se os conjuntos de matrizes são linearmente independentes em M_{22}. Para os que forem linearmente dependentes, expresse uma das matrizes como combinação linear das demais.

1. $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

2. $\left\{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right\}$

3. $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\right\}$

4. $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

Nos Exercícios de 5 a 9, teste se os conjuntos de polinômios são linearmente independentes. Para os que forem linearmente dependentes, expresse um dos polinômios como combinação linear dos demais.

5. $\{x, 1 + x\}$ em $\mathcal{P}_1$.
6. $\{1 + x, 1 + x^2, 1 - x + x^2\}$ em $\mathcal{P}_2$.
7. $\{x, 2x - x^2, 3x + 2x^2\}$ em $\mathcal{P}_2$.
8. $\{2x, x - x^2, 1 + x^3, 2 - x^2 + x^3\}$ em $\mathcal{P}_3$.
9. $\{1 - 2x, 3x + x^2 - x^3, 1 + x^2 + 2x^3, 3 + 2x + 3x^3\}$ em $\mathcal{P}_3$.

Nos Exercícios de 10 a 14, teste se os conjuntos de funções são linearmente independentes em $\mathcal{F}$. Para os que forem linearmente dependentes, expresse uma das funções como combinação linear das demais.

10. $\{1, \text{sen}\, x, \cos x\}$
11. $\{1, \text{sen}^2 x, \cos^2 x\}$
12. $\{e^x, e^{-x}\}$
13. $\{1, \ln(2x), \ln(x^2)\}$
14. $\{\text{sen}\, x, \text{sen}\, 2x, \text{sen}\, 3x\}$

15. Se f e g estão em $\mathcal{C}^{(1)}$, o espaço vetorial de todas as funções com derivadas contínuas, então o determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

é conhecido como ***wronskiano*** de f e g [em homenagem ao matemático franco-polonês Jósef Maria Hoëné-Wronski (1776–1853), que trabalhou na teoria dos determinantes e na filosofia da matemática]. Prove que f e g são linearmente independentes, caso seu wronskiano não seja identicamente nulo [isto é, caso exista algum x tal que $W(x) \neq 0$].

16. Em geral, o wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$ pertencentes a $\mathcal{C}^{(n-1)}$ é o determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

e $f_1, \ldots, f_n$ são linearmente independentes, se $W(x)$ não é identicamente nulo. Refaça os Exercícios de 10 a 14 usando o teste wronskiano.

17. Seja $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes no espaço vetorial V.
(a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ é linearmente independente? Prove ou dê um contra-exemplo.
(b) $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$ é linearmente independente? Prove ou dê um contra-exemplo.

Nos Exercícios de 18 a 25, determine se o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para o espaço vetorial V.

18. $V = M_{22}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\right\}$

19. $V = M_{22}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\right\}$

20. $V = M_{22}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$

21. $V = M_{22}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\-3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}\right\}$

22. $V = \mathcal{P}_2, \mathcal{B} = \{x, 1 + x, x - x^2\}$

23. $V = \mathcal{P}_2, \mathcal{B} = \{1 - x, 1 - x^2, x - x^2\}$

24. $V = \mathcal{P}_2, \mathcal{B} = \{1, 1 + 2x + 3x^2\}$

25. $V = \mathcal{P}_2, \mathcal{B} = \{1, 2 - x, 3 - x^2, x + 2x^2\}$

26. Encontre o vetor de coordenadas de $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ relativo à base $\mathcal{B} = \{E_{12}, E_{11}, E_{22}, E_{21}\}$ de M_{22}.

27. Encontre o vetor de coordenadas de $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ relativo à base $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ de M_{22}.

28. Encontre o vetor de coordenadas de $p(x) = 2 - x + 3x^2$ relativo à base $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

29. Encontre o vetor de coordenadas de $p(x) = 2 - x + 3x^2$ relativo à base $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, -1 + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

30. Seja $\mathcal{B}$ um conjunto de vetores em um espaço vetorial V satisfazendo a seguinte propriedade: todo vetor de V pode ser escrito, de forma única, como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$. Prove que $\mathcal{B}$ é uma base de V.

31. Seja $\mathcal{B}$ uma base para um espaço vetorial V, sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vetores de V e sejam $c_1, \ldots, c_k$ escalares. Prove que

$$[c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}} = c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_k[\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}.$$

32. Termine a demonstração do Teorema 4 provando que, se $\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é linearmente independente em V.

33. Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial n-dimensional V, e seja $\mathcal{B}$ uma base de V. Seja $S = \{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_m]_{\mathcal{B}}\}$ o conjunto dos vetores de coordenadas de $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ relativos a $\mathcal{B}$. Prove que $\text{ger}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m) = V$ se, e somente se, $\text{ger}(S) = \mathbb{R}^n$.

Nos Exercícios de 34 a 39, encontre a dimensão do espaço vetorial V e dê uma base para V.

34. $V = \{p(x) \text{ em } \mathcal{P}_2 : p(0) = 0\}$

35. $V = \{p(x) \text{ em } \mathcal{P}_2 : p(1) = 0\}$

36. $V = \{p(x) \text{ em } \mathcal{P}_2 : xp'(x) = p(x)\}$

$\frac{dy}{dx}$

37. $V = \{A \text{ em } M_{22} : A \text{ é triangular superior}\}$

38. $V = \{A \text{ em } M_{22} : A \text{ é anti-simétrico}\}$

39. $V = \{A \text{ em } M_{22} : AB = BA\}$, onde $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

40. Encontre uma fórmula para a dimensão do espaço vetorial das matrizes simétricas $n \times n$.

41. Encontre uma fórmula para a dimensão do espaço vetorial das matrizes anti-simétricas $n \times n$.

42. Descubra a dimensão de Mag_3^0. (Veja a Seção 6.1 e o Exercício 47 da Seção 6.2.)

43. Descubra a dimensão de Mag_3. (Veja a Seção 6.1 e o Exercício 46 da Seção 6.2.)

44. Prove que o espaço vetorial $\mathcal{P}$ tem dimensão infinita. (*Sugestão:* suponha que ele tem uma base finita. Mostre que existe algum polinômio que não é uma combinação linear dessa base.)

45. Estenda $\{1 + x, 1 + x + x^2\}$ a uma base de $\mathcal{P}_2$.

46. Estenda $\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ a uma base de M_{22}.

47. Estenda $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ a uma base de M_{22}.

48. Estenda $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ a uma base do espaço vetorial das matrizes simétricas 2×2.

49. Encontre uma base para $\text{ger}(1, 1 + x, 2x)$ em $\mathcal{P}_1$.

50. Encontre uma base para $\text{ger}(1 - 2x, 2x - x^2, 1 - x^2, 1 + x^2)$ em $\mathcal{P}_2$.

51. Encontre uma base para $\text{ger}(1 - x, x - x^2, 1 - x^2, 1 - 2x + x^2)$ em $\mathcal{P}_2$.

52. Encontre uma base para $\text{ger}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\right)$ em M_{22}.

53. Encontre uma base para ger($\text{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos 2x$) em $\mathcal{F}$.

54. Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial V. Prove que, se $\mathbf{v}$ é um vetor de V que não pertence ao conjunto ger(S), então $S' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ ainda é linearmente independente.

55. Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto gerador para um espaço vetorial V. Prove que, se $\mathbf{v}_n$ pertence ao conjunto ger($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$), então $S' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ ainda é um conjunto gerador para V.

56. Prove o Teorema 7(f).

57. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V, e sejam $c_1, \ldots, c_n$ escalares não nulos. Prove que $\{c_1\mathbf{v}_1, \ldots, c_n\mathbf{v}_n\}$ também é uma base para V.

58. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V. Prove que

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n\}$$

também é uma base para V.

Sejam $n + 1$ números reais distintos $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Defina os polinômios $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ por

$$p_i(x) = \frac{(x - a_0)\cdots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\cdots(x - a_n)}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)}$$

*Esses são conhecidos como **polinômios de Lagrange** associados a $a_0, a_1, \ldots, a_n$. [Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) nasceu na Itália, mas passou a maior parte de sua vida na Alemanha e na França. Fez contribuições muito importantes à teoria dos números, à álgebra, à astronomia, à mecânica e ao cálculo de variações. Em 1773, foi o primeiro a interpretar um determinante como um volume (veja o Capítulo 4).]*

59. (a) Calcule os polinômios de Lagrange associados com $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.

(b) Prove que, em geral,

$$p_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

60. (a) Prove que o conjunto $\mathcal{B} = \{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ dos polinômios de Lagrange é linearmente independente em $\mathcal{P}_n$. [*Sugestão:* tome $c_0p_0(x) + \cdots + c_np_n(x) = 0$ e use o Exercício 59(b).]

(b) Deduza que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{P}_n$.

61. Se $q(x)$ é um polinômio arbitrário em $\mathcal{P}_n$, conclui-se, pelo Exercício 60(b), que

$$q(x) = c_0p_0(x) + \cdots + c_np_n(x) \tag{1}$$

para alguns escalares $c_0, \ldots, c_n$.

(a) Prove que $c_i = q(a_i)$ para $i = 0, \ldots, n$, e deduza que $q(x) = q(a_0)p_0(x) + \cdots + q(a_n)p_n(x)$ é a representação única de $q(x)$ relativa à base $\mathcal{B}$.

(b) Prove que, para quaisquer $n + 1$ pontos $(a_0, c_0), (a_1, c_1), \ldots, (a_n, c_n)$ cujas primeiras componentes são distintas, a função $q(x)$ definida pela equação (1) é o único polinômio de grau menor ou igual a n que passa por todos os pontos. Essa fórmula é conhecida como ***fórmula de interpolação de Lagrange.*** (Compare-a com o Problema 19 que aparece em Investigação: Aplicações Geométricas de Determinantes, no Capítulo 4.)

(c) Use a fórmula de interpolação de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que passa pelos pontos

(i) $(1, 6)$, $(2, -1)$ e $(3, -2)$

(ii) $(-1, 10)$, $(0, 5)$ e $(3, 2)$

62. Use a fórmula de interpolação de Lagrange para provar que, se um polinômio em $\mathcal{P}_n$ tem $n + 1$ zeros, então ele deve ser o polinômio nulo.

63. Encontre uma fórmula para o número de matrizes invertíveis em $M_{nn}(\mathbb{Z}_p)$. [*Sugestão:* isso é o mesmo que determinar o número de bases diferentes para $\mathbb{Z}_p^n$. (Por quê?) Conte o número de maneiras que podemos construir uma base para $\mathbb{Z}_p^n$, um vetor por vez.]

6.4 Mudança de Base

Em muitas aplicações, um problema descrito por meio de um sistema de coordenadas pode ser resolvido mais facilmente pela troca por um novo sistema de coordenadas. Essa troca normalmente se dá por uma mudança de variáveis, um processo que você provavelmente encontrou em outros cursos de matemática. Na álgebra linear, uma base nos dá um sistema de coordenadas para um espaço vetorial, através da noção de

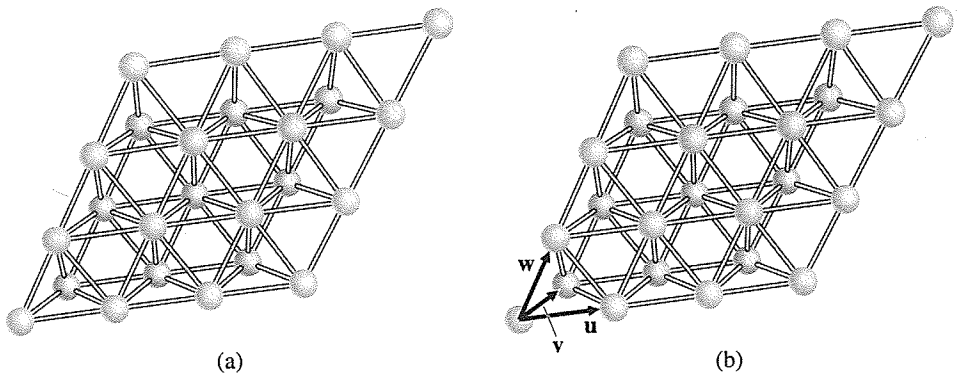


Figura 1

vetores de coordenadas. Freqüentemente, qualquer problema em particular poderá ser simplificado se escolhermos a base correta. Por exemplo, considere a estrutura molecular do zinco, mostrada na Figura 1(a). Um cientista, ao estudar o zinco, pode querer medir o comprimento das ligações entre os átomos, os ângulos entre essas ligações e assim por diante. Essa análise será enormemente facilitada com o uso de coordenadas e das ferramentas da álgebra linear. A base canônica e os eixos coordenados canônicos associados, xyz, não são sempre a melhor escolha. Como mostra a Figura 1(b), neste caso $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é provavelmente uma escolha de base para $\mathbb{R}^3$ melhor que a base canônica, uma vez que esses vetores se alinham perfeitamente com as ligações entre os átomos de zinco.

Matrizes de Mudança de Base

A Figura 2 mostra dois sistemas de coordenadas diferentes para $\mathbb{R}^2$, cada um se originando de uma base diferente. A Figura 2(a) mostra o sistema de coordenadas relativo à base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, enquanto o da Figura 2(b) se origina da base $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

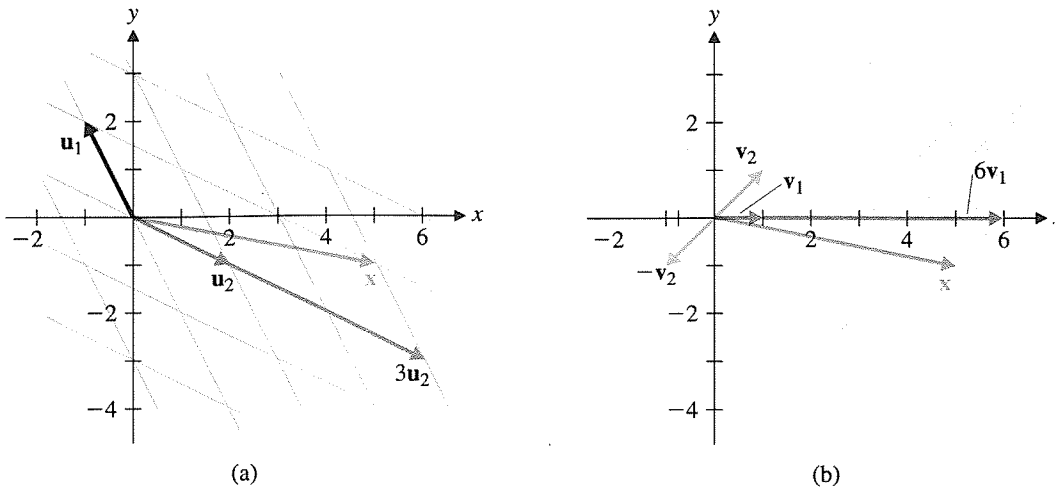


Figura 2

O mesmo vetor $\mathbf{x}$ é mostrado relativamente a cada sistema de coordenadas. Fica claro, pelos diagramas, que os vetores de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativos às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Conseqüentemente, existe uma conexão direta entre os dois vetores de coordenadas. Uma maneira de encontrar essa relação é usar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para calcular

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então podemos encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ escrevendo $\mathbf{x}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Entretanto, existe uma maneira melhor de proceder — uma que nos dará um método geral para lidar com tais problemas. O próximo exemplo ilustra esse enfoque.

EXEMPLO 1 Usando as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ acima, encontre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$, sabendo que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Uma vez que $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$, escrevendo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ em termos de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ obtemos as coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação a $\mathcal{C}$, como pedido. Encontramos

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 \\ &= (-3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) + 3(3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= 6\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Isso nos dá

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \text{[redacted]} \\ -1 \end{bmatrix} \quad 6$$

o que está de acordo com a Figura 2(b). ◆

Esse método pode não parecer nem um pouco mais fácil que o sugerido antes do Exemplo 1, mas tem uma grande vantagem: agora podemos encontrar $[\mathbf{y}]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ para *qualquer* vetor $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^2$, com muito pouco trabalho adicional. Vamos examinar de um ponto de vista diferente os cálculos feitos no Exemplo 1. A partir de $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$, temos

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} + 3[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}$$

pelo Teorema 3 da Seção 6.3. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} &= [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}\,[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

onde P é a matriz cujas colunas são $[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}$ e $[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}$. Esse procedimento pode muito bem ser generalizado.

