Como ler Saccheri

Ricardo Bianconi

1 Introdução

Em sua obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides justificado de toda falha), publicada em Milão em 1733, Saccheri também apresenta uma prova falha deste postulado. O que distingue esta obra é que existem muitos resultados corretos e úteis no desenvolvimento posterior das chamadas geometrias não euclideanas (principalmente a hiperbólica). A idéia de Saccheri era de supor que este postulado era falso e tentar daí provar alguma contradição. Ele partiu de quadriláteros de Saccheri $\boxed{\mathrm{S}}ABCD$, (quadriláteros convexos, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \perp \overline{BC} \perp \overline{CD}$) e considerou **três hipóteses**, a saber, $\angle BAC$ é reto (a *hipótese do ângulo reto*), ou $\angle BAC$ é obtuso (a *hipótese do ângulo obtuso*), ou $\angle BAC$ é agudo (a *hipótese do ângulo agudo*). Ele então mostrou que a hipótese do ângulo reto era equivalente ao quinto postulado; a do ângulo obtuso era contraditória, mas do ângulo agudo teve muitas dificuldades para chegar a uma contradição. Estudiosos da obra de Saccheri acham que no final de sua obra ele "provou" o quinto postulado (numa gritante falha de argumentação, completamente fora da fineza dos argumentos anteriores), devido ao medo da censura da Igreja.

Posteriormente, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também escreveu um trabalho sobre a teoria das paralelas em que aprofundou mais os resultados de Saccheri, mas também tentando provar o postulado por contradição. Por fim, os resultados de Nikolai I. Lobatchevskii (1793-1856) e Johann Bolyai (1802-1860), publicados em torno de 1824, introduziram a geometria hiperbólica, mostrando assim que o postulado das paralelas não pode ser provado a partir dos outros postulados da geometria euclideana.

Vamos apresentar aqui diversos dos resultados dessa obra, que merece também ser lida.

2 Os quadriláteros de Saccheri

Um quadrilátero convexo $ABCD$ é chamado de quadrilátero de Saccheri se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e oa ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são retos.

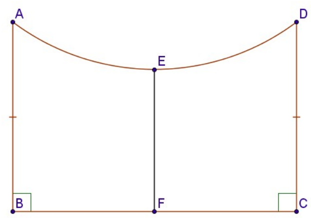

Figura 1: Quadrilátero de Saccheri. O lado $\overline{AD}$ foi desenhado curvo, para evitar a ilusão de que sejam retângulos.

Nesta seção ainda não assumimos nenhuma forma de postulado de paralelismo. Usamos apenas os postulados da Geometria (Métrica) Neutra.

Comecemos com dois resultados preliminares importantes.

Exercício 1: Suponhamos que $\triangle ABC$ seja retângulo, com $\angle ABC$ reto. Sejam D e E dois pontos que estejam no plano daquele triângulo, do mesmo lado em relação à reta ℓ_{AC}, e tais que $\overline{AB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{AE}$. Mostre que $\angle ADC$ é obtuso e $\angle AEC$ é agudo se, e somente se $\overline{DC} < \overline{AC} < \overline{EC}$. Veja a figura 2. Sugestões: que o ângulo $\angle ADC$ será obtuso se, e somente se, o ponto D estiver no interior do triângulo $\triangle ABC$, obtendo a seguir uma das desigualdades. Mostre que o ângulo $\angle AEC$ será agudo se, e somente se, o ponto E estiver no interior do ângulo $\angle ACBN$, mas no exterior do triângulo $\triangle ABC$.

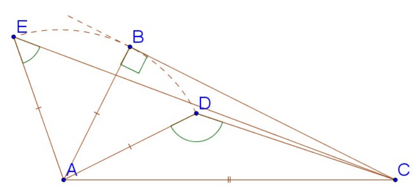

Figura 2: Desigualdade de ângulos e de lados de triângulos.

Exercício 2: Sejam ℓ_1 e ℓ_2 duas linha distintas, $\ell_1 \not\parallel \ell_2$, $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$ uma régua, e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = d(P, Q)$, sendo que $P \in \ell_2$, $Q \in \ell_1$, $\overline{PX} \perp \ell_1$ e $x = f(P)$. Mostre que h é função contínua.

Estudemos algumas propriedades dos quadriláteros de Saccheri e de Lambert, definidos um pouco mais adiante.

