Correção de erros,

1 p. $\boxed{VII}$ -14 Exer 7, 7 deve

ser

(1) $\overline{AC} \cup \overline{CB} = \overline{AB}$

(e não $\overline{AC}$!)

2 Axioma $\boxed{I3}$ deveria ser:

Dado $A \neq B$, $\exists C$ tal que A, B, C são não-colineares.

(Eu falei "existe 3 pontos não-colineares" que é equivalente, mas assim é mais claro.)

(Porque eles são equivalentes?)

VIII RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exer. 7.1: Resolução

I. $(A*B*C) \wedge (B*C*D) \Rightarrow \begin{cases} (1)\ A*B*D \\ (2)\ A*C*D \end{cases}$

OBS: a dica é de utilizar a separação de uma reta por um ponto.

Denotamos: $A \overset{B}{\sim} C$ para A e C estão equivalentes relativo o ponto B que esta separando a reta. Isto é: para 3 pontos colineares A, B, C

$A \overset{B}{\sim} C \iff B \notin \overline{AC}$. Sendo que

$\overline{AC} \equiv \{A, C\} \cup \{E : A*E*C\}$,

sabemos: $A \overset{B}{\nsim} C \iff (B \in \overline{AC}$ e $B \neq A, C)$

$\iff A*B*C$. Também, $A*B*C \Rightarrow B \overset{A}{\sim} C$.

Resolução de $\boxed{I.1}$: queremos mostrar $A*B*D$, $\iff A \overset{B}{\nsim} D$.

Estamos dados $(A \overset{B}{\nsim} C) \wedge (C \overset{B}{\sim} D)$.

Daí, $A \overset{B}{\not\sim} D$ //.

(Com mais detalhe, prova por contradição: Caso $A \overset{B}{\sim} D$ então $(A \overset{B}{\sim} D) \wedge (C \overset{B}{\sim} D) \Rightarrow (A \overset{B}{\sim} C)$, por transitividade, uma contradição).

A resolução de I.2, II.1 são parecidos:

I.2 : Queremos $A * C * D$.

Temos $(A * C * D) \Leftrightarrow A \overset{C}{\not\sim} D$.

Dados: $(A * B * C)$, $\Rightarrow A \overset{C}{\sim} B$

$(B * C * D) \Longleftrightarrow B \overset{C}{\not\sim} D$.

$(A \overset{C}{\sim} B) \wedge (B \overset{C}{\not\sim} D) \Rightarrow A \overset{C}{\not\sim} D$ //

II.1

$$\left.\begin{array}{l} (A * B * D) \Leftrightarrow A \overset{B}{\not\sim} D \\ (B * C * D) \Rightarrow C \overset{B}{\sim} D \end{array}\right] \Rightarrow A \overset{B}{\not\sim} C$$

$\Leftrightarrow A * C * D$ //

II 2 é um pouco mais difícil.

Temos que utilizar um resultado anterior: II 1 que fala

$(A * B * D) \wedge (B * C * D) \Rightarrow A * B * C$

Temos então:

$$\left.\begin{array}{l} A * B * D \\ B * C * D \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A * B * C \\ B * C * D \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A \overset{C}{\sim} B \\ B \overset{C}{\nsim} D \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A \overset{C}{\nsim} D \Leftrightarrow A * C * D$$

Exercício 7.2, Resolução

$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \{A, B\} = \{C, D\}$

Prova por contradição:

Caso $\{A, B\} \neq \{C, D\}$ temos 2 possibilidades: ou ambos os pontos são diferentes, ou um é diferente e um igual.

Caso 1: um é igual, por exemplo, $A = C$ mas $B \neq D$. (e também então $D \neq A$, $B \neq C$.)

Agora: $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{E : A * E * B\}$

$\overline{CD} = \{C, D\} \cup \{F : C * F * D\}$

$D \in \overline{AB}$ mas $D \neq B, A$ então $D \notin \{A, B\}$ então $D \in \{E : A * E * B\}$. Isto é, $A * D * B$. Também $B \in \overline{CD}$ mas $B \notin \{C, D\}$ então $C * B * D \Rightarrow A * B * D$ (pois $A = C$). Uma Contradição pois $A * D * B$ e $A * B * D$, mas $\boxed{C2}$ fala que apenas um está no meio.