Definição Sejam $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para um espaço vetorial V. A matriz $n \times n$, cujas colunas são os vetores de coordenadas $[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}$ dos vetores de $\mathcal{B}$ em relação à base $\mathcal{C}$, é denotada por $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ e é chamada de ***matriz de mudança de base*** de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ — isto é,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}\,[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}]$$

Pense em $\mathcal{B}$ como a base "antiga" e em $\mathcal{C}$ como a base "nova". Com isso, as colunas de $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ são somente os vetores de coordenadas obtidos aos escrevermos os vetores da base antiga em termos dos novos. O Teorema 1 mostra que o Exemplo 1 é um caso especial de um resultado geral.

◆ TEOREMA 1

Sejam $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para um espaço vetorial V, e seja $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$. Então:

a. $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ em V.
b. $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ é a única matriz P com a propriedade $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ em V.
c. $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ é invertível e $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Seja $\mathbf{x}$ um elemento de V e seja

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Ou seja, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$. Então:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} &= [c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + c_n[\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

(b) Suponha que P seja uma matriz $n \times n$ com a propriedade de $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ em V. Tomando $\mathbf{x} = \mathbf{u}_i$, o i-ésimo vetor da base $\mathcal{B}$, vemos que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_i$, portanto, a i-ésima coluna de P é

$$\mathbf{p}_i = P\mathbf{e}_i = P[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{C}}$$

que é, por definição, a i-ésima coluna de $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. Segue que $P = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

(c) Uma vez que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é linearmente independente em V, o conjunto $\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^n$, pelo Teorema 4 da Seção 6.3. Portanto, pelo Teorema Fundamental, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}]$ é invertível.

Para todo $\mathbf{x}$ em V, temos $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Resolvendo par a$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, obtemos

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$$

para todo $\mathbf{x}$ em V. Portanto, $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}$ é uma matriz que muda a base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$. Assim, pela propriedade da unicidade (b), devemos ter $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. ◆

Observações:

- Você pode pensar na mudança de base como uma transformação (sem dúvida, é uma transformação linear) de $\mathbb{R}^n$ para ele mesmo, que simplesmente faz a troca de um sistema de coordenadas para outro. A transformação correspondente à matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ aceita $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$

como dado de entrada e retorna $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ como resultado; $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ faz justamente o oposto. A Figura 3 dá uma representação esquemática do processo.

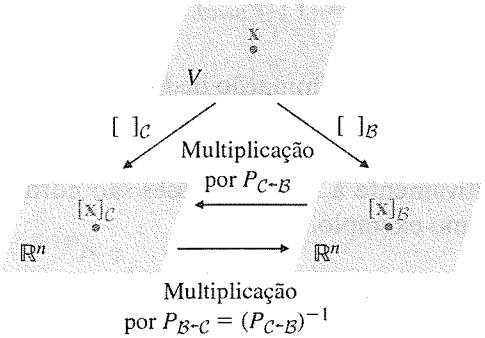


Figura 3 Mudança de base

- As colunas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ são os vetores de coordenadas de uma base relativamente à outra. Para lembrar qual base é qual, pense na notação $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$ como "$\mathcal{B}$ em termos de $\mathcal{C}$". Também ajuda lembrar que $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ é uma combinação linear das colunas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$; mas, uma vez que o resultado dessa combinação é $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$, as colunas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ devem ser os vetores de coordenadas em relação à base $\mathcal{C}$.

EXEMPLO 2 Encontre as matrizes de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ e $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ para as bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$. A partir daí, encontre o vetor de coordenadas de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ relativo à base $\mathcal{C}$.

SOLUÇÃO: Mudar *para* a base canônica é fácil, portanto, encontraremos $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ primeiramente. Observe que os vetores de coordenadas de $\mathcal{C}$ em termos de $\mathcal{B}$ são

$$[1 + x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [x + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [1 + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Reveja a Observação que aparece após o Exemplo 5 da Seção 6.3.) Com isso,

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, poderíamos escrever cada vetor de $\mathcal{B}$ como uma combinação linear dos vetores em $\mathcal{C}$ (faça isso), mas é muito mais fácil usar o fato de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1}$, pelo Teorema 1(c). Obtemos

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora,

$$\begin{aligned} [p(x)]_{\mathcal{C}} &= P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que está de acordo com o Exemplo 16 da Seção 6.3.

Observação: ◆ Se não precisamos de $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ explicitamente, podemos encontrar $[p(x)]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ e de $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ usando eliminação gaussiana. A redução nas linhas produz

$$[P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \mid [p(x)]_{\mathcal{B}}] \longrightarrow [I \mid (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1}[p(x)]_{\mathcal{B}}] = [I \mid P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[p(x)]_{\mathcal{B}}] = [I \mid [p(x)]_{\mathcal{C}}]$$

(Veja na próxima seção como usar a eliminação de Gauss-Jordan.)

Vale a pena repetir a observação feita no Exemplo 2: mudar *para* a base canônica é fácil. Se $\mathcal{E}$ é a base canônica de um espaço vetorial V e $\mathcal{B}$ é uma outra base qualquer, então as colunas de $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ são os vetores de coordenadas de $\mathcal{B}$ relativamente à base $\mathcal{E}$, e esses são normalmente "visíveis". Faremos uso desta observação novamente no próximo exemplo.

EXEMPLO 3 Em M_{22}, seja $\mathcal{B}$ a base $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ e seja $\mathcal{C}$ a base $\{A, B, C, D\}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ e verifique que $[X]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[X]_{\mathcal{B}}$ para $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO 1: Para resolver esse problema diretamente, devemos encontrar os vetores de coordenadas de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{C}$. Isso envolve a solução de quatro problemas de combinação linear da forma $X = aA + bB + cC + dD$, onde X está em $\mathcal{B}$ e devemos encontrar a, b, c e d. No entanto, estamos com sorte, pois neste caso podemos encontrar por inspeção os coeficientes pedidos.

Claramente, $E_{11} = A$, $E_{21} = -B + C$, $E_{12} = -A + B$ e $E_{22} = -C + D$. Assim,

$$[E_{11}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [E_{21}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [E_{12}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [E_{22}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

portanto

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[E_{11}]_{\mathcal{C}} \quad [E_{21}]_{\mathcal{C}} \quad [E_{12}]_{\mathcal{C}} \quad [E_{22}]_{\mathcal{C}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esse é o vetor de coordenadas, em relação à base $\mathcal{C}$, da matriz

$$\begin{aligned} -A - B - C + 4D &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = X \end{aligned}$$

como deveria ser.

SOLUÇÃO 2: Podemos calcular $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de maneira diferente, como a seguir. No Exercício 21, será pedido que você prove o seguinte: se $\mathcal{E}$ é uma outra base para M_{22}, então $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1}P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$. Se $\mathcal{E}$ é a base canônica, então $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ e $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ podem ser encontradas por inspeção. Temos

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Você vê o porquê?) Portanto,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1}P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que está de acordo com a primeira solução. ◆

Observação:

- O segundo método tem a vantagem de não exigir o cálculo de nenhuma combinação linear; a desvantagem é que requer que encontremos a inversa de uma matriz. Entretanto, usar um CAS facilita na hora de determinar a matriz inversa. Concluímos que, em geral, o segundo método é preferível ao primeiro. Se bem que, para alguns problemas, o primeiro método pode ser tão fácil de aplicar quanto o segundo. De qualquer forma, vamos descrever uma terceira abordagem, que possivelmente será a melhor.

O Método de Gauss-Jordan para o Cálculo de uma Matriz de Mudança de Base

Encontrar a matriz de mudança de base *para** uma base canônica é fácil, e pode ser feito por inspeção. Encontrar a matriz de mudança de base *a partir*** *de* uma base canônica é quase tão fácil quanto, mas exige o cálculo da inversa de uma matriz, como no Exemplo 2. Se fizermos isso à mão, normalmente acharemos (exceto para o caso 2×2) a inversa pela eliminação de Gauss-Jordan. Vamos agora considerar uma modificação do método de Gauss-Jordan, que pode ser usada para encontrar a matriz de mudança de base entre duas bases não canônicas, como no Exemplo 3.

Suponha que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sejam bases para um espaço vetorial V, e $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$. A i-ésima coluna de P é

$$[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$$

* N.T.: O itálico é do tradutor.
** N.T.: O itálico é do tradutor.

portanto, $\mathbf{u}_i = p_{1i}\mathbf{v}_1 + \ldots + p_{ni}\mathbf{v}_n$. Se $\mathcal{E}$ é uma base qualquer de V, então

$$[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{E}} = [p_{1i}\mathbf{v}_1 + \cdots + p_{ni}\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}} = p_{1i}[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} + \cdots + p_{ni}[\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}}$$

Em forma de matriz, isso pode ser reescrito como

$$[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}}]\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{E}}$$

que podemos resolver aplicando a eliminação de Gauss-Jordan à matriz aumentada

$$[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{E}}]$$

Existem n sistemas de equações desse tipo para serem resolvidos, um para cada coluna de $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$, mas *a matriz de coeficientes* $[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}}]$ *é a mesma em cada caso.* Portanto, podemos resolver todos os sistemas simultaneamente ao aplicarmos a redução por linha à matriz aumentada $n \times 2n$

$$[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} \quad \cdots \quad [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{E}}] = [C \mid B]$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente, pelo Teorema 4 da Seção 6.3, $\{[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}}, \ldots, [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}}\}$ também o é. Portanto, a matriz C, cujas colunas são $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}}, \ldots, [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}}$, tem a matriz-identidade $n \times n$, I, como sua forma escalonada reduzida por linha, pelo Teorema Fundamental. Segue que a eliminação de Gauss-Jordan irá necessariamente produzir

$$[C \mid B] \rightarrow [I \mid P]$$

onde $P = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Acabamos de provar o seguinte teorema:

◆ TEOREMA 2

Sejam $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para um espaço vetorial V. Sejam $B = [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} \ldots [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{E}}]$ e $C = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \ldots [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}}]$, onde $\mathcal{E}$ é uma base qualquer de V. Então, aplicando-se redução por linha à matriz aumentada $n \times 2n$, $[C \mid B]$, obtemos

$$[C \mid B] \rightarrow [I \mid P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}]$$

Se $\mathcal{E}$ é uma base canônica, esse método é particularmente fácil de usar, uma vez que, neste caso, $B = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ e $C = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$. Vamos ilustrar esse método refazendo o problema do Exemplo 3.

EXEMPLO 4 Refaça o Exemplo 3 usando o método de Gauss-Jordan.

SOLUÇÃO: Tomando $\mathcal{E}$ como a base canônica para M_{22}, vemos que

$$B = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A redução por linhas produz

$$[C \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(Verifique.) Com isso,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como encontramos anteriormente.

◆ EXERCÍCIOS 6.4 ◆

Nos Exercícios de 1 a 4:

(a) Encontre os vetores de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ *e* $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ *de* $\mathbf{x}$ *relativos às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$*, respectivamente.*

(b) Encontre a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ *de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$.

(c) Use sua resposta à parte (b) para calcular $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$*, e compare sua resposta com a encontrada na parte (a).*

(d) Encontre a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ *de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{B}$.

(e) Use suas respostas às partes (c) e (d) para calcular $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$*, e compare sua resposta com a encontrada na parte (a).*

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ em $\mathbb{R}^2$

2. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ em $\mathbb{R}^2$

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$

$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ em $\mathbb{R}^3$

4. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\},$

$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ em $\mathbb{R}^3$

Nos Exercícios de 5 a 8, siga as mesmas instruções dadas para os Exercícios de 1 a 4, usando $p(x)$ *no lugar de* $\mathbf{x}$.

5. $p(x) = 2 - x, \mathcal{B} = \{1, x\}, \mathcal{C} = \{x, 1 + x\}$ em $\mathcal{P}_1$

6. $p(x) = 1 + 3x, \mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\}, \mathcal{C} = \{2x, 4\}$ em $\mathcal{P}_1$

7. $p(x) = 1 + x^2, \ \mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}, \ \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ em $\mathcal{P}_2$

8. $p(x) = 4 - 2x - x^2, \ \mathcal{B} = \{x, 1 + x^2, x + x^2\}, \ \mathcal{C} = \{1, 1 + x, x^2\}$ em $\mathcal{P}_2$

Nos Exercícios 9 e 10, siga as mesmas instruções dadas para os Exercícios de 1 a 4, usando A no lugar de $\mathbf{x}$.

9. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} =$ a base canônica

$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ em M_{22}

10.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\},$

$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ em M_{22}

Nos Exercícios 11 e 12, siga as mesmas instruções dadas para os Exercícios de 1 a 4, usando $f(x)$ *no lugar de* $\mathbf{x}$.

11. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x, \ \mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x + \cos x, \cos x\}$, $\mathcal{C} = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ em $\operatorname{ger}(\operatorname{sen} x, \cos x)$

12. $f(x) = \operatorname{sen} x, \mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x + \cos x, \cos x\}, \mathcal{C} = \{\cos x - \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x + \cos x\}$ em $\operatorname{ger}(\operatorname{sen} x, \cos x)$

13. Rotacione os eixos coordenados xy por um ângulo $\theta = 60°$ no plano, no sentido anti-horário, para obter novos eixos coordenados $x'y'$. Use os métodos desta seção para encontrar (a) as coordenadas $x'y'$ do ponto cujas coordenadas xy são (3, 2) e (b) as coordenadas xy do ponto cujas coordenadas $x'y'$ são (4, −4).

14. Repita o Exercício 13 com $\theta = 135°$.

15. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Se $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$ e a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ é

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

encontre $\mathcal{B}$.

16. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathcal{P}_2$. Se $\mathcal{B} = \{x, 1 + x, 1 - x + x^2\}$ e a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ é

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

encontre $\mathcal{C}$.

Em Cálculo, você aprende que um ***polinômio de Taylor de grau n ao redor de um ponto a*** *é um polinômio da forma*

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n$$

onde $a_n \neq 0$. Em outras palavras, é um polinômio cuja expansão se dá em termos de potências de $x - a$, em vez de potências de x. Os polinômios de Taylor são muito úteis para aproximar funções que são "bem comportadas" perto de $x = a$.

O conjunto $\mathcal{B} = \{1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n\}$ é uma base para $\mathcal{P}_n$ para qualquer número real a. *(Você vê uma maneira rápida de provar isso? Tente usar o Teorema 4 da Seção 6.3.) Esse fato nos permite usar as técnicas desta seção para reescrever um polinômio como um polinômio de Taylor ao redor de um ponto* a *dado.*

17. Expresse $p(x) = 1 + 2x - 5x^2$ na forma de um polinômio de Taylor ao redor de $a = 1$.

18. Expresse $p(x) = 1 + 2x - 5x^2$ na forma de um polinômio de Taylor ao redor de $a = -2$.

19. Expresse $p(x) = x^3$ na forma de um polinômio de Taylor ao redor de $a = -1$.

20. Expresse $p(x) = x^3$ na forma de um polinômio de Taylor ao redor de $a = \frac{1}{2}$.

21. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de um espaço vetorial V de dimensão finita. Prove que

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$$

22. Seja V um espaço vetorial n-dimensional com base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Seja P uma matriz invertível $n\times n$, e tome

$$\mathbf{u}_i = p_{1i}\mathbf{v}_1 + \cdots + p_{ni}\mathbf{v}_n$$

para $i = 1, \ldots, n$. Prove que $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base de V e mostre que $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

6.5 Transformações Lineares

Na Seção 3.6, vimos as transformações lineares no contexto das transformações matriciais de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$. Nesta seção, estenderemos esse conceito para transformações lineares entre espaços vetoriais arbitrários.

Definição Uma ***transformação linear*** de um espaço vetorial V para um espaço vetorial W é uma aplicação $T: V \to W$ tal que, para todo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e para todos os escalares c,

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$

É imediato provar que essa definição é equivalente a exigir que T preserve todas as combinações lineares — isto é,

$T: V \to W$ é uma transformação linear se, e somente se,

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_kT(\mathbf{v}_k)$$

para todo $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ em V e escalares $c_1, \ldots, c_k$.