Exercício 3: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri. Mostre que se E for o ponto médio de $\overline{AB}$ e F for o ponto médio de $\overline{BC}$, então o segmento $\overline{EF}$ é perpendicular aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Com a notação do exercício, o quadrilátero $EFCCD$ é chamado de quadrilátero de Lambert.

Exercício 4: (Saccheri, Prop. I) Dado o quadrilátero $\square ABCD$, mostre que se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\angle BAD \equiv \angle ADC$, então $\angle ABC \equiv \angle BCD$. (Use LAL nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle DCA$ e, depois, LLL nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$.)

Exercício 5: (Saccheri, Prop. II) Dado o quadrilátero $\square ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $\angle BAD \equiv \angle ADC$, se $A - E - D$ e $B - F - C$, $\overline{AE} \equiv \overline{ED}$ e $\overline{BF} \equiv \overline{FC}$, mostre que $\overline{EF}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ e também ao segmento $\overline{BC}$. (Os triângulos $\triangle ABF$ e $\triangle DCF$ são congruentes, por LAL; daí, $\overline{AF} \equiv \overline{DF}$; por LLL, $\triangle AEF \equiv \triangle DEF$ e, portanto, $\angle AEF \equiv \angle DEF$ são retos; por LAL, $\triangle AEB \equiv \triangle DEC$ e, portanto, $\overline{BE} \equiv \overline{CE}$; por fim, por LLL, $\triangle BEF \equiv \triangle CEF$, do que se conclui que $\angle BFE \equiv \angle CFE$ são retos.)

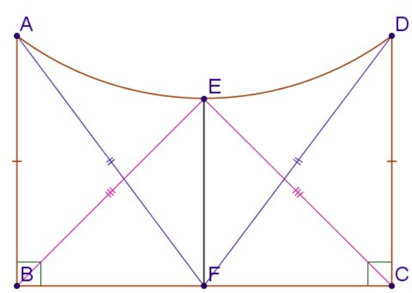

Figura 3: O segmento $\overline{EF}$ é perpendicular aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Exercício 6: (Saccheri, Prop. III e IV) Dado o quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}ABCD$ (com $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $\angle DAB$ e $\angle ADC$ são retos), seja $\alpha = m(\angle ABC)$. Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e só se, $BC > AD$;

(b) $\alpha = 90$ se, e só se, $BC = AD$;

(c) $\alpha > 90$ se, e só se, $BC < AD$.

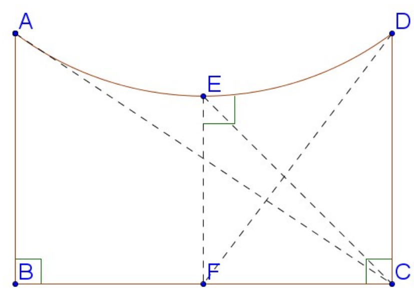

Figura 4: Desigualdade de ângulos e de lados de um quadrilátero de Saccheri.

Exercício 7: (Variante do anterior) Dado o quadrilátero de Lambert $\boxed{\text{L}}EBCF$, seja $\alpha = m(\angle EDC)$. Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e só se, $AB < CD$;

(b) $\alpha = 90$ se, e só se, $AB = CD$;

(c) $\alpha > 90$ se, e só se, $AB > CD$.

Sugestão: Compare os triângulos $\triangle DFC$ e $\triangle EFC$.

Exercício 8: (Saccheri, Prop. V, VI e VII) Sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri e $\alpha = m(\angle ABC)$. Mostre que, se valer uma das hipóteses, $\alpha < 90$, ou $\alpha = 90$, ou $\alpha > 90$, então, para todo quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}EFGH$ vale a mesma hipótese.

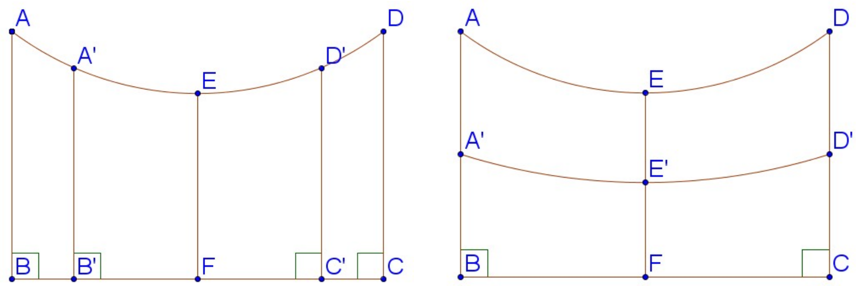

Figura 5: Caso particular implica no caso geral, para quadriláteros de Saccheri.