<u>Caso 2</u>: Temos $A \notin \{C, D\}$ e $B \notin \{C, D\}$ também $C, D \notin \{A, B\}$. Daí,

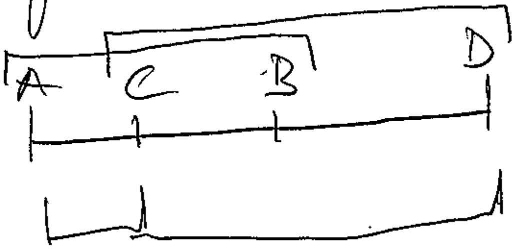
$D \in \overline{AB}, \Rightarrow A * D * B$ (1)

$C \in \overline{AB}, \Rightarrow A * C * B$ (2)

$A \in \overline{CD}, \Rightarrow C * A * D$ (3)

$B \in \overline{CD}, \Rightarrow C * B * D$ (4)

Daí, de (2) e (4) temos por $\boxed{7.1}$ parte (1) que $(A * C * B) \wedge (C * B * D) \Rightarrow (A * C * D)$ que contradiz (3) //



$$A * C * B \wedge C * B * D$$
$$\Downarrow$$
$$A * C * D$$

(no exercício $\boxed{7.1}$ a ordem das letras é diferente! é só trocar C e B).

O Princípio de Indução.

Os inteiros $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ satisfazem a seguinte propriedade:

(Indução) Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz:

(1) $0 \in A$

(2) se $n \in A$, então $(n+1) \in A$

Daí, $A = \mathbb{N}$.

Como utilizar: para provar que uma frase $S(n)$ vále para todos os inteiros, ou para todos os inteiros $\geq m$,

(1) $S(m)$ vále

(2) se $S(n)$ vále então $S(n+1)$ vále.

Daí, através da propriedade de Indução,

$\{n : S(n) \text{ vále}\} = \{n : n \geq m\}$.

exer. $\boxed{7.4}$ (Uma reta contem infinito pontos)

De fato provamos:

Prop: Dado uma reta no plano X, existem (infinito) pontos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ distintos, tal que para cada j, $A_j * A_{j+1} * A_{j+2}$.

$\boxed{7.4}$ Provamos: ① para cada $m \geq 3$, ②
Prova: existe $A_1, .., A_m$ com $\forall j \leq m-2$,
$A_j * A_{j+1} * A_{j+2}$.
② Caso propriedade ① vale, $A_1, .., A_m$
são pontos distintos.

Para $n=2$: existe $A_1 \neq A_2$ na reta (por $\boxed{I2}$).

Caso $n=3$: Por $\boxed{B2}$, existe A_3
com $A_1 * A_2 * A_3$.

$n \Rightarrow (n+1)$: temos $A_1, A_2, ..., A_n$
distintos com $A_j * A_{j+1} * A_{j+2}$ para
cada j, $1 \leq j \leq n-2$. Por $\boxed{B2}$
existe A_{n+1} com $A_{n-1} * A_n * A_{n+1}$.
Isto prove a primeira parte. Temos
apenas a provar que todos são
distintos. Sabemos que $A_1 * A_2 * A_3$
e $A_2 * A_3 * A_4$. Por $\boxed{7.1}$, temos
$A_1 * A_3 * A_4$. Aí $A_1, A_3, A_4, .., A_n, A_{n+1}$

são distintos (pois são n pontos e a hipotese de indução implica isto). Mas tambem, $A_2, A_3, .., A_{n+1}$ são distintos. Daí, $A_1 \neq A_{n+1}$, então $A_1, A_2, .., A_{n+1}$ são distintos. //

Finalmente, $\exists$ infinto pontos na reta: pois se não é infinito, é finito $= n$, (satisfazendo ①) mas se temos n, temos $(n+1)$, uma contradição.

Ou, se $E = \{ m \in \mathbb{N} :$ existem m pontos satisfazendo ① e ② $\}$, sabemos que $3 \in E$, e se $n \in E$ então $(n+1) \in E$, daí $E = \{ m \geq 3 \}$ que é infinito.

Resolução

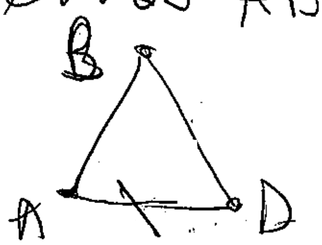
7.6 Mostre que para quaisquer pontos A, B distintos, $\exists C: A * C * B$, (**Dica**: utilize I3, B2, B4!)