EXEMPLO 1 Toda transformação matricial é uma transformação linear. Isto é, se A é uma matriz $m \times n$, então a transformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{para} \quad \mathbf{x} \text{ em } \mathbb{R}^n$$

é uma transformação linear. Isso nos dá um outro enunciado para o Teorema 1 da Seção 3.6, sob esse novo enfoque. ◆

EXEMPLO 2 Defina $T: M_{nn} \to M_{nn}$ por $T(A) = A^T$. Prove que T é uma transformação linear.

SOLUÇÃO: Verificamos a afirmação para A e B em M_{nn} e escalares c,

$$T(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$

e

$$T(cA) = (cA)^T = cA^T = cT(A)$$

Portanto, T é uma transformação linear. ◆

EXEMPLO 3 Seja D o ***operador diferencial*** $D: \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ definido por $D(f) = f'$. Prove que D é uma transformação linear.

SOLUÇÃO: Sejam f e g funções diferenciáveis e c, um escalar. Então, de Cálculo, sabemos que

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$

e

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f)$$

Dessa forma, D é uma transformação linear. ◆

Em Cálculo, você aprende que toda função contínua definida no intervalo $[a, b]$ é integrável. O próximo exemplo mostra que a integração é uma transformação linear.

EXEMPLO 4 Defina $S: \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}$ por $S(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Prove que S é uma transformação linear.

SOLUÇÃO: Sejam f e g em $\mathcal{C}[a, b]$. Então:

$$\begin{aligned} S(f + g) &= \int_a^b (f + g)(x)\,dx \\ &= \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ &= S(f) + S(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(cf) &= \int_a^b (cf)(x)\,dx \\ &= \int_a^b cf(x)\,dx \\ &= c\int_a^b f(x)\,dx \\ &= cS(f) \end{aligned}$$

Portanto, S é linear.

EXEMPLO 5 Prove que nenhuma das transformações a seguir é linear:
(a) $T: M_{22} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \det A$
(b) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = 2^x$
(c) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x + 1$

SOLUÇÃO: Em cada caso, damos um contra-exemplo específico para provar que uma das propriedades de uma transformação linear não se verifica.

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, portanto,

$$T(A + B) = \det(A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Mas

$$T(A) + T(B) = \det A + \det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

portanto, $T(A + B) \neq T(A) + T(B)$ e T não é linear.
(b) Seja $x = 1$ e $y = 2$. Então:

$$T(x + y) = T(3) = 2^3 = 8 \neq 6 = 2^1 + 2^2 = T(x) + T(y)$$

por isso T não é linear.
(c) Seja $x = 1$ e $y = 2$. Então:

$$T(x + y) = T(3) = 3 + 1 = 4 \neq 5 = (1 + 1) + (2 + 1) = T(x) + T(y)$$

Portanto, T não é linear.

Observação:

- O Exemplo 5(c) mostra que você deve ser cuidadoso quando depara com a palavra "linear". Vista como uma *função*, $T(x) = x + 1$ é linear, pois seu gráfico é uma reta. Entretanto, ela não é uma *transformação linear* do espaço vetorial $\mathbb{R}$ nele mesmo, pois não satisfaz a definição. (Quais funções lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ também serão transformações lineares?)

Existem duas transformações lineares especiais que merecem ser destacadas.

EXEMPLO 6 (a) Para quaisquer espaços vetoriais V e W, a transformação $T_0: V \to W$ que leva qualquer vetor de V no vetor nulo de W é conhecida como ***transformação nula*** — isto é,

$$T_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ para todo } \mathbf{v} \text{ em } V$$

(b) Para qualquer espaço vetorial V, a transformação $I: V \to V$ que leva cada vetor de V em si mesmo é chamada de ***transformação identidade*** — isto é,

$$I(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{ para todo } \mathbf{v} \text{ em } V$$

(Se for importante identificar o espaço vetorial V, escreveremos I_V para maior clareza.) As demonstrações de que as transformações nula e identidade são lineares foram deixadas como exercícios. ◆

Propriedades das Transformações Lineares

No Capítulo 3, todas as transformações lineares eram transformações matriciais, e suas propriedades estavam diretamente relacionadas com as propriedades das matrizes envolvidas. O teorema a seguir é fácil de provar para transformações matriciais. (Prove-o!) A demonstração completa, para transformações lineares em geral, precisa de um pouco mais de cuidado, mas ainda assim é direta.

◆ TEOREMA 1

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então:

(a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
(b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v}$ em V.
(c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos as propriedades (a) e (c), e deixaremos a demonstração da propriedade (b) para o Exercício 21.

(a) Seja $\mathbf{v}$ um vetor qualquer em V. Então, $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, como queríamos. (Você pode justificar cada uma das passagens?)
(c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + (-1)T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$. ◆

Observação:
- A propriedade (a) pode ser útil para provar que certas transformações *não* são lineares. Para ver como a usamos dessa forma, considere o Exemplo 5(b). Se $T(x) = 2^x$, então $T(0) = 2^0 = 1 \neq 0$, e, conseqüentemente, T não é linear, pelo Teorema 1(a). Mas fique alerta: existem muitas transformações que *de fato* levam o vetor nulo no vetor nulo, mas, ainda assim, *não* são lineares. O Exemplo 5(a) ilustra esse caso: o vetor nulo é a matriz nula 2×2, O, portanto, $T(O) = \det O = 0$, mas já vimos que $T(A) = \det A$ não é linear.

A propriedade mais importante de uma transformação linear $T: V \to W$ é que T fica completamente determinada pelo seu efeito em uma base de V. O próximo exemplo mostra o que isso significa.

EXEMPLO 7 Suponha que T seja uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_2$ tal que

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 2 - 3x + x^2 \quad \text{e} \quad T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = 1 - x^2$$

Encontre $T\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Como $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ (por quê?), todo vetor de $\mathbb{R}^2$ pertence ao conjunto ger($\mathcal{B}$). Resolvendo

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

obtemos $c_1 = -7$ e $c_2 = 3$. Portanto,

$$\begin{aligned}T\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} &= T\left(-7\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)\\ &= -7T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 3T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\\ &= -7(2 - 3x + x^2) + 3(1 - x^2)\\ &= -11 + 21x - 10x^2\end{aligned}$$

De maneira similar, descobrimos que

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = (3a - 2b)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (b - a)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

portanto,

$$\begin{aligned}T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} &= T\left((3a - 2b)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (b - a)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)\\ &= (3a - 2b)T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (b - a)T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\\ &= (3a - 2b)(2 - 3x + x^2) + (b - a)(1 - x^2)\\ &= (5a - 3b) + (-9a + 6b)x + (4a - 3b)x^2\end{aligned}$$

(Observe que, tomando $a = -1$ e $b = 2$, recuperamos a solução $T\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = -11 + 21x - 10x^2$.) ◆

A demonstração do teorema geral é imediata.

◆ TEOREMA 2

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, e seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto gerador de V. Então, $T(\mathcal{B}) = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ gera a imagem de T.

DEMONSTRAÇÃO: A imagem de T é o conjunto de todos os vetores de W que são da forma $T(\mathbf{v})$, onde $\mathbf{v}$ é um elemento de V. Seja $T(\mathbf{v})$ na imagem de T. Uma vez que $\mathcal{B}$ gera V, existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ tais que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Aplicando T e usando o fato de ser uma transformação linear, vemos que

$$T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

Em outras palavras, $T(\mathbf{v})$ pertence ao $\text{ger}(T(\mathcal{B}))$, como exigido. ◆

O Teorema 2 se aplica, em particular, quando $\mathcal{B}$ é uma base de V. Você pode estar conjecturando que, neste caso, $T(\mathcal{B})$ seria uma base para a imagem de T. Infelizmente, isso não é sempre verdade. Vamos tratar desse assunto na Seção 6.6.

Composição de Transformações Lineares

Na Seção 3.6, definimos a composição de transformações matriciais. A definição se estende de maneira óbvia para transformações lineares em geral.

Definição Se $T : U \to V$ e $S : V \to W$ são transformações lineares, a ***composição de S com T*** é a aplicação $S \circ T$[2] definida por

$$(S \circ T)(\mathbf{u}) = S(T(\mathbf{u}))$$

onde $\mathbf{u}$ é um elemento de U.

Observe que $S \circ T$ é uma aplicação de U em W (veja a Figura 1). Note também que, para a definição fazer sentido, a imagem de T deve estar contida no domínio de S.

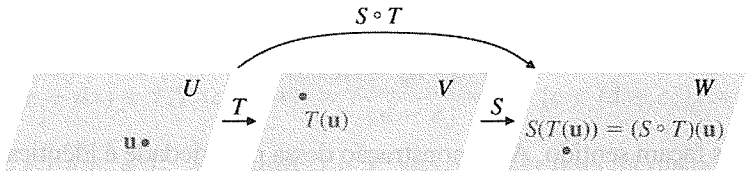


Figura 1 Composição de transformações lineares

EXEMPLO 8 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ e $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ transformações lineares definidas por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x \quad \text{e} \quad S(p(x)) = xp(x)$$

Encontre $(S \circ T)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Calculamos

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = S(3 + (3 - 2)x) = S(3 + x) = x(3 + x) = 3x + x^2$$

e

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = S(a + (a + b)x) = x(a + (a + b)x) = ax + (a + b)x^2$$

◆

No Capítulo 3, mostramos que a composição de duas transformações matriciais era uma outra transformação matricial. Em geral, temos o seguinte teorema:

◆ TEOREMA 3

Se $T : U \to V$ e $S : V \to W$ são transformações lineares, então $S \circ T : U \to W$ é uma transformação linear.

---

[2] S ∘ T: lê-se "S composta com T".

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em U e seja c um escalar. Então:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= S(T(\mathbf{v} + \mathbf{w})) \\ &= S(T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})) && \text{Pois } T \text{ é linear} \\ &= S(T(\mathbf{v})) + S(T(\mathbf{w})) && \text{Pois } S \text{ é linear} \\ &= (S \circ T)(\mathbf{v}) + (S \circ T)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(S \circ T)(c\mathbf{v}) &= S(T(c\mathbf{v})) \\ &= S(cT(\mathbf{v})) && \text{Pois } T \text{ é linear} \\ &= cS(T(\mathbf{v})) && \text{Pois } S \text{ é linear} \\ &= c(S \circ T)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Portanto, $S \circ T$ é uma transformação linear. ◆

As propriedades algébricas das transformações lineares espelham as das transformações matriciais, as quais, por sua vez, estão relacionadas com as propriedades algébricas das matrizes. Por exemplo, a composição de transformações lineares é associativa — isto é, se R, S e T são transformações lineares, então

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

desde que essas composições façam sentido. A demonstração dessa propriedade é idêntica à mostrada na Seção 3.6.

O próximo exemplo nos mostra outra propriedade útil (mas não surpreendente) das transformações lineares.

EXEMPLO 9 Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares, e seja $I : V \to V$ a transformação identidade. Então, para cada $\mathbf{v}$ em V, temos

$$(T \circ I)(\mathbf{v}) = T(I(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})$$

Uma vez que $T \circ I$ e T têm o mesmo valor em cada $\mathbf{v}$ de seu domínio, segue que $T \circ I = T$. De maneira similar, $I \circ S = S$. ◆

Observação:

- Vale a pena prestar atenção ao método utilizado no Exemplo 9. Suponha que queiramos provar que duas transformações lineares (ambas de V em W) T_1 e T_2 são iguais. É suficiente provar que $T_1(\mathbf{v}) = T_2(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v}$ de V.

Outras propriedades das transformações lineares serão exploradas nos exercícios.

A Inversa de Transformações Lineares

Definição Uma transformação linear $T : V \to W$ é ***invertível*** se existe uma transformação linear $T' : W \to V$ tal que

$$T' \circ T = I_V \quad \text{e} \quad T \circ T' = I_W$$

Nesse caso, T' é uma ***inversa*** de T.

Observações:

- O domínio V e o contradomínio W de T não têm de ser os mesmos, como no caso das transformações matriciais invertíveis. Entretanto, como veremos na próxima seção, V e W devem ser intimamente relacionados.

Composição de Transformações Lineares

Na Seção 3.6, definimos a composição de transformações matriciais. A definição se estende de maneira óbvia para transformações lineares em geral.

Definição Se $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares, a ***composição de S com T*** é a aplicação $S \circ T$[2] definida por

$$(S \circ T)(\mathbf{u}) = S(T(\mathbf{u}))$$

onde $\mathbf{u}$ é um elemento de U.

Observe que $S \circ T$ é uma aplicação de U em W (veja a Figura 1). Note também que, para a definição fazer sentido, a imagem de T deve estar contida no domínio de S.

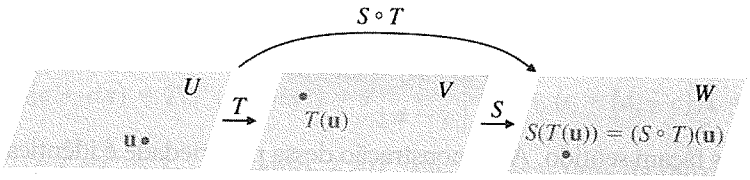


Figura 1 Composição de transformações lineares

EXEMPLO 8 Sejam $T: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ e $S: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ transformações lineares definidas por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x \quad \text{e} \quad S(p(x)) = xp(x)$$

Encontre $(S \circ T)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Calculamos

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = S(3 + (3 - 2)x) = S(3 + x) = x(3 + x) = 3x + x^2$$

e

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = S(a + (a + b)x) = x(a + (a + b)x) = ax + (a + b)x^2$$

◆

No Capítulo 3, mostramos que a composição de duas transformações matriciais era uma outra transformação matricial. Em geral, temos o seguinte teorema:

◆ **TEOREMA 3**

Se $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares, então $S \circ T: U \to W$ é uma transformação linear.

---

2 $S \circ T$: lê-se "S composta com T".

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em U e seja c um escalar. Então:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= S(T(\mathbf{v} + \mathbf{w})) \\ &= S(T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})) && \text{Pois } T \text{ é linear} \\ &= S(T(\mathbf{v})) + S(T(\mathbf{w})) && \text{Pois } S \text{ é linear} \\ &= (S \circ T)(\mathbf{v}) + (S \circ T)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(S \circ T)(c\mathbf{v}) &= S(T(c\mathbf{v})) \\ &= S(cT(\mathbf{v})) && \text{Pois } T \text{ é linear} \\ &= cS(T(\mathbf{v})) && \text{Pois } S \text{ é linear} \\ &= c(S \circ T)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Portanto, $S \circ T$ é uma transformação linear. ◆

As propriedades algébricas das transformações lineares espelham as das transformações matriciais, as quais, por sua vez, estão relacionadas com as propriedades algébricas das matrizes. Por exemplo, a composição de transformações lineares é associativa — isto é, se R, S e T são transformações lineares, então

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

desde que essas composições façam sentido. A demonstração dessa propriedade é idêntica à mostrada na Seção 3.6.

O próximo exemplo nos mostra outra propriedade útil (mas não surpreendente) das transformações lineares.

EXEMPLO 9 Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares, e seja $I : V \to V$ a transformação identidade. Então, para cada $\mathbf{v}$ em V, temos

$$(T \circ I)(\mathbf{v}) = T(I(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})$$

Uma vez que $T \circ I$ e T têm o mesmo valor em cada $\mathbf{v}$ de seu domínio, segue que $T \circ I = T$. De maneira similar, $I \circ S = S$. ◆

Observação:

- Vale a pena prestar atenção ao método utilizado no Exemplo 9. Suponha que queiramos provar que duas transformações lineares (ambas de V em W) T_1 e T_2 são iguais. É suficiente provar que $T_1(\mathbf{v}) = T_2(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v}$ de V.

Outras propriedades das transformações lineares serão exploradas nos exercícios.

A Inversa de Transformações Lineares

Definição Uma transformação linear $T : V \to W$ é ***invertível*** se existe uma transformação linear $T' : W \to V$ tal que

$$T' \circ T = I_V \quad \text{e} \quad T \circ T' = I_W$$

Nesse caso, T' é uma ***inversa*** de T.

Observações:

- O domínio V e o contradomínio W de T não têm de ser os mesmos, como no caso das transformações matriciais invertíveis. Entretanto, como veremos na próxima seção, V e W devem ser intimamente relacionados.