Solução e/ou Sugestão: (Acompanhe a Figura 5.) Comece com a hipótese do ângulo reto. Seja $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ um quadrilátero de Saccheri tal que $m(\angle ABC) = 90$. Sejam $P \in r_{BC}$ e $Q \in r_{AD}$ tais que $\overline{PQ} \perp r_{AD}$. Sejam $P_1, P_2 \in r_{BC}$ e $Q_1, Q_2 \in r_{AD}$ tais que $P_1 - C - P$, $\overline{CP_1} \equiv \overline{CP}$, $P_2 - B - P$, $\overline{AP_2} \equiv \overline{AP}$, $\overline{P_1Q_1} \perp r_{AD} \perp \overline{P_2Q_2}$. Mostre que $\boxed{\text{S}}\,QPP_iQ_i$ (isto é, $\square QPP_iQ_i$ é de Saccheri), para $i = 1, 2$. Mostre que estes quadriláteros também satisfazem a hipótese do ângulo reto. Finalmente, sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ que satisfaz a hipótese do ângulo reto e $\boxed{\text{S}}\,EFGH$ um outro quadrilátero de Saccheri. Seja $\boxed{\text{S}}\,E'F'G'H'$ congruente a $\boxed{\text{S}}\,EFGH$, tal que $\overline{E'H'} \subset r_{AD}$ o ponto médio de $\overline{E'H'}$ coincide com o ponto médio de $\overline{AD}$ e F', G' do mesmo lado que B e C em relação a r_{AD}. Pode ser que $E' = A$, ou $E' - A - D - H'$, ou $A - E' - H' - D$, etc. Por exemplo, se $E' - A - D - H'$, sejam $K \in \overline{H'G'} \cap r_{BC}$ e $L \in \overline{E'F'} \cap r_{BC}$ (por que existem tais pontos?). Pelo argumento acima, temos que $\boxed{\text{S}}\,E'LKH'$ e que $\angle K \equiv \angle L$ são retos. Depois, use o mesmo argumento com $\boxed{\text{L}}\,MNG'H'$, sendo que M é o ponto médio de $\overline{E'H'}$ e N o ponto médio de $\overline{F'G'}$. (Faça os outros casos.)

Para o caso da hipótese do ângulo agudo, sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ tal que valha a hipótese $\alpha < 90$, M o ponto médio de $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Pelo exercício anterior, $MN < CD$. Se $P \in r_{BC}$, $P \neq N$, seja $Q \in r_{AD}$ tal que $\overline{PQ} \perp r_{AD}$. Mostre que se $PQ \leq MN$ então existem $R \in r_{BC}$ e $S \in r_{BC}$ tais que $R \neq M$, $S \neq N$ e $r_{BC} \perp \overline{RS} \perp r_{AD}$. Conclua daí que $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ tem que satisfazer a hipótese do ângulo reto. Portanto $MN < PQ$, etc.

Para o caso da hipótese do ângulo obtuso, faça o mesmo.

Exercício 9: (Saccheri, Prop. VIII) Sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, $G-A-B$, $H-A-C$, $\alpha = m(\angle ABC)$, $\beta = m(\angle DCA)$ e $\gamma = m(\angle GAH)$. Mostre que

(a) se $\alpha < 90$, então $\beta < \gamma$;

(b) se $\alpha = 90$, então $\beta = \gamma$;

(c) se $\alpha > 90$, então $\beta > \gamma$.

Exercício 10: (Saccheri, Prop. IX) Sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, $\alpha = m(\angle ABC)$, $\beta = m(\angle DCA)$ e $\gamma = m(\angle DAC)$. Mostre que

(a) se $\alpha < 90$, então $\beta + \gamma < 90$;

(b) se $\alpha = 90$, então $\beta + \gamma = 90$;

(c) se $\alpha > 90$, então $\beta + \gamma > 90$.

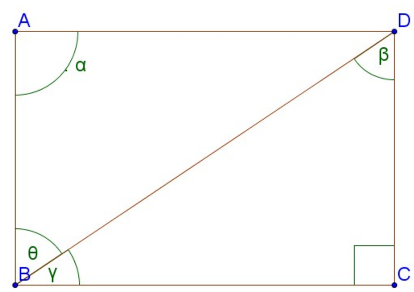

Figura 6: Soma de ângulos agudos de um triângulo retângulo.