Vamos lembrar estes:

$\boxed{I3}$: Dado $A \neq B$, $\exists C$ tal que A, B, C não são colineares.

$\boxed{B2}$ Dado $A \neq B$, $\exists C$: $A * B * C$

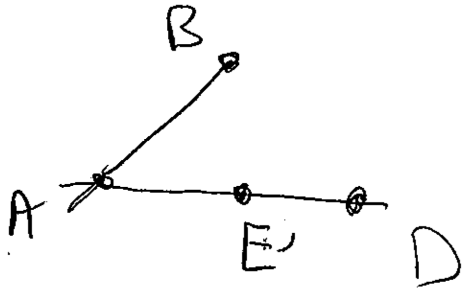
$\boxed{B4}$: Dado $\triangle ABD$, (isto é, A, B, D não-colineares), caso uma reta l passe por $\overline{AD}$, daí passe por exatamente um dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BD}$.



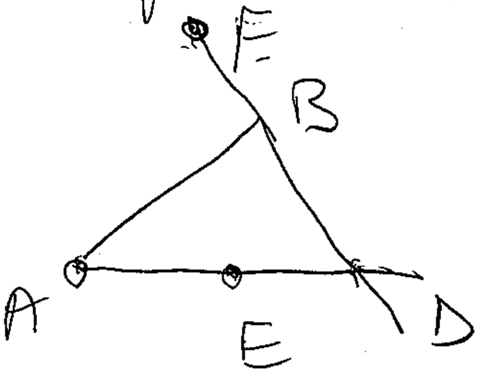
OBS: Se, como na figura, l passe para $\overline{AB}$, isto quer dizer que $\exists C$: $C \in l \cap \overline{AB}$ e $C \neq A, B$.
Daí, $A * C * B$ (pela def. de $\overline{AB}$).

Então nossa estratégia é de criar uma figura como esta, onde podemos saber que l não encontra $\overline{BD}$.

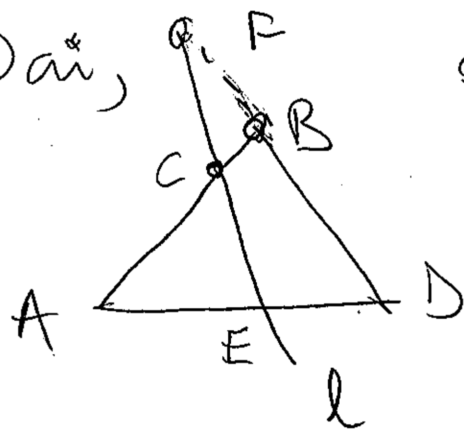
<u>Fizemos assim</u>: Por $\boxed{I3}$, $\exists$ E fora da reta AB. Por $\boxed{B2}$, $\exists$ D com $A * E * D$. Estas retas são distintas.



Queremos desenhar uma reta passando pelo E. Para ~~fazer~~ isto, por $\boxed{B2}$ $\exists$ F tal que $D * B * F$. Por $\boxed{I1}$ $\exists$ reta l passando por E, F. Nota que $l \cap \overline{AD} = \{E\}$ (são retas distintas).



Daí,



estamos na situação desejada, e por $\boxed{B4}$ $\exists$ $C \in \overline{AB}$, $C \neq A, B$ com $l \cap \overline{AB} = \{C\}$, então $A * C * B$. //

<u>ex 7.7</u> (a) Dado $A * C * B$,

Mostre que $\overline{AC} \cup \overline{CB} = \overline{AB}$.

<u>Prova</u>: Dois conjuntos X, Y são iguais $\Leftrightarrow$ $(x \in X) \Leftrightarrow (x \in Y)$ (eles tem os mesmos elementos). Vamos fazer a metade; voces devem fazer a restante em casa!

<u>Vamos mostrar</u>: $x \in \overline{AB} \Rightarrow x \in \overline{AC} \cup \overline{CB}$.

$$\overline{AB} \overset{\text{Def}}{=} \{E : A * E * B\} \cup \{A, B\}.$$

Se $x \in \{A, B\}$, daí $x \in \overline{AC} \cup \overline{CB}$ ✓

se x satisfaz $A * x * B$, tem 2 casos: $x = C$ ou $x \neq C$.

Se $x \in C$, então $x \in \overline{AC} \cup \overline{CB}$ ✓