- A necessidade de T' ser linear poderia ser omitida dessa definição. Como veremos no Teorema 7 da Seção 6.6, se T' é uma aplicação *qualquer* de W a V tal que $T' \circ T = I_V$ e $T \circ T' = I_W$, então T' é forçosamente linear.
- Se T' é uma inversa para T, então a definição implica que T é uma inversa para T'. Dessa forma, T' é invertível também.

EXEMPLO 10 Verifique se as aplicações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ e $T' : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x \quad \text{e} \quad T'(c + dx) = \begin{bmatrix} c \\ d - c \end{bmatrix}$$

são inversas uma da outra.

SOLUÇÃO: Calculamos

$$(T' \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T'\left(T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = T'(a + (a + b)x) = \begin{bmatrix} a \\ (a + b) - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e

$$(T \circ T')(c + dx) = T(T'(c + dx)) = T\begin{bmatrix} c \\ d - c \end{bmatrix} = c + (c + (d - c))x = c + dx$$

Dessa forma, $T' \circ T = I_{\mathbb{R}^2}$ e $T \circ T' = I_{\mathcal{P}_1}$. Portanto, T e T' são inversas uma da outra. ◆

Assim como no caso das matrizes invertíveis, a inversa de uma transformação linear, quando existe, é única. O teorema a seguir é o análogo ao Teorema 1 da Seção 3.4.

◆ TEOREMA 4

Se T é uma transformação linear invertível, então sua inversa é única.

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é a mesma do Teorema 1 da Seção 3.4, com a composição de transformações lineares no lugar do produto de matrizes. (Pediremos para você completar essa demonstração no Exercício 31.) ◆

Graças ao Teorema 4, se T é invertível, podemos nos referir *à* inversa de T. Ela será denotada por T^{-1} (chamada de "T inversa"). Nas próximas duas seções, vamos determinar quando uma transformação linear é invertível e encontrar sua inversa, quando ela existir.

◆ EXERCÍCIOS 6.5 ◆

Nos Exercícios de 1 a 12, determine se T é uma transformação linear.

1. $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c + d \end{bmatrix}$

2. $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a - d \\ b - c & 1 \end{bmatrix}$

3. $T : M_{nn} \to M_{nn}$ definida por $T(A) = AB$, onde B é uma matriz $n \times n$ fixa

4. $T : M_{nn} \to M_{nn}$ definida por $T(A) = AB - BA$, onde B é uma matriz $n \times n$ fixa

5. $T : M_{nn} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \text{tr}(A)$

6. $T : M_{nn} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$

7. $T : M_{nn} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \text{posto}(A)$

8. $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2$

9. $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(a + bx + cx^2) = a + b(x + 1) + b(x + 1)^2$

10. $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definida por $T(f) = f(x^2)$

11. $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definida por $T(f) = (f(x))^2$

12. $T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(c)$, onde c é um escalar fixado

13. Prove que as transformações S e T do Exemplo 8 são lineares.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear para a qual

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$$

Calcule $T\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear para a qual

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1 - 2x \quad \text{e} \quad T\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = x + 2x^2$$

Calcule $T\begin{bmatrix}-7\\9\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

16. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear para a qual

$$T(1) = 3 - 2x, \quad T(x) = 4x - x^2, \quad T(x^2) = 2 + 2x^2$$

Calcule $T(6 + x - 4x^2)$ e $T(a + bx + cx^2)$.

17. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear para a qual

$$T(1 + x) = 1 + x^2, \quad T(x + x^2) = x - x^2,$$
$$T(1 + x^2) = 1 + x + x^2$$

Calcule $T(4 - x + 3x^2)$ e $T(a + bx + cx^2)$.

18. Seja $T : M_{22} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear para a qual

$$T\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = 1, \quad T\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = 2,$$
$$T\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, \quad T\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = 4$$

Calcule $T\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$.

19. Seja $T : M_{22} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear. Prove que existem escalares a, b, c e d tais que

$$T\begin{bmatrix}w & x\\y & z\end{bmatrix} = aw + bx + cy + dz$$

para qualquer $\begin{bmatrix}w & x\\y & z\end{bmatrix}$ em M_{22}.

20. Prove que não existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to M_{22}$ tal que

$$T\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = 1 + x, \quad T\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix} = 2 - x + x^2,$$
$$T\begin{bmatrix}0\\6\\-8\end{bmatrix} = -2 + 2x^2$$

21. Prove o Teorema 1(b).

22. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V, e seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Prove que, se $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$, T é a transformação identidade em V.

23. Seja $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ uma transformação linear tal que $T(x^k) = kx^{k-1}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Prove que T é o operador diferencial D.

24. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores em um espaço vetorial V, e seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

(a) Se $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é linearmente independente em W, prove que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente em V.

(b) Prove que a recíproca da parte (a) é falsa — isto é, não é necessariamente verdade que, se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente em V, então $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é linearmente independente em W. Ilustre essa afirmação, dando um exemplo de uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

25. Defina as transformações lineares $S : \mathbb{R}^2 \to M_{22}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$S\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b & b\\0 & a - b\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2c + d\\-d\end{bmatrix}$$

Calcule $(S \circ T)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ e $(S \circ T)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. Você consegue calcular $(T \circ S)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$? Em caso afirmativo, calcule.

26. Sejam as transformações lineares $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ e $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ definidas por

$$S(a + bx) = a + (a + b)x + 2bx^2$$

e

$$T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

Calcule $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$ e $(S \circ T)(a + bx + cx^2)$. Você consegue calcular $(T \circ S)(a + bx)$? Em caso afirmativo, calcule.

27. Sejam as transformações lineares $S : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ e $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definidas por

$$S(p(x)) = p(x + 1) \quad \text{e} \quad T(p(x)) = p'(x)$$

Calcule $(S \circ T)(p(x))$ e $(T \circ S)(p(x))$. (*Sugestão:* use a Regra da Cadeia.)

28. Sejam as transformações lineares $S : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ e $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definidas por

$$S(p(x)) = p(x+1) \quad \text{e} \quad T(p(x)) = xp'(x)$$

Calcule $(S \circ T)(p(x))$ e $(T \circ S)(p(x))$.

Nos Exercícios 29 e 30, verifique que S e T são inversas uma da outra.

29. $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + y \\ 3x + y \end{bmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ -3x + 4y \end{bmatrix}$

30. $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por $S(a + bx) = (-4a + b) + 2ax$ e $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por $T(a + bx) = b/2 + (a + 2b)x$

31. Prove o Teorema 4.

32. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = I$.

(a) Prove que $\{\mathbf{v}, T(\mathbf{v})\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $T(\mathbf{v}) = \pm\mathbf{v}$.

(b) Dê um exemplo de uma transformação linear para $V = \mathbb{R}^2$.

33. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$.

(a) Prove que $\{\mathbf{v}, T(\mathbf{v})\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ ou $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

(b) Dê um exemplo de uma transformação linear para $V = \mathbb{R}^2$.

O conjunto de todas as transformações lineares definidas em um espaço vetorial V a valores em um espaço vetorial W é denotado por $\mathcal{L}(V, W)$. Se S e T estão em $\mathcal{L}(V, W)$, podemos definir a ***soma*** *de S e T, S + T, por*

$$(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$$

para todo **v** *em V. Se c é um escalar, definimos cT, o* ***múltiplo escalar*** *de T por c, por*

$$(cT)(\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

para todo **v** *em V. Assim, tanto S + T quanto cT são transformações de V em W.*

34. Prove que $S + T$ e cT são transformações lineares.

35. Prove que $\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial com essa adição e essa multiplicação por escalar.

36. Sejam R, S e T transformações lineares para as quais as operações a seguir fazem sentido. Prove que

(a) $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$
(b) $c(R \circ S) = (cR) \circ S = R \circ (cS)$, para qualquer escalar c.

6.6 O Núcleo e a Imagem de uma Transformação Linear

O espaço anulado e o espaço-coluna são dois dos subespaços fundamentais associados com uma matriz. Nesta seção, estenderemos as noções de imagem e espaço anulado às transformações lineares.

Definição Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O ***núcleo*** de T, denotado por $\ker(T)$, é o conjunto de todos os vetores de V que são levados por T em $\mathbf{0}$ de W — isto é,

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \text{ em } V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

A palavra *kernel* é derivada do termo *cyrnel*, do inglês antigo, uma forma da palavra *corn*, significando semente (*seed*) ou grão (*grain*). Tal como um grão de milho, o kernel de uma transformação linear é o seu "núcleo" ou "semente", no sentido de que é ele que carrega informações sobre muitas propriedades importantes da transformação.*

A ***imagem*** de T, denotada por $\text{im}(T)$, é o conjunto de todos os vetores de W que são imagens de vetores de V através de T — isto é,

$$\begin{aligned} \text{im}(T) &= \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \text{ em } V\} \\ &= \{\mathbf{w} \text{ em } W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algum } \mathbf{v} \text{ em } V\} \end{aligned}$$

* N.T.: Isso explica por que usamos a notação $\ker(T)$ para denotar o núcleo de T.

EXEMPLO 1 Seja A uma matriz $m \times n$, e seja $T = T_A$ a transformação matricial de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ correspondente, definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Então, como vimos no Capítulo 3, a imagem de T é o espaço-coluna de A.

O núcleo de T é

$$\begin{aligned}\ker(T) &= \{\mathbf{v} \text{ em } \mathbb{R}^n : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{v} \text{ em } \mathbb{R}^n : A\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \\ &= \operatorname{anul}(A)\end{aligned}$$

Em outras palavras, o núcleo de uma transformação matricial é apenas o espaço anulado pela matriz correspondente.

EXEMPLO 2 Encontre o núcleo e a imagem do operador diferencial $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ definido por $D(p(x)) = p'(x)$.

SOLUÇÃO: Uma vez que $D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$, temos que

$$\begin{aligned}\ker(D) &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 : D(a + bx + cx^2 + dx^3) = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 : b + 2cx + 3dx^2 = 0\}\end{aligned}$$

Mas $b + 2cx + 3dx^2 = 0$ se e somente se $b = 2c = 3d = 0$, o que implica que $b = c = d = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\ker(D) &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 : b = c = d = 0\} \\ &= \{a : a \text{ em } \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Em outras palavras, o núcleo de D é o conjunto dos polinômios constantes.

A imagem de D é todo $\mathcal{P}_2$, pois *qualquer* polinômio de $\mathcal{P}_2$ é a imagem de *algum* polinômio de $\mathcal{P}_3$ por D (isto é, a derivada). Para sermos específicos, se $a + bx + cx^2$ pertence a $\mathcal{P}_2$, então

$$a + bx + cx^2 = D\left(ax + \left(\frac{b}{2}\right)x^2 + \left(\frac{c}{3}\right)x^3\right)$$

EXEMPLO 3 Seja $S : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$S(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx$$

Encontre o núcleo e a imagem de S.

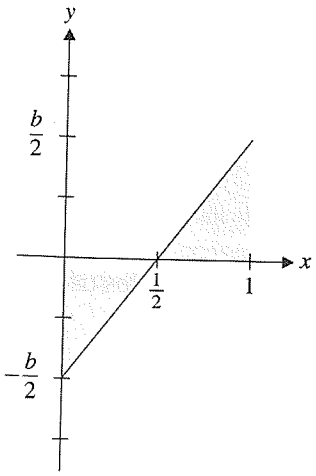


Figura 1 Se $y = -\dfrac{b}{2} + bx$, então $\displaystyle\int_0^1 y\,dx = 0$

SOLUÇÃO: Temos, em detalhe,

$$\begin{aligned} S(a + bx) &= \int_0^1 (a + bx)\, dx \\ &= \left[ax + \frac{b}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right) - 0 = a + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \ker(S) &= \{a + bx : S(a + bx) = 0\} \\ &= \left\{a + bx : a + \frac{b}{2} = 0\right\} \\ &= \left\{a + bx : a = -\frac{b}{2}\right\} \\ &= \left\{-\frac{b}{2} + bx\right\} \end{aligned}$$

Geometricamente, o $\ker(S)$ é formado por todos os polinômios lineares cujos gráficos têm a propriedade de ter a área entre a linha e o eixo x igualmente distribuída acima e abaixo do eixo no intervalo $[0, 1]$ (veja a Figura 1).

A imagem de S é $\mathbb{R}$, uma vez que todo número real pode ser obtido como a imagem de algum polinômio de $\mathcal{P}_1$ através de S. Por exemplo, se a é um número real arbitrário, então

$$\int_0^1 a\, dx = [ax]_0^1 = a - 0 = a$$

portanto, $a = S(a)$. ◆

EXEMPLO 4 Seja $T : M_{22} \to M_{22}$ a transformação linear definida por tomar a transposta: $T(A) = A^T$. Encontre o núcleo e a imagem de T.

SOLUÇÃO: Vemos que

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{A \text{ em } M_{22} : T(A) = O\} \\ &= \{A \text{ em } M_{22} : A^T = O\} \end{aligned}$$

Mas, se $A^T = O$, então $A = (A^T)^T = O^T = O$. Segue que $\ker(T) = \{O\}$.

Uma vez que, para qualquer matriz A em M_{22}, temos que $A = (A^T)^T = T(A^T)$ (e A^T está em M_{22}), deduzimos que $\operatorname{im}(T) = M_{22}$. ◆

Em todos esses exemplos, o núcleo e a imagem de uma transformação linear são subespaços do domínio e do contradomínio, respectivamente, da transformação. Como estamos generalizando o espaço anulado e o espaço-coluna de uma matriz, isso talvez não seja surpreendente. Entretanto, não devemos tomar nada como certo, por isso precisamos provar que não se trata de uma coincidência.

◆ TEOREMA 1

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então:

a. O núcleo de T é um subespaço de V.
b. A imagem de T é um subespaço de W.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, o vetor nulo de V *pertence ao* $\ker(T)$, portanto, $\ker(T)$ é não vazio. Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ elementos de $\ker(T)$, e seja c um escalar. Então, $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$, e, portanto,

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e

$$T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Portanto, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $c\mathbf{v}$ estão em $\ker(T)$, e $\ker(T)$ é um subespaço de V.

(b) Como $\mathbf{0} = T(\mathbf{0})$, o vetor nulo de W está em $\operatorname{im}(T)$, por isso $\operatorname{im}(T)$ é não vazio. Sejam $T(\mathbf{v})$ e $T(\mathbf{w})$ elementos de $\operatorname{im}(T)$, e seja c um escalar. Então, $T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ é a imagem do vetor $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Uma vez que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ estão em V, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ também está, e, dessa forma, $T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$ é um elemento de $\operatorname{im}(T)$. De maneira similar, temos $cT(\mathbf{v}) = T(c\mathbf{v})$. Uma vez que $\mathbf{v}$ está em V, $c\mathbf{v}$ também está, por isso $cT(\mathbf{v})$ é um elemento de $\operatorname{im}(T)$. Portanto, $\operatorname{im}(T)$ é um subconjunto não vazio de W que é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar, e, conseqüentemente, é um subespaço de W. ◆

Na Figura 2, temos uma representação esquemática do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

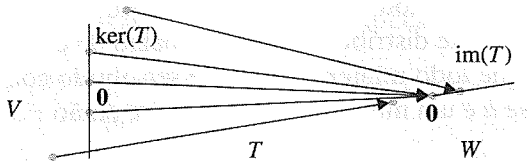


Figura 2 O núcleo e a imagem de $T: V \to W$

No Capítulo 3, definimos o posto de uma matriz como a dimensão de seu espaço-coluna, e a nulidade de uma matriz como a dimensão do espaço anulado pela matriz. Agora, vamos estender essas definições para transformações lineares.

Definição Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O ***posto*** de T é a dimensão da imagem de T, e é denotado por posto(T). A ***nulidade*** de T é a dimensão do núcleo de T, e é denotada por nulidade(T).

EXEMPLO 5 Se A é uma matriz e $T = T_A$ é a transformação matricial definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, a imagem e o núcleo de T são, respectivamente, o espaço-coluna e o espaço anulado por A, de acordo com Exemplo 1. Assim, da Seção 3.5, temos

$$\text{posto}(T) = \text{posto}(A) \quad \text{e} \quad \text{nulidade}(T) = \text{nulidade}(A)$$ ◆

EXEMPLO 6 Encontre o posto e a nulidade da transformação linear $D: \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$.