Exercício 11: (Saccheri, Prop. X) Dados $A-B-C$ e D fora de r_{AB} e tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, mostre que $DC > DA$ se, e só se, $BC > BA$.

Vamos mostrar a seguir que a hipótese do ângulo obtuso leva a uma contradição. Isto será feito na Proposição XII. Para facilitar a argumentação, dividimos sua demonstração em duas partes.

Exercício 12: Suponha que valha a hipótese do ângulo obtuso para quadriláteros de Saccheri. Suponha que $A-B-C$, $A-E-D$, $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ e $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, e que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Mostre que $\overline{AE} < \overline{ED}$.

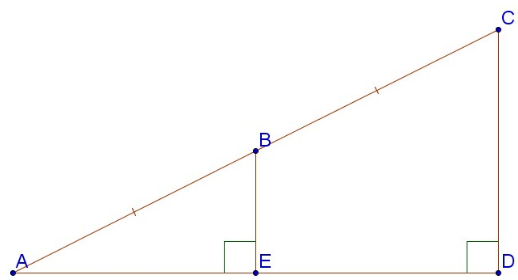

Figura 7: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes.

Solução e/ou Sugestão: Pelo Postulado de Pasch, sabemos que a linha contendo o ponto B e perpendicular ao segmento $\overline{BE}$ encontra o lado $\overline{CD}$ do triângulo $\triangle ACD$ no ponto G (exercício: por que não encontra o lado $\overline{AD}$?).

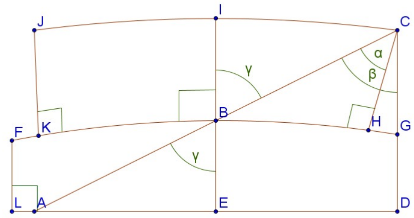

Figura 8: Os ângulos $\angle ABE \equiv \angle IBC < \angle BCH < \angle BCG$.

Sejam F o ponto no mesmo semiplano de G e $L \in \ell_{AD}$, tais que $\overline{FL} \perp \ell_{AD}$, e $\overline{FL} \equiv \overline{GD}$. Então $\boxed{\text{S}}\, FLDG$, e $\overline{BE}$ liga os pontos médios dos lados $\overline{FG}$ e $\overline{LD}$, e o ângulo $\angle LFG$ é obtuso. Sejam H, I, J e K pontos, tais que $H, K \in \ell_{FG}$, $\boxed{\text{S}}\, JKHC$, com I o ponto médio de $\overline{JC}$, $\overline{JK} \perp \overline{KH} \perp \overline{CH}$. Observe-se que $K - H - G$, pois $\angle KGC$ é agudo. O ângulo $\angle GCI \equiv \angle CJK$ é obtuso, e sabemos que $\angle ABE \equiv \angle IBC < \angle BCH < \angle BCG$.

Agora, seja $Q \in \overline{CD}$, tal que $\overline{BQ} \perp \overline{BD}$.

Comparando-se os triângulos retângulos $\triangle ABE$, $\triangle BCQ$, $\triangle DBQ$ e $\triangle DBE$, das desigualdades de ângulos acima obtidas, concluímos que $\overline{AE} < \overline{BQ} < \overline{ED}$. $\square$

Exercício 13: (Saccheri, Prop. XII) Mostre que a hipótese do ângulo obtuso é contraditória.

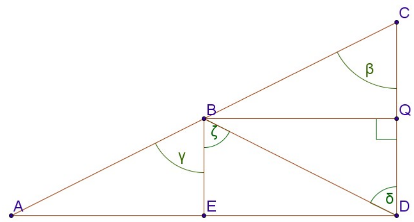

Figura 9: Os lados $\overline{AE} < \overline{BQ} < \overline{ED}$.

Solução e/ou Sugestão: Primeiramente mostremos que, dados os pontos A, B, C, D, tais que B e D estão no mesmo semiplano relativo à reta ℓ_{AD}, e tais que $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ e $\angle DAB$ agudo, então ℓ_{AB} concorre com a reta ℓ_{CD} em um ponto P.

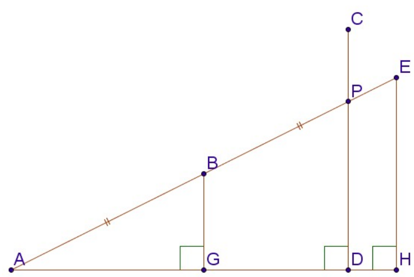

Figura 10: As retas ℓ_{AD} e ℓ_{CD} são concorrentes no ponto P.