SOLUÇÃO: No Exemplo 2, calculamos $\operatorname{im}(D) = \mathcal{P}_2$, portanto,

$$\text{posto}(D) = \dim \mathcal{P}_2 = 3$$

O núcleo de D é o conjunto de todos os polinômios constantes: $\ker(D) = \{a : a \text{ está em } \mathbb{R}\} = \{a \cdot 1 : a \text{ está em } \mathbb{R}\}$. Segue que $\{1\}$ é uma base para $\ker(D)$, e, portanto,

$$\text{nulidade}(D) = \dim(\ker(D)) = 1$$ ◆

EXEMPLO 7 Encontre o posto e a nulidade da transformação linear $S : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$S(p(x)) = \int_0^1 p(x)\, dx$$

SOLUÇÃO: Sabemos, a partir do Exemplo 3, que $\text{im}(S) = \mathbb{R}$ e $\text{posto}(S) = \dim \mathbb{R} = 1$. Sabemos também que

$$\begin{aligned} \ker(S) &= \left\{ -\frac{b}{2} + bx : b \text{ em } \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ b(-\tfrac{1}{2} + x) : b \text{ em } \mathbb{R} \} \\ &= \text{ger}\,(-\tfrac{1}{2} + x) \end{aligned}$$

portanto, $\{-\frac{1}{2} + x\}$ é uma base para $\ker(S)$. Dessa forma, $\text{nulidade}(S) = \dim(\ker(S)) = 1$. ◆

EXEMPLO 8 Encontre o posto e a nulidade da transformação linear $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = A^T$.

SOLUÇÃO: No Exemplo 4, vimos que $\text{im}(T) = M_{22}$ e $\ker(T) = \{O\}$. Segue que

$$\text{posto}(T) = \dim M_{22} = 4 \quad \text{e} \quad \text{nulidade}(T) = \dim\{O\} = 0$$ ◆

No Capítulo 3, vimos que o posto e a nulidade de uma matriz A $m \times n$ estão relacionados pela fórmula $\text{posto}(A) + \text{nulidade}(A) = n$. Esse é o Teorema do Posto (Teorema 8 da Seção 3.5). Uma vez que a transformação matricial $T = T_A$ tem $\mathbb{R}^n$ como seu domínio, poderíamos reescrever a relação como

$$\text{posto}(A) + \text{nulidade}(A) = \dim \mathbb{R}^n$$

Essa versão do Teorema do Posto se estende de modo natural às transformações lineares em geral, como você pode observar nos três últimos exemplos:

posto(D)	+	nulidade(D)	=	3	+	1	=	4	=	$\dim \mathcal{P}_3$	Exemplo 6
posto(S)	+	nulidade(S)	=	1	+	1	=	2	=	$\dim \mathcal{P}_1$	Exemplo 7
posto(T)	+	nulidade(T)	=	4	+	0	=	4	=	$\dim M_{22}$	Exemplo 8

◆ **TEOREMA 2 O Teorema do Posto**

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear de um espaço de dimensão finita V em um espaço vetorial W. Então:

$$\text{posto}(T) + \text{nulidade}(T) = \dim V$$

Na próxima seção, você verá como adaptar a demonstração do Teorema 8 da Seção 3.5 para provar essa versão do resultado. Por hora, daremos uma demonstração alternativa que não usa matrizes.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\dim V = n$ e seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ uma base para $\ker(T)$ — portanto, $\text{nulidade}(T) = \dim(\ker(T)) = k$. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto linearmente independente, ele pode ser estendido a uma base de V, pelo Teorema 7 da Seção 6.3. Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base obtida dessa maneira. Se pudermos provar que o conjunto $\mathcal{C} = \{T(\mathbf{v}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é uma base para $\text{im}(T)$, então teremos que $\text{posto}(T) = \dim(\text{im}(T)) = n - k$, e, dessa forma,

$$\text{posto}(T) + \text{nulidade}(T) = k + (n - k) = n = \dim V$$

como desejado.

Certamente $\mathcal{C}$ está contido na imagem de T. Para provar que $\mathcal{C}$ gera a imagem de T, seja $T(\mathbf{v})$ um vetor na imagem de T. Então, $\mathbf{v}$ está em V, e, como $\mathcal{B}$ é uma base para V, podemos encontrar escalares $c_1, \ldots, c_n$ tais que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Como $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ estão no núcleo de T, temos que $T(\mathbf{v}_1) = \cdots = T(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, portanto,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) \\ &= c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_kT(\mathbf{v}_k) + c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) \\ &= c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Isso prova que a imagem de T é gerada por $\mathcal{C}$.

Para provar que $\mathcal{C}$ é linearmente independente, suponha que existem escalares $c_{k+1}, \ldots, c_n$ tais que

$$c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

Então, $T(c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, o que significa que $c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ está no núcleo de T e, portanto, é expansível como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ da base de $\ker(T)$ — digamos,

$$c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Mas agora
$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k - c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e a independência linear de $\mathcal{B}$ implica que $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Em particular, $c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$, o que significa que $\mathcal{C}$ é linearmente independente.

Acabamos de provar que $\mathcal{C}$ é uma base para a imagem de T, por isso, pelos nossos comentários anteriores, a demonstração está completa. ◆

Já verificamos o Teorema do Posto para os Exemplos 6, 7 e 8. Na prática, esse teorema nos permite encontrar o posto e a nulidade de uma transformação linear fazendo apenas a metade do trabalho. Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

EXEMPLO 9 Encontre o posto e a nulidade da transformação linear $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$. (Verifique se T é realmente linear.)

SOLUÇÃO: Fazendo detalhadamente, temos

$$T(a + bx + cx^2) = ax + bx^2 + cx^3$$

Segue que

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{a + bx + cx^2 : T(a + bx + cx^2) = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 : ax + bx^2 + cx^3 = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 : a = b = c = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

portanto, nulidade(T) = dim(ker(T)) = 0. O Teorema do Posto implica que

$$\text{posto}(T) = \dim \mathcal{P}_2 - \text{nulidade}(T) = 3 - 0 = 3$$ ◆

Observação: ◆ No Exemplo 9, uma vez que é imediato ver que $\{x, x^2, x^3\}$ é uma base para a imagem de T, também seria simples encontrar o posto de T primeiro. Em geral, entretanto, é mais fácil calcular um deles (o posto ou a nulidade de uma transformação linear); em seguida, podemos usar o Teorema do Posto para obter o outro. Com a prática, você saberá qual o melhor caminho a seguir.

EXEMPLO 10 Seja W o espaço vetorial das matrizes simétricas 2×2. Defina uma transformação linear $T: W \to \mathcal{P}_2$ por

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2$$

(Verifique que T é linear.) Encontre o posto e a nulidade de T.

SOLUÇÃO: A nulidade de T é mais facilmente obtida que o posto, por isso vamos fazer o seguinte:

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : T\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2 = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : (a - b) = (b - c) = (c - a) = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a = b = c\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix}\right\} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para o núcleo de T, e por isso nulidade(T) = dim(ker(T)) = 1. Pelo Teorema do Posto e o Exemplo 21 da Seção 6.3, temos que posto(T) = dim W – nulidade(T) = 3 – 1 = 2. ◆

Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras

Vamos investigar critérios para determinar se uma transformação linear é invertível. As propriedades-chave para essa discussão são a injetividade e a sobrejetividade.

Definição Uma transformação linear $T: V \to W$ é ***injetora*** se T leva vetores distintos de V em vetores distintos de W. Se im$(T) = W$, então T é ***sobrejetora***.

Observações ◆ A definição de injetora pode ser escrita mais formalmente como:

$T: V \to W$ é injetora se, para todo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V,

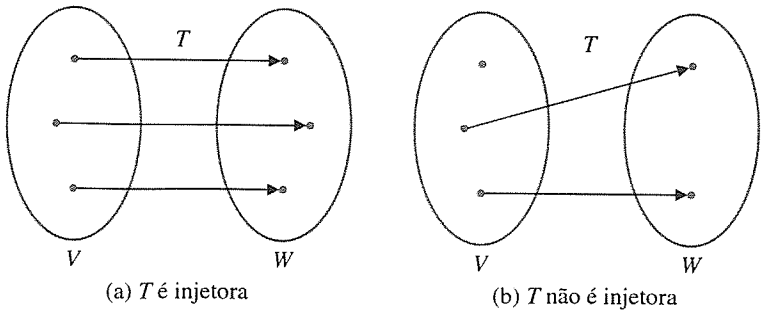
$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \text{ implica que } T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$$

Essa afirmação é equivalente a:

$T: V \to W$ é injetora se, para todo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \text{ implica que } \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

A Figura 3 ilustra essas duas afirmações.



(a) T é injetora (b) T não é injetora

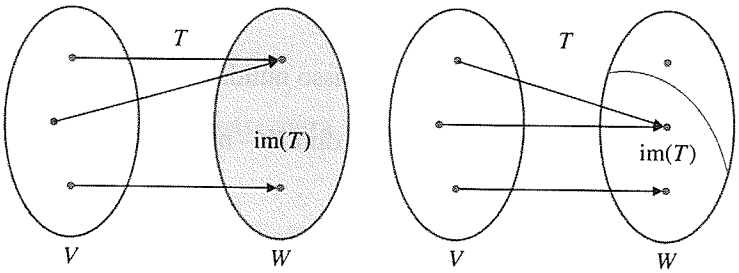
Figura 3

◆ Uma outra maneira de escrever a definição de sobrejetividade é a seguinte:

$T: V \to W$ é sobrejetora se, para todo $\mathbf{w}$ em W, existe pelo menos um $\mathbf{v}$ em V tal que

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$$

Em outras palavras, *dado* $\mathbf{w}$ em W, será que existe algum $\mathbf{v}$ em V tal que $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$? Se, para um $\mathbf{w}$ arbitrário, conseguirmos resolver essa equação para $\mathbf{v}$, T será sobrejetora (veja a Figura 4).



(a) T é sobrejetora (b) T não é sobrejetora

Figura 4

EXEMPLO 11 Quais das seguintes transformações lineares são injetoras? E quais são sobrejetoras?

(a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x - y \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $D: \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$

(c) $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = A^T$

SOLUÇÃO: (a) Seja $T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Então:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 - y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

portanto, $2x_1 = 2x_2$ e $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$. Resolvendo essas equações, vemos que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Dessa forma, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, e, conseqüentemente, T é injetora.

T não é sobrejetora, pois sua imagem não é todo $\mathbb{R}^3$. Para ser mais específico, não existe vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Por que não?)

(b) No Exemplo 2, provamos que $\text{im}(D) = \mathcal{P}_2$, portanto, D é sobrejetora. Mas D não é injetora, uma vez que diferentes polinômios de $\mathcal{P}_3$ podem ter a mesma derivada. Por exemplo, $x^3 \neq x^3 + 1$, mas $D(x^3) = 3x^2 = D(x^3 + 1)$.

(c) Sejam A e B em M_{22}, com $T(A) = T(B)$. Então, $A^T = B^T$, portanto $A = (A^T)^T = (B^T)^T = B$. Segue que T é injetora. No Exemplo 4, provamos que $\text{im}(T) = M_{22}$. Segue que T é sobrejetora. ◆

Existe um critério muito simples para determinar se uma transformação linear é injetora.

◆ TEOREMA 3

Um transformação linear $T: V \to W$ é injetora se e somente se $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Assuma que T é injetora. Se $\mathbf{v}$ está no núcleo de T, então $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Mas sabemos que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, portanto, $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{0})$. Como T é injetora, isso implica que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, portanto o único vetor no núcleo de T é o vetor nulo.

Reciprocamente, assuma que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Para provar que T é injetora, sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V tais que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Então, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, o que implica que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ está no núcleo de T. Mas $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, portanto, devemos ter $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou, equivalentemente, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Isso prova que T é injetora. ◆

EXEMPLO 12 Prove que a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ definida por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x$$

é injetora e sobrejetora.

SOLUÇÃO: Se $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ está no núcleo de T, então

$$0 = T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x$$

Com isso, $a = 0$ e $a + b = 0$. Assim, $b = 0$, e, portanto, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Conseqüentemente, $\ker(T) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, e T é injetora, pelo Teorema 3.

Pelo Teorema do Posto,

$$\text{posto}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \text{nulidade}(T) = 2 - 0 = 2$$

Portanto, a imagem de T é um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^2$, e isso implica que $\text{im}(T) = \mathbb{R}^2$. Segue que T é sobrejetora. ◆

Para transformações lineares entre dois espaços vetoriais n-dimensionais, a injetividade e a sobrejetividade estão fortemente relacionadas. Observe primeiro que, para uma transformação linear $T: V \to W$, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ se e somente se $\text{nulidade}(T) = 0$, e T é sobrejetora se, e somente se, $\text{posto}(T) = \dim W$. (Por quê?) A demonstração do próximo teorema utiliza, essencialmente, o método do Exemplo 12.

◆ TEOREMA 4

Suponha que dim V = dim $W = n$. Então, uma transformação linear $T: V \to W$ será injetora se, e somente se, for sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO: Assuma que T seja injetora. Então, nulidade$(T) = 0$, de acordo com o Teorema 3 e a observação que precede o Teorema 4. O Teorema do Posto implica que

$$\text{posto}(T) = \dim V - \text{nulidade}(T) = n - 0 = n$$

Portanto, T é sobrejetora.

Reciprocamente, assuma que T seja sobrejetora. Então, posto(T) = dim $W = n$. Pelo Teorema do Posto,

$$\text{nulidade}(T) = \dim V - \text{posto}(T) = n - n = 0$$

Assim, $\ker(T)=\{\mathbf{0}\}$, e T é injetora. ◆

Na Seção 6.5, ressaltamos que, se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então a imagem de uma base para V, aplicando-se T, não é necessariamente uma base para a imagem de T. Agora, veremos uma condição que garante que uma base de V será levada por T a uma base de W.

◆ TEOREMA 5

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto linearmente independente em V, então $T(S) = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k)\}$ é um conjunto linearmente independente em W.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $c_1, \ldots, c_k$ escalares tais que

$$c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_kT(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$$

Então, $T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, o que implica que $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ está no núcleo de T. No entanto, como T é injetora, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, pelo Teorema 3. Assim,

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Mas $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente, por isso todos os escalares c_i devem ser 0. Portanto, $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k)\}$ é um conjunto linearmente independente. ◆

COROLÁRIO 6

Suponha que dim V = dim $W = n$. Então, uma transformação linear injetora $T: V \to W$ leva uma base de V em uma base de W.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V. Pelo Teorema 5, $T(\mathcal{B}) = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é um conjunto linearmente independente em W, portanto, só precisamos provar que $T(\mathcal{B})$ gera W. Mas, pelo Teorema 2 da Seção 6.5, $T(\mathcal{B})$ gera a imagem de T. Além disso, T é sobrejetora, de acordo com o Teorema 4, por isso $\text{im}(T) = W$. Conseqüentemente, $T(\mathcal{B})$ gera W, o que completa a demonstração. ◆

EXEMPLO 13 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ a transformação linear do Exemplo 12, definida por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x$$

Então, pelo Corolário 6, a base canônica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ é levada em uma base $T(\mathcal{E}) = \{T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)\}$ de $\mathcal{P}_1$. Vemos que

$$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + x \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x$$

Segue que $\{1 + x, x\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$. ◆

Podemos agora determinar quais transformações lineares $T : V \to W$ são invertíveis.

◆ **TEOREMA 7**

Uma transformação linear $T : V \to W$ será invertível se, e somente se, for injetora e sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO: Assuma que T é invertível. Então, existe uma transformação linear $T^{-1} : W \to V$ tal que

$$T^{-1} \circ T = I_V \quad \text{e} \quad T \circ T^{-1} = I_W$$

Para provar que T é injetora, seja $\mathbf{v}$ pertencente ao núcleo de T. Então, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Portanto,

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{0}) &\Rightarrow (T^{-1} \circ T)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow I(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

o que garante que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, T é injetora, pelo Teorema 3.

Para provar que T é sobrejetora, seja $\mathbf{w}$ um elemento de W, e seja $\mathbf{v} = T^{-1}(\mathbf{w})$. Então:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(T^{-1}(\mathbf{w})) \\ &= (T \circ T^{-1})(\mathbf{w}) \\ &= I(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w} \end{aligned}$$

o que prova que $\mathbf{w}$ é a imagem de $\mathbf{v}$ por T. Como $\mathbf{v}$ é um elemento de V, isso prova que T é sobrejetora.

Reciprocamente, assuma que T seja injetora e sobrejetora. Isso significa que nulidade$(T) = 0$ e posto$(T) = \dim W$. É necessário provar que existe uma transformação linear $T' : W \to V$ tal que $T' \circ T = I_V$ e $T \circ T' = I_W$.

Seja $\mathbf{w}$ um elemento de W. Como T é sobrejetora, existe algum vetor $\mathbf{v}$ em V tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. De fato, existe um único vetor $\mathbf{v}$ com essa propriedade, pois, se $\mathbf{v}'$ fosse um outro vetor de V tal que $T(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$, então $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$; como T é injetora, temos que $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Portanto, faz sentido definir uma aplicação $T' : W \to V$ por $T'(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Segue que

$$(T' \circ T)(\mathbf{v}) = T'(T(\mathbf{v})) = T'(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$$

e

$$(T \circ T')(\mathbf{w}) = T(T'(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

Portanto $T' \circ T = I_V$ e $T \circ T' = I_W$. Agora, é necessário provar que T' é uma transformação *linear*.

Para isso, sejam $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ em W, e sejam c_1 e c_2 escalares. Como feito anteriormente, sejam $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Então $\mathbf{v}_1 = T'(\mathbf{w}_1)$, $\mathbf{v}_2 = T'(\mathbf{w}_2)$ e

$$\begin{aligned} T'(c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2) &= T'(c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)) \\ &= T'(T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)) \\ &= I(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) \\ &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \\ &= c_1T'(\mathbf{w}_1) + c_2T'(\mathbf{w}_2) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, T' é linear e, portanto, pelo Teorema 4 da Seção 6.5, $T' = T^{-1}$. ◆

Isomorfismos de Espaços Vetoriais

Agora estamos em condições de descrever, em termos concretos, o que significa dizer que dois espaços vetoriais são "essencialmente o mesmo".

Definição Uma transformação linear $T : V \to W$ é um ***isomorfismo*** quando é injetora e sobrejetora. Se V e W são dois espaços vetoriais tais que existe um isomorfismo de V em W, então dizemos que V é ***isomorfo*** a W e denotamos por $V \cong W$.

EXEMPLO 14 Prove que $\mathcal{P}_{n-1}$ e $\mathbb{R}^n$ são isomorfos.

SOLUÇÃO: O processo de formar o vetor de coordenadas de um polinômio nos mune de um possível isomorfismo (como já observamos na Seção 6.3, apesar de não termos usado o termo *isomorfismo* naquela ocasião). Especificamente, defina $T : \mathcal{P}_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ por $T(p(x)) = [p(x)]_{\mathcal{E}}$, onde $\mathcal{E} = \{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_{n-1}$ — isto é,

$$T(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

O Teorema 3 da Seção 6.3 prova que T é uma transformação linear. Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ está no núcleo de T, então

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = T(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, e por isso $p(x) = 0$. Portanto, $\ker(T) = \{0\}$, e T é injetora. Como $\dim \mathcal{P}_{n-1} = \dim \mathbb{R}^n = n$, T também é sobrejetora, pelo Teorema 4. Dessa forma, T é um isomorfismo, e $\mathcal{P}_{n-1} \cong \mathbb{R}^n$. ◆

EXEMPLO 15 Prove que M_{mn} e $\mathbb{R}^{mn}$ são isomorfos.

Os termos *isomorfismo* e *isomorfo* são derivados de duas palavras gregas: *isos*, que significa "igual", e *morph*, "forma". Assim, falando figurativamente, espaços vetoriais isomorfos têm "a mesma forma".

SOLUÇÃO: Uma vez mais, a aplicação definida pela formação do vetor de coordenadas de M_{mn} para $\mathbb{R}^{mn}$ (como no Exemplo 15 da Seção 6.3) é um isomorfismo. Os detalhes da demonstração são deixados como exercício. ◆

Na verdade, a maneira mais fácil de dizer se dois espaços vetoriais são isomorfos é simplesmente verificar suas dimensões, como nos mostra o teorema a seguir.

◆ TEOREMA 8

Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita. Então, V é isomorfo a W se, e somente se, $\dim V = \dim W$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n = \dim V$. Se V é isomorfo a W, então existe um isomorfismo $T: V \to W$. Como T é injetora, nulidade$(T) = 0$. O Teorema do Posto implica que

$$\text{posto}(T) = \dim V - \text{nulidade}(T) = n - 0 = n$$

Portanto, a imagem de T é um subespaço n-dimensional de W. No entanto, como T é sobrejetora, $W = \text{im}(T)$, portanto $\dim W = n$, como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, assuma que V e W tenham a mesma dimensão, n. Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para V, e seja $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ uma base para W. Vamos definir uma transformação linear $T: V \to W$ e então provar que T é injetora e sobrejetora. Um vetor $\mathbf{v}$ de V, arbitrário, pode ser escrito de forma única, como uma combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$ — digamos,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Definimos T por

$$T(\mathbf{v}) = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$$

É imediato verificar que T é linear. (Faça-o.) Para ver que T é injetora, suponha que $\mathbf{v}$ esteja no núcleo de T. Então:

$$c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

e a independência linear de $\mathcal{C}$ implica que $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Mas então

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

portanto, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, o que significa que T é injetora. Como $\dim V = \dim W$, T também é sobrejetora, pelo Teorema 4. Portanto, T é um isomorfismo, e $V \cong W$. ◆

EXEMPLO 16 Prove que $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{P}_n$ não são isomorfos.

SOLUÇÃO: Como $\dim \mathbb{R}^n = n \neq n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{P}_n$ não são isomorfos, pelo Teorema 8. ◆

EXEMPLO 17 Seja W o espaço vetorial das matrizes simétricas 2×2. Prove que W é isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO: No Exemplo 21 da Seção 6.3, provamos que $\dim W = 3$. Assim, $\dim W = \dim \mathbb{R}^3$, e portanto $W \cong \mathbb{R}^3$, pelo Teorema 8. (Existe um candidato óbvio para um isomorfismo $T: W \to \mathbb{R}^3$. Qual é?) ◆

Observação:

- Nossos exemplos são todos de espaços vetoriais *reais*, mas os teoremas que provamos são verdadeiros para espaços vetoriais sobre números complexos $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}_p$, onde p é um primo. Por exemplo, o espaço vetorial $M_{22}(\mathbb{Z}_2)$ das matrizes 2×2 com elementos de $\mathbb{Z}_2$ tem dimensão 4 como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$, e, assim, $M_{22}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^4$.

◆ EXERCÍCIOS 6.6 ◆

1. Seja $T: M_{22} \to M_{22}$ a transformação linear definida por

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

(a) Quais das seguintes matrizes pertencem a $\ker(T)$?

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(b) Quais das matrizes do item (a) pertencem a $\operatorname{im}(T)$?

(c) Descreva $\ker(T)$ e $\operatorname{im}(T)$.

2. Seja $T: M_{22} \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(A) = \operatorname{tr}(A)$.

(a) Quais das seguintes matrizes pertencem a $\ker(T)$?

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(b) Quais dos seguintes escalares pertencem a $\operatorname{im}(T)$?

(i) 0 (ii) -2 (iii) $1/\sqrt{2}$

(c) Descreva $\ker(T)$ e $\operatorname{im}(T)$.

3. Seja $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}$$

(a) Quais dos seguintes polinômios pertencem a $\ker(T)$?

(i) $1 + x$ (ii) $x - x^2$ (iii) $1 + x - x^2$

(b) Quais dos seguintes vetores pertencem a $\operatorname{im}(T)$?

(i) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) Descreva $\ker(T)$ e $\operatorname{im}(T)$.

4. Seja $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp'(x)$.

(a) Quais dos seguintes polinômios pertencem a $\ker(T)$?

(i) 2 (ii) x^2 (iii) $1 - x$

(b) Quais dos polinômios do item (a) pertencem a $\operatorname{im}(T)$?

(c) Descreva $\ker(T)$ e $\operatorname{im}(T)$.

Nos Exercícios de 5 a 8, encontre bases para o núcleo e a imagem da transformação linear T do exercício indicado. Em cada caso, encontre a nulidade e o posto de T e verifique o Teorema do Posto.

5. Exercício 1 **6.** Exercício 2

7. Exercício 3 **8.** Exercício 4

Nos Exercícios de 9 a 14, encontre a nulidade ou o posto de T, e então use o Teorema do Posto para encontrar o outro.

9. $T: M_{22} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ c - d \end{bmatrix}$

10. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$

11. $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = AB$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = AB - BA$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(p(x)) = p'(0)$

14. $T: M_{33} \to M_{33}$ definida por $T(A) = A - A^T$

Nos Exercícios de 15 a 20, determine se a transformação linear T é (a) injetora e (b) sobrejetora.

15. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}$

16. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3x + y \\ x + y \end{bmatrix}$

17. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}$

18. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$

19. $T: \mathbb{R}^3 \to M_{22}$ definida por $T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a + b & b + c \end{bmatrix}$

20. $T: \mathbb{R}^3 \to W$ definida por $T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b + c & b - 2c \\ b - 2c & a - c \end{bmatrix}$, onde W é o espaço vetorial das matrizes simétricas 2×2.

Nos Exercícios de 21 a 26, determine se V e W são isomorfos. Caso sejam, descreva explicitamente o isomorfismo $T: V \to W$.

21. $V = D_3$ (matrizes diagonais 3×3), $W = \mathbb{R}^3$

22. $V = S_3$ (matrizes simétricas 3×3), $W = U_3$ (matrizes triangulares superiormente 3×3)

23. $V = S_3$ (matrizes simétricas 3×3), $W = S_3'$ matrizes anti-simétricas 3×3)

24. $V = \mathcal{P}_2$, $W = \{p(x) \text{ em } \mathcal{P}_3 : p(0) = 0\}$

25. $V = \mathbb{C}$, $W = \mathbb{R}^2$

26. $V = \{A \text{ em } M_{22} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $W = \mathbb{R}^2$

27. Prove que $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definida por $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$ é um isomorfismo.

28. Prove que $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definida por $T(p(x)) = p(x-2)$ é um isomorfismo.

29. Prove que $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definida por $T(p(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$ é um isomorfismo.

30. (a) Prove que $\mathcal{C}[0, 1] \cong \mathcal{C}[2, 3]$. [*Sugestão:* defina $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathcal{C}[2, 3]$ tomando $T(f)$ como a função cujo valor em x é $(T(f))(x) = f(x-2)$, para x no intervalo $[2, 3]$.]

(b) Prove que $\mathcal{C}[0, 1] \cong \mathcal{C}[a, a+1]$, para todo a.

31. Prove que $\mathcal{C}[0, 1] \cong \mathcal{C}[0, 2]$.

32. Prove que $\mathcal{C}[a, b] \cong \mathcal{C}[c, d]$ para todo $a < b$ e $c < d$.

33. Sejam $S : V \to W$ e $T : U \to V$ transformações lineares.

(a) Prove que, se S e T são injetoras, então $S \circ T$ também o é.

(b) Prove que, se S e T são sobrejetoras, então $S \circ T$ também o é.

34. Sejam $S : V \to W$ e $T : U \to V$ transformações lineares.

(a) Prove que, se $S \circ T$ é injetora, então T também o é.

(b) Prove que, se $S \circ T$ é sobrejetora, então S também o é.

35. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita.

(a) Prove que, se $\dim V < \dim W$, então T não pode ser sobrejetora.

(b) Prove que, se $\dim V > \dim W$, então T não pode ser injetora.

36. Sejam $n + 1$ números reais distintos, $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Defina $T : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(a_0) \\ p(a_1) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{bmatrix}$$

Prove que T é um isomorfismo.

6.7 A Matriz de uma Transformação Linear

O Teorema 2 da Seção 6.5 provou que uma transformação linear $T : V \to W$ fica completamente determinada pelo seu efeito em um conjunto gerador de V. Em particular, se sabemos como T age em uma base para V, então podemos calcular $T(\mathbf{v})$ para qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V. O Exemplo 7 da Seção 6.5 ilustrou esse procedimento. Implicitamente, usamos essa propriedade tão importante das transformações lineares no Teorema 2 da Seção 3.6 para nos auxiliar a calcular a matriz canônica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Nesta seção, vamos provar que toda transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita pode ser representada como uma transformação matricial.

Suponha que V seja um espaço vetorial n-dimensional, W seja um espaço vetorial m-dimensional e $T : V \to W$ seja uma transformação linear. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para V e W, respectivamente. Então, a aplicação que leva $\mathbf{v}$ no vetor de coordenadas $R(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ define um isomorfismo $R : V \to \mathbb{R}^n$. Ao mesmo tempo, temos um isomorfismo $S : W \to \mathbb{R}^m$ dado por $S(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, o que nos permite associar a imagem $T(\mathbf{v})$ com o vetor $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$ em $\mathbb{R}^m$. A Figura 1 ilustra as relações.

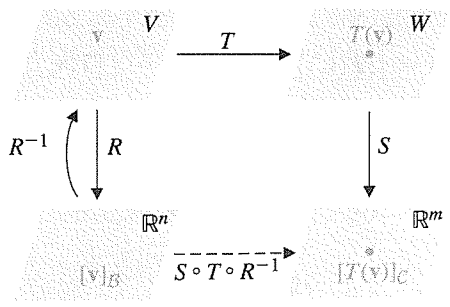


Figura 1

Como R é um isomorfismo, ele é invertível; podemos então formar a aplicação composta

$$S \circ T \circ R^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

que leva $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ em $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$. Uma vez que essa aplicação vai de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, sabemos, do Capítulo 3, que é uma transformação matricial. Qual é então a matriz canônica de $S \circ T \circ R^{-1}$? Gostaríamos de encontrar A, a matriz $m \times n$ tal que $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (S \circ T \circ R^{-1})([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}})$. Ou, como $(S \circ T \circ R^{-1})([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$, o que queremos é

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$$

Surpreendentemente, A é fácil de ser encontrada. A idéia básica é a mesma do Teorema 2 da Seção 3.6. As colunas de A são as imagens dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ pela aplicação de $S \circ T \circ R^{-1}$. Mas, se $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base para V, então

$$\begin{aligned} R(\mathbf{v}_i) &= [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i\text{-ésimo elemento} \\ &= \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

portanto, $R^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$. Conseqüentemente, a i-ésima coluna da matriz A que procuramos é dada por

$$\begin{aligned} (S \circ T \circ R^{-1})(\mathbf{e}_i) &= S(T(R^{-1}(\mathbf{e}_i))) \\ &= S(T(\mathbf{v}_i)) \\ &= [T(\mathbf{v}_i)]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

que é o vetor de coordenadas de $T(\mathbf{v}_i)$ em relação à base $\mathcal{C}$ de W.

Resumimos essa discussão como um teorema:

◆ TEOREMA 1

Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita com bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, onde $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então a matriz A $m \times n$, definida por

$$A = [[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{C}} \mid [T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{C}}]$$

satisfaz a equação

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$$

para todo vetor $\mathbf{v}$ em V.

A matriz A do Teorema 1 é conhecida como ***matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$***. Essa relação é ilustrada a seguir. (Lembre-se de que T_A denota a multiplicação por A.)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v} & \xrightarrow{T} & T(\mathbf{v}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{T_A} & A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Observações:

- Às vezes, a matriz de uma transformação linear T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é denotada por $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Observe a direção da flecha: da direita para a esquerda (e não da esquerda para a direita, como em $T: V \to W$). Com essa notação, a equação final do Teorema 1 torna-se

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$$

  Observe que os $\mathcal{B}$s nos subscritos aparecem lado a lado e parecem se "cancelar" mutuamente. Em palavras, essa equação diz "A matriz de T, multiplicada pelo vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$, é igual ao vetor de coordenadas de $T(\mathbf{v})$".
  No caso especial onde $V = W$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, escrevemos $[T]_{\mathcal{B}}$ (em vez de $[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$). O Teorema 1 então afirma que

$$[T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$$

- A matriz de uma transformação linear em relação às bases dadas é única — isto é, para qualquer vetor $\mathbf{v}$ de V, existe somente *uma* matriz A com a propriedade especificada pelo Teorema 1, ou seja,

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$$

  (Será pedido que você prove isso no Exercício 39.)