Seja $G \in \ell AD$, tal que $\overline{BG} \perp \ell AD$. Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \cdot \overline{AG} > \overline{AD}$ (por que existe?). Seja E na semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que $\overline{AE} = n \cdot \overline{AB}$. Seja $H \in \ell_{AD}$, tal que $\overline{EH} \perp \ell_{AD}$. Pelo exercício anterior, $n \cdot \overline{AG} < \overline{AH}$, ou seja, vale a relação $A - D - H$. Pelo postulado de Pasch, aplicado ao triângulo $\triangle AEH$ e à reta ℓ_{CD}, existe um ponto $P \in \overline{AE}$, tal que $P.I.\ell_{CD}$.

Agora suponha que exista um quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}\,DABC$, satisfazendo a hipótese do ângulo obtuso (no caso, o ângulo $\angle ADC \equiv \angle BCD$ obtuso). Os suplementares dos ângulos $\angle ADC$ e $\angle BCD$ são agudos e, pela argumentação acima, sabemos que existem pontos P e Q, tais que $B - A - P$ e $A - B - Q$, e que incidem na reta ℓ_{CD}. Ou seja, as retas ℓ_{AB} e $|ell_{CD}$, sendo supostamente distintas, têm dois pontos distintos em comum, em direta afronta ao primeiro postulado.

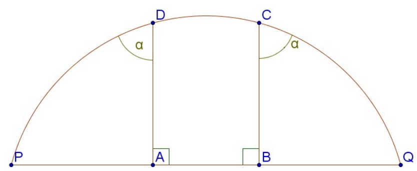

Figura 11: Hipótese do ângulo obtuso é contraditória.

Exercício 14: Mostre que todo triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos. (Lembre-se que existem triângulos equiláteros, isósceles e escalenos.)

Solução e/ou Sugestão: Se o maior ângulo do $\triangle ABC$ for agudo, então todos os outros, sendo menores ou congruentes a este, serão também agudos.

Caso $\triangle ABC$ tenha uma ângulo reto ou obtuso, seu suplementar (sendo um ângulo externo) será agudo e, portanto, pela Prop. 16 de Euclides (o ângulo externo do triângulo é maior do que os dois ângulos internos não adjacentes), os outros dois ângulos de $\triangle ABC$ deverão ser agudos.

Exercício 15: Mostre que a soma dos ângulos (internos) de um triângulo retângulo mede 180° se, e somente se, valer a hipótese do ângulo reto para os quadriláteros de Saccheri. Mostre que a mesma equivalência vale para qualquer triângulo, não necessariamente retângulo.

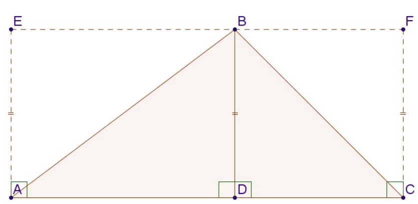

Figura 12: Hipótese do ângulo reto: soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180°.

Solução e/ou Sugestão: Os triângulos retângulos já foram tratados no Exercício 10.

Podemos supor que o maior lado é $\overline{AC}$ e, portanto, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle BCA$ são agudos. Daí, existe um ponto D, tal que $A-D-C$ e $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

(por que?). Agora é só somar os ângulos dos triângulos retângulos $\triangle BDA$ e $\triangle BDC$.

Exercício 16: Mostre que a soma dos ângulos (internos) de um triângulo retângulo mede estritamente menos que 180° se, e somente se, valer a hipótese do ângulo agudo para os quadriláteros de Saccheri. Mostre que a mesma equivalência vale para qualquer triângulo, não necessariamente retângulo.

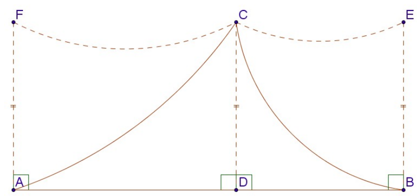

Figura 13: Hipótese do ângulo agudo: soma dos ângulos de um triângulo é estritamente menor que 180°.

Solução e/ou Sugestão: Os triângulos retângulos já foram tratados no Exercício 10.

Podemos supor que o maior lado é $\overline{AB}$ e, portanto, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$ são agudos. Daí, existe um ponto D, tal que $A - D - B$ e $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (por que?). Agora é só somar os ângulos dos triângulos retângulos $\triangle CDA$ e $\triangle CDB$.