- O diagrama que aparece após o Teorema 1 é às vezes chamado de *diagrama comutativo*, pois podemos começar no canto superior esquerdo com o vetor $\mathbf{v}$ e chegar a $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$ no canto inferior direito de duas maneiras diferentes, mas equivalentes. Se, como fizemos anteriormente, denotarmos por R e S as aplicações coordenadas que levam $\mathbf{v}$ a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e $\mathbf{w}$ a $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, respectivamente, poderemos resumir essa "comutatividade" por

$$S \circ T = T_A \circ R$$

  A razão para usarmos o termo *comutatividade* torna-se clara quando $V = W$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, pois então também temos que $R = S$, e

$$R \circ T = T_A \circ R$$

  sugerindo que a aplicação coordenada R comuta com a transformação linear T (desde que usemos a versão matricial de T — ou seja, $T_A = T_{[T]_{\mathcal{B}}}$ — onde for necessário).

- A matriz $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ depende da *ordem* dos vetores nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Ao rearranjar os vetores de qualquer uma das bases, afetamos a matriz $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. [Veja o Exemplo 2(b).]

EXEMPLO 1 Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ x + y - 3z \end{bmatrix}$$

e sejam $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ bases para $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Encontre a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e verifique o Teorema 1 para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Primeiro, calculamos

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Em seguida, precisamos conhecer seus vetores de coordenadas em relação à base $\mathcal{C}$. Uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_1$$

temos

$$[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é

$$\begin{aligned} A = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{C}} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{C}} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{C}}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para verificar o Teorema 1 para $\mathbf{v}$, primeiro calculamos

$$T(\mathbf{v}) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Então,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(Verifique esses resultados.)

Usando todos esses fatos, podemos confirmar que

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$$

EXEMPLO 2 Seja $D: \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ o operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$. Sejam $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ bases para $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente.

(a) Encontre a matriz A de D em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.
(b) Encontre a matriz A' de D em relação às bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{B}' = \{x^3, x^2, x, 1\}$.
(c) Usando o item (a), verifique o Teorema 1 calculando $D(5 - x + 2x^3)$ e $D(a + bx + cx^2 + dx^3)$.

SOLUÇÃO: Primeiro observe que $D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$. (Veja o Exemplo 2 da Seção 6.6.)
(a) Uma vez que as imagens da base $\mathcal{B}$ pela aplicação D são $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$ e $D(x^3) = 3x^2$, seus vetores de coordenadas em relação à base $\mathcal{C}$ são

$$[D(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x^3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} A = [D]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [[D(1)]_{\mathcal{C}} \mid [D(x)]_{\mathcal{C}} \mid [D(x^2)]_{\mathcal{C}} \mid [D(x^3)]_{\mathcal{C}}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Como a base $\mathcal{B}'$ é apenas a base $\mathcal{B}$ na ordem *inversa*, vemos que

$$\begin{aligned} A' = [D]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} &= [[D(x^3)]_{\mathcal{C}} \mid [D(x^2)]_{\mathcal{C}} \mid [D(x)]_{\mathcal{C}} \mid [D(1)]_{\mathcal{C}}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Isso mostra que a *ordem* dos vetores nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ afeta a matriz de uma transformação em relação a essas bases.)
(c) Primeiro, calculamos $D(5 - x + 2x^3) = -1 + 6x^2$ diretamente, obtendo o vetor de coordenadas

$$[D(5 - x + 2x^3)]_{\mathcal{C}} = [-1 + 6x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$[5 - x + 2x^3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

portanto,

$$A[5 - x + 2x^3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = [D(5 - x + 2x^3)]_{\mathcal{C}}$$

o que está de acordo com o Teorema 1. Deixamos a demonstração do caso geral como um exercício. ◆

Como a transformação linear do Exemplo 2 é fácil de ser usada diretamente, não há vantagem em usar sua matriz para fazer cálculos. Entretanto, em outros exemplos — especialmente nos grandes —, o método que usa matrizes pode ser mais simples, uma vez que é muito bem adaptado para implementação computacional. O Exemplo 3 ilustra a idéia básica por trás desse método indireto.

EXEMPLO 3 Seja $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear definida por

$$T(p(x)) = p(2x - 1)$$

(a) Encontre a matriz de T em relação à base $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$.
(b) Calcule $T(3 + 2x - x^2)$ indiretamente, usando o item (a).

SOLUÇÃO: (a) Temos que

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 2x - 1, \quad T(x^2) = (2x - 1)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

e, assim, os vetores de coordenadas são

$$[T(1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x^2)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{E}} = [[T(1)]_{\mathcal{E}} \mid [T(x)]_{\mathcal{E}} \mid [T(x^2)]_{\mathcal{E}}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Aplicamos desta maneira o Teorema 1: o vetor de coordenadas de $p(x) = 3 + 2x - x^2$ em relação à base $\mathcal{E}$ é

$$[p(x)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, pelo Teorema 1,

$$\begin{aligned} [T(3 + 2x - x^2)]_{\mathcal{E}} &= [T(p(x))]_{\mathcal{E}} \\ &= [T]_{\mathcal{E}}[p(x)]_{\mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Segue que $T(3 + 2x - x^2) = 0 \cdot 1 + 8 \cdot x - 4 \cdot x^2 = 8x - 4x^2$. (Calcule $T(3 + 2x - x^2) = 3 + 2(2x - 1) - (2x - 1)^2$ diretamente, para verificar essa afirmação.)

A matriz de uma transformação linear às vezes pode ser usada de formas surpreendentes. O Exemplo 4 mostra sua aplicação a um problema tradicional de Cálculo.

EXEMPLO 4 Seja $\mathcal{D}$ o espaço vetorial das funções diferenciáveis. Considere o subespaço W de $\mathcal{D}$ dado por $W = \text{ger}(e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x})$. Como o conjunto $\mathcal{B} = \{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ é linearmente independente (por quê?), ele é uma base para W.

(a) Prove que o operador diferencial D aplica W sobre si mesmo.
(b) Encontre a matriz de D em relação à base $\mathcal{B}$.
(c) Calcule a derivada de $5e^{3x} + 2xe^{3x} - x^2e^{3x}$ indiretamente, usando o Teorema 1, e verifique-a usando o item (a).

SOLUÇÃO: (a) Aplicando D a um elemento genérico de W, vemos que

$$D(ae^{3x} + bxe^{3x} + cx^2e^{3x}) = (3a + b)e^{3x} + (3b + 2c)xe^{3x} + 3cx^2e^{3x}$$

(verifique isso), que é um elemento de W.

(b) Usando a fórmula do item (a), temos que

$$D(ae^{3x} + bxe^{3x} + cx^2e^{3x}) = (3a + b)e^{3x} + (3b + 2c)xe^{3x} + 3cx^2e^{3x}$$

portanto,

$$[D(e^{3x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(xe^{3x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x^2e^{3x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Isso implica que

$$[D]_{\mathcal{B}} = [[D(e^{3x})]_{\mathcal{B}} \vdots [D(xe^{3x})]_{\mathcal{B}} \vdots [D(x^2e^{3x})]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) Para $f(x) = 5e^{3x} + 2xe^{3x} - x^2e^{3x}$, vemos, por inspeção, que

$$[f(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Assim, pelo Teorema 1, temos

$$[D(f(x))]_{\mathcal{B}} = [D]_{\mathcal{B}}[f(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

o que, por sua vez, implica que $f'(x) = D(f(x)) = 17e^{3x} + 4xe^{3x} - 3x^2e^{3x}$, e esse resultado está de acordo com a fórmula obtida no item (a). ◆

Observação: ◆ O objetivo do Exemplo 4 não é provar que esse método é mais fácil do que o cálculo (direto) da derivada. Não há dúvida de que, uma vez obtida a fórmula do item (a), não temos muito o que fazer. O que merece ser destacado é que métodos matriciais podem ser usados no que parece, na superfície, ser um problema de Cálculo. Exploraremos essa idéia com mais detalhes no Exemplo 8.

EXEMPLO 5 Seja V um espaço vetorial n-dimensional, e seja I a transformação identidade em V. Qual é a matriz de I em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de V, se $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ (inclusive quanto à ordem dos vetores da base)? E se $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$?

SOLUÇÃO: Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Então, $I(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, \ldots, I(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$, portanto,

$$[I(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1, \quad [I(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad [I(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_n$$

e, se $\mathcal{B} = \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}[I]_{\mathcal{B}} &= [[I(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}} \mid [I(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [I(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{B}}] \\ &= [\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n] \\ &= I_n\end{aligned}$$

a matriz-identidade $n \times n$. (Era o que você esperava, não?)

No caso de $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$, temos

$$[I(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{C}}, \quad \ldots, \quad [I(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{C}}$$

portanto,

$$\begin{aligned}[I]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{C}}] \\ &= P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\end{aligned}$$

a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$. ◆

Matriz da Transformação Linear Composta e Matriz da Transformação Linear Inversa

Vamos generalizar os Teoremas 3 e 4 da Seção 3.6 para obter um resultado que nos permitirá encontrar facilmente a inversa (se existir) de uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita.

◆ TEOREMA 2

Sejam U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita com bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Sejam $T: U \to V$ e $S: V \to W$ transformações lineares. Então:

$$[S \circ T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

Observações:
- Em outros palavras, esse teorema diz "A matriz da composta é o produto das matrizes".
- Note que os "subscritos internos" $\mathcal{C}$ devem ser os mesmos e parecem se cancelar mutuamente, deixando apenas os "subscritos externos" na forma $\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos provar que as colunas correspondentes das matrizes $[S \circ T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ são as mesmas. Seja $\mathbf{v}_i$ o i-ésimo vetor da base $\mathcal{B}$. Então, a i-ésima coluna de $[S \circ T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$ é

$$\begin{aligned}[(S \circ T)(\mathbf{v}_i)]_{\mathcal{D}} &= [S(T(\mathbf{v}_i)]_{\mathcal{D}} \\ &= [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T(\mathbf{v}_i)]_{\mathcal{C}} \\ &= [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

pela aplicação do Teorema 1, duas vezes. Mas $[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_i$ (por quê?), por isso

$$[S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{e}_i$$

é a i-ésima coluna da matriz $[S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Conseqüentemente, a i-ésima coluna de $[S \circ T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$ e a de $[S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ são iguais, como queríamos provar. ◆

EXEMPLO 6 Use métodos matriciais para calcular $(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ para as transformações lineares S e T do Exemplo 8 da Seção 6.5.

SOLUÇÃO: Lembre-se de que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ e $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ são definidas por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x \quad \text{e} \quad S(a + bx) = ax + bx^2$$

Escolhendo as bases canônicas $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, e $\mathcal{E}''$ para $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente, vemos que

$$[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}'' \leftarrow \mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Verifique isso.) Pelo Teorema 2, a matriz de $S \circ T$ em relação a $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}''$ é

$$\begin{aligned} [(S \circ T)]_{\mathcal{E}'' \leftarrow \mathcal{E}} &= [S]_{\mathcal{E}'' \leftarrow \mathcal{E}'}[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1,

$$\begin{aligned} \left[(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}''} &= [(S \circ T)]_{\mathcal{E}'' \leftarrow \mathcal{E}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ a + b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $(S \circ T)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ax + (a + b)x^2$, o que está de acordo com a solução encontrada para o Exemplo 8 da Seção 6.5. ◆

No Teorema 7 da Seção 6.6, provamos que uma transformação linear é invertível se, e somente se, ela for injetora e sobrejetora (isto é, se ela for um isomorfismo). Quando os espaços vetoriais envolvidos têm dimensão finita, podemos utilizar os métodos matriciais que desenvolvemos para encontrar a inversa de uma transformação linear dessas.

◆ TEOREMA 3

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais n-dimensionais V e W, e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para V e W, respectivamente. Então, T é invertível se, e somente se, a matriz $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ for invertível. Nesse caso,

$$([T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

DEMONSTRAÇÃO: Observe que as matrizes de T e de T^{-1} (se existir) são $n \times n$. Se T é invertível, então $T^{-1} \circ T = I_V$. Aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\begin{aligned} I_n = [I_V]_{\mathcal{B}} &= [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} \\ &= [T^{-1}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \end{aligned}$$

Isso mostra que $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ é invertível e que $([T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

Reciprocamente, considere invertível $A = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. Para provar que T é invertível, é suficiente mostrar que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. (Por quê?) Para isso, seja $\mathbf{v}$ no núcleo de T. Então, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, por isso

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{0}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{0}$$

o que significa que $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ está no espaço anulado pela matriz invertível A. Pelo Teorema Fundamental, isso implica que $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$, o que, por sua vez, implica que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, como desejado. ◆

EXEMPLO 7 No Exemplo 12 da Seção 6.6, provamos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, definida por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x$$

é injetora e sobrejetora, e por isso invertível. Encontre T^{-1}.

SOLUÇÃO: No Exemplo 6, encontramos a matriz de T em relação às bases canônicas $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1$ respectivamente:

$$[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do Teorema 3, segue que a matriz de T^{-1} em relação às bases $\mathcal{E}'$ e $\mathcal{E}$ é

$$[T^{-1}]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'} = ([T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 1,

$$\begin{aligned} [T^{-1}(a + bx)]_{\mathcal{E}} &= [T^{-1}]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}[a + bx]_{\mathcal{E}'} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \\ b - a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isso significa que

$$T^{-1}(a + bx) = a\mathbf{e}_1 + (b - a)\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b - a \end{bmatrix}$$

(Note que a escolha da base canônica torna esse último cálculo completamente irrelevante.) ◆

O próximo exemplo, uma continuação do Exemplo 4, mostra que matrizes podem ser usadas no Cálculo, em certos problemas de integração. Em um curso de Cálculo, a integral específica que consideraremos é normalmente obtida pela aplicação, duas vezes, do método da integração por partes. Compare esse método com o nosso.

EXEMPLO 8 Prove que o operador diferencial $\mathcal{D}$*, restrito ao subespaço $W = \text{ger}(e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x})$ de $\mathcal{D}$, é invertível, e use esse fato para encontrar a primitiva

$$\int x^2e^{3x}\,dx$$

SOLUÇÃO: No Exemplo 4, descobrimos que a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ de W é

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, pelo Teorema 3, temos que D é invertível em W, e a matriz de D^{-1} é

$$[D^{-1}]_{\mathcal{B}} = ([D]_{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Como o cálculo da primitiva é a operação *inversa da derivação*, essa é a matriz correspondente à primitivação em W. Queremos encontrar uma primitiva para a função x^2e^{3x} cujo vetor de coordenadas é

$$[x^2e^{3x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, pelo Teorema 1,

$$\begin{aligned} \left[\int x^2e^{3x}\,dx\right]_{\mathcal{B}} &= [D^{-1}(x^2e^{3x})]_{\mathcal{B}} \\ &= [D^{-1}]_{\mathcal{B}}[x^2e^{3x}]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{27} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com isso,

$$\int x^2e^{3x}\,dx = \tfrac{2}{27}e^{3x} - \tfrac{2}{9}xe^{3x} + \tfrac{1}{3}x^2e^{3x}$$

(Para ficar completamente correto, precisamos adicionar uma constante de integração. Ela não aparece aqui, pois estamos trabalhando com transformações *lineares*, que devem levar o vetor nulo no vetor nulo, o que força a constante de integração a ser zero também.) ◆

Atenção: Em geral, o operador diferencial *não* é uma transformação invertível. (Veja o Exercício 22.) O exemplo anterior mostra que, fazendo as restrições necessárias, às vezes ela é invertível. Vamos trabalhar mais essa questão nos Exercícios de 27 a 30.

* N.T.: Confira o Exemplo 3 da Seção 6.5

Mudança de Base e Semelhança

Suponha que $T: V \to V$ seja uma transformação linear, e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sejam duas bases diferentes para V. É natural se perguntar se as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$ estão relacionadas, e como. A resposta a essa questão é extremamente satisfatória, e se relaciona com algumas das questões que consideramos no Capítulo 4.

A Figura 2 sugere uma maneira de resolver esse problema. Seguindo as setas ao redor do diagrama, do canto esquerdo superior ao canto direito inferior, de duas maneiras diferentes, mas equivalentes, vemos que $I \circ T = T \circ I$, o que já sabíamos, pois ambos são iguais a T. Entretanto, se a versão "de cima" de T é em relação à base $\mathcal{C}$ e a versão "de baixo" é em relação à base $\mathcal{B}$, então $T = I \circ T = T \circ I$ é em relação à base $\mathcal{C}$ em seu domínio e em relação à base $\mathcal{B}$ em seu contradomínio.

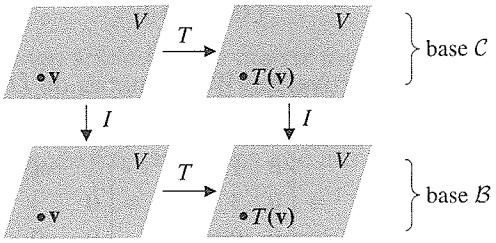


Figura 2 $I \circ T = T \circ I$

Assim, a matriz de T, neste caso, é $[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Mas

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = [I \circ T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$$

e

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = [T \circ I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$$

Portanto, $[I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

A partir do Exemplo 5, sabemos que $[I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$, a matriz (invertível) de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$. Se denotarmos essa matriz por P, então também teremos que

$$P^{-1} = (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

Com essa notação,

$$P[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P$$

portanto
$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P \quad \text{ou} \quad [T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$$

Assim, as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$ são, na terminologia da Seção 4.5, semelhantes.

Vamos resumir essa discussão em um teorema.

◆ TEOREMA 4

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, e seja $T: V \to V$ uma transformação linear. Então:

$$[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$$

onde P é a matriz de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$.

Observação:

- Uma maneira de nos ajudar a lembrar que P deve ser a matriz de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$, e não de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$, é olhar o que diz o Teorema 4 quando escrito com todos os detalhes. Como mostramos no diagrama a seguir, os "subscritos internos" devem ser os mesmos (todos $\mathcal{B}$s), e como que se cancelar, sobrando apenas os "subscritos externos", que são ambos $\mathcal{C}$s.

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$$

mesmo mesmo

mesmo

O Teorema 4 é usado freqüentemente quando estamos tentando encontrar uma base em relação à qual a matriz de uma transformação linear é particularmente simples. Por exemplo, podemos perguntar se existe uma base $\mathcal{C}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ de $T: V \to V$ seja uma matriz diagonal. O Exemplo 9 ilustra essa aplicação.

EXEMPLO 9 Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x + 2y \end{bmatrix}$$

Se possível, encontre uma base $\mathcal{C}$ para $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de T em relação à base $\mathcal{C}$ seja diagonal.

SOLUÇÃO: A matriz de T em relação à base canônica $\mathcal{E}$ é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é diagonalizável, como já vimos no Exemplo 3 da Seção 4.5. De fato, se

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

então $P^{-1}[T]_{\mathcal{E}}P = D$. Se tomarmos $\mathcal{C}$ como a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelas colunas de P, então P será a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{E}$. Pelo Teorema 4,

$$[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{E}}P = D$$

portanto, a matriz de T em relação à base $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$ é diagonal. ◈

Observações:

- É fácil verificar que essa solução está correta, calculando $[T]_{\mathcal{C}}$ diretamente. Vemos que

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

  Assim, os vetores de coordenadas que formam as colunas de $[T]_{\mathcal{C}}$ são

$$\left[T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left[T\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

  o que está de acordo com a solução apresentada anteriormente.
- O procedimento geral para tratar de um problema como o exposto no Exemplo 9 é tomar a matriz canônica $[T]_{\mathcal{E}}$ e determinar se ela é diagonalizável, e, nesse caso, encontrar bases para seus auto-espaços, como feito no Capítulo 4. A solução prossegue exatamente como descrito no exemplo anterior.

A definição a seguir é motivada pelo Exemplo 9.

Definição Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Então, T é ***diagonalizável*** se existir uma base $\mathcal{C}$ para V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz diagonal.

Não é difícil provar que, se $\mathcal{B}$ for uma base *qualquer* para V, então T será diagonalizável se, e somente se, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for diagonalizável. Essencialmente, foi isso que fizemos, para um caso particular, no último exemplo. No Exercício 42, será pedido que você prove esse resultado em geral.

Às vezes é mais fácil escrever a matriz de uma transformação linear em relação a uma base "não canônica". Podemos então reverter o processo utilizado no Exemplo 9 para encontrar a matriz canônica. Vamos revisitar o Exemplo 5 da Seção 3.6 para ilustrar essa idéia.

EXEMPLO 10 Seja ℓ a linha através da origem de $\mathbb{R}^2$ com vetor de direção $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$. Encontre a matriz canônica da projeção sobre ℓ.

SOLUÇÃO: Denotemos por T a projeção. Não há nenhum problema em assumir que $\mathbf{d}$ é um vetor unitário (isto é, $d_1^2 + d_2^2 = 1$), pois qualquer múltiplo não nulo de $\mathbf{d}$ serve como vetor de direção para ℓ. Seja $\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{bmatrix}$; temos que $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ são ortogonais. Como $\mathbf{d}'$ também é um vetor unitário, o conjunto $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}, \mathbf{d}'\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

Como vemos na Figura 3, $T(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$ e $T(\mathbf{d}') = \mathbf{0}$. Portanto,

$$[T(\mathbf{d})]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(\mathbf{d}')]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

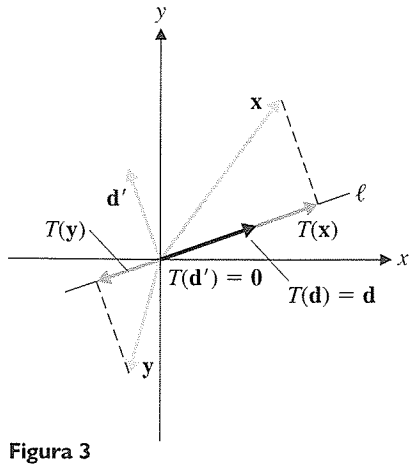


Figura 3

assim,

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base de $\mathcal{D}$ para a base canônica $\mathcal{E}$ é

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{D}} = \begin{bmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{bmatrix}$$

portanto, a matriz de mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{D}$ é

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{D}})^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{bmatrix}$$

Então, pelo Teorema 4, a matriz canônica de T é

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{E}} &= P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{D}}P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1^2 & d_1d_2 \\ d_1d_2 & d_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que está de acordo com a parte (b) do Exemplo 5 da Seção 3.6.

EXEMPLO 11 Seja $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = p(2x - 1)$$

(a) Encontre a matriz de T em relação à base $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.
(b) Prove que T é diagonalizável e encontre uma base $\mathcal{C}$ para $\mathcal{P}_2$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz diagonal.

SOLUÇÃO: (a) No Exemplo 3, descobrimos que a matriz de T em relação à base canônica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{E}$ é

$$P = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de T em relação à base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= P^{-1}[T]_{\mathcal{E}}P \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Verifique isso.)

(b) Os autovalores de $[T]_{\mathcal{E}}$ são 1, 2 e 4 (por quê?), por isso sabemos que $[T]_{\mathcal{E}}$ é diagonalizável, pelo Teorema 5 da Seção 4.5. Os autovetores associados a esses autovalores são

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Portanto, tomando

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

temos que $P^{-1}[T]_{\mathcal{E}}P = D$. Além disso, P é a matriz de mudança de base de uma base $\mathcal{C}$ para $\mathcal{E}$, e por isso as colunas de P são os vetores de coordenadas de $\mathcal{C}$ em termos de $\mathcal{E}$. Segue que

$$\mathcal{C} = \{1, -1 + x, 1 - 2x + x^2\}$$

e $[T]_{\mathcal{C}} = D$.

As idéias que acabamos de discutir podem ser generalizadas para relacionar as matrizes $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}$ de uma transformação linear $T : V \to W$, onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases para V e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são bases para W. (Veja o Exercício 44.)

Vamos concluir esta seção revendo o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis e incorporando a ele alguns dos resultados deste capítulo.

TEOREMA 5 Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis: Versão 4

Seja A uma matriz $n \times n$ e seja $T : V \to W$ uma transformação linear cuja matriz $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de V e W, respectivamente, é A. As afirmações a seguir são equivalentes:

a. A é invertível.
b. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única, para todo $\mathbf{b}$ em $\mathbb{R}^n$.
c. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só admite a solução trivial.
d. A forma escalonada de A, por redução por linhas, é I_n.
e. A é um produto de matrizes elementares.
f. posto$(A) = n$
g. nulidade$(A) = 0$
h. Os vetores-coluna de A são linearmente independentes.
i. Os vetores-coluna de A geram $\mathbb{R}^n$.
j. Os vetores-coluna de A formam uma base para $\mathbb{R}^n$.
k Os vetores-linha de A são linearmente independentes.
l. Os vetores-linha de A geram $\mathbb{R}^n$.
m. Os vetores-linha de A formam uma base para $\mathbb{R}^n$.
n. $\det A \neq 0$
o. 0 não é um autovalor de A.
p. T é invertível.
q. T é injetora.
r. T é sobrejetora.
s. $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$
t. $\text{im}(T) = W$

DEMONSTRAÇÃO: A equivalência (q) ⇔ (s) é o Teorema 3 da Seção 6.6, e (r) ⇔ (t) é a definição de sobrejetora. Como A é $n \times n$, devemos ter dim V = dim $W = n$. A partir dos Teoremas 4 e 7 da Seção 6.6, obtemos (p) ⇔ (q) ⇔ (r). Finalmente, conectamos as últimas cinco afirmações às outras usando o Teorema 3 desta seção para obter (a) ⇔ (p). ◆

◆ EXERCÍCIOS 6.7 ◆

Nos Exercícios de 1 a 12, encontre a matriz $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ da transformação linear $T: V \to W$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de V e W, respectivamente. Verifique o Teorema 1 para o vetor **v** *calculando $T(\mathbf{v})$ diretamente e usando o teorema.*

1. $T: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por $T(a + bx) = b - ax$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{1, x\}$, $\mathbf{v} = p(x) = 4 + 2x$

2. $T: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por $T(a + bx) = b - ax$, $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\}$, $\mathcal{C} = \{1, x\}$, $\mathbf{v} = p(x) = 4 + 2x$

3. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(x + 2)$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{C} = \{1, x + 2, (x + 2)^2\}$, $\mathbf{v} = p(x) = a + bx + cx^2$

4. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(x + 2)$, $\mathcal{B} = \{1, x + 2, (x + 2)^2\}$, $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$, $\mathbf{v} = p(x) = a + bx + cx^2$

5. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{v} = p(x) = a + bx + cx^2$

6. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$, $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v} = p(x) = a + bx + cx^2$

7. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

8. Repita o Exercício 7 com $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

9. $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = A^T$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, $\mathbf{v} = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

10. Repita o Exercício 9 com $\mathcal{B} = \{E_{22}, E_{21}, E_{12}, E_{11}\}$ e $\mathcal{C} = \{E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{11}\}$.

11. $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = AB - BA$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, $\mathbf{v} = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

12. $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = A - A^T$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, $\mathbf{v} = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

13. Considere o subespaço W de $\mathcal{D}$, dado por W = ger(sen x, cos x).

(a) Prove que o operador diferencial D leva W em si mesmo.
(b) Encontre a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{\text{sen } x, \cos x\}$.
(c) Calcule indiretamente a derivada de $f(x) = 3 \text{ sen } x - 5 \cos x$, usando o Teorema 1, e verifique que ela está de acordo com $f'(x)$ calculada diretamente.

14. Considere o subespaço W de $\mathcal{D}$, dado por $W = \text{ger}(e^{2x}, e^{-2x})$.

(a) Prove que o operador diferencial D leva W em si mesmo.
(b) Encontre a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{e^{2x}, e^{-2x}\}$.
(c) Calcule indiretamente a derivada de $f(x) = e^{2x} - 3e^{-2x}$, usando o Teorema 1, e verifique que ela está de acordo com $f'(x)$ calculada diretamente.

15. Considere o subespaço W de $\mathcal{D}$, dado por $W = \text{ger}(e^{2x}, e^{2x} \cos x, e^{2x} \text{ sen } x)$.

(a) Encontre a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{e^{2x}, e^{2x} \cos x, e^{2x} \text{ sen } x\}$.
(b) Calcule indiretamente a derivada de $f(x) = 3e^{2x} - e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \text{ sen } x$, usando o Teorema 1, e verifique que ela está de acordo com $f'(x)$ calculada diretamente.

16. Considere o subespaço W de $\mathcal{D}$, dado por $W = \text{ger}(\cos x, \text{ sen } x, x \cos x, x \text{ sen } x)$.

(a) Encontre a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{\cos x, \text{ sen } x, x \cos x, x \text{ sen } x\}$.
(b) Calcule indiretamente a derivada de $f(x) = \cos x + 2x \cos x$, usando o Teorema 1, e verifique que ela está de acordo com $f'(x)$ calculada diretamente.

Nos Exercícios 17 e 18, $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares; $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são bases para U, V e W, respectivamente. Calcule $[S \circ T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$ de duas maneiras: (a) encontre $S \circ T$ diretamente e então calcule sua matriz, e

(b) encontre as matrizes de S e de T separadamente e use o Teorema 2.

17. $T: \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$, $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2b \\ 2a - b \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{1, x\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

18. $T: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(x+1)$, $S: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $S(p(x)) = p(x+1)$, $\mathcal{B} = \{1, x\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$

Nos Exercícios de 19 a 26, determine se a transformação linear T é invertível considerando sua matriz em relação às bases canônicas. Se T é invertível, use o Teorema 3 e o método do Exemplo 7 para encontrar T^{-1}.

19. T do Exercício 1 **20.** T do Exercício 5

21. T do Exercício 3

22. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$

23. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$

24. $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = AB$, onde $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

25. T do Exercício 11 **26.** T do Exercício 12

Nos Exercícios de 27 a 30, use o método do Exemplo 8 para calcular a integral dada.

27. $\int (\operatorname{sen} x - 3\cos x)\, dx$ (veja o Exercício 13)

28. $\int 5e^{-2x}\, dx$ (veja o Exercício 14)

29. $\int (e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\operatorname{sen} x)\, dx$ (veja o Exercício 15)

30. $\int (x\cos x + x\operatorname{sen} x)\, dx$ (veja o Exercício 16)

Nos Exercícios de 31 a 36, é dada uma transformação linear $T: V \to V$. Se possível, encontre uma base $\mathcal{C}$ para V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ de T, em relação à base $\mathcal{C}$, seja diagonal.

31. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4b \\ a + 5b \end{bmatrix}$

32. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ a + b \end{bmatrix}$

33. $T: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por $T(a + bx) = (4a + 2b) + (a + 3b)x$

34. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(x+1)$

35. $T: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$

36. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(3x+2)$

37. Seja ℓ a linha através da origem de $\mathbb{R}^2$ com vetor de direção $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$. Use o método do Exemplo 10 para encontrar a matriz canônica da reflexão por ℓ.

38. Seja W o plano em $\mathbb{R}^3$ com equação $x - y + 2z = 0$. Use o método do Exemplo 10 para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal sobre W. Verifique se sua resposta está correta, usando-a para calcular a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre W, onde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Compare sua resposta com o Exemplo 4 da Seção 5.3. (*Sugestão:* encontre uma decomposição ortogonal de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^3 = W + W^{\perp}$, usando uma base ortogonal de W. Veja o Exemplo 3 da Seção 5.2.)

39. Seja $T: V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para V e W, respectivamente. Prove que a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é única — isto é, se A é uma matriz tal que $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{v}$ em V, então $A = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. (*Sugestão:* encontre valores de $\mathbf{v}$ que provem isso, uma coluna de cada vez.)

Nos Exercícios de 40 a 45, seja $T: V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, V e W. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para V e W, respectivamente, e seja $A = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

40. Prove que nulidade(T) = nulidade(A).

41. Prove que posto(T) = posto(A).

42. Se $V = W$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, prove que T é diagonalizável se, e somente se, A é diagonalizável.

43. Use os resultados desta seção para dar uma demonstração, baseada em matrizes, do Teorema do Posto (Teorema 2 da Seção 6.6).

44. Se $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ também são bases de V e W, respectivamente, qual é a relação entre $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'}$? Demonstre sua afirmação.

45. Se dim $V = n$ e dim $W = m$, demonstre que $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{mn}$. (Veja os exercícios da Seção 6.5.)[*Sugestão:* sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para V e W, respectivamente. Prove que a aplicação $\varphi(T) = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$, para T em $\mathcal{L}(V, W)$, define uma transformação linear $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \to M_{mn}$ que é um isomorfismo.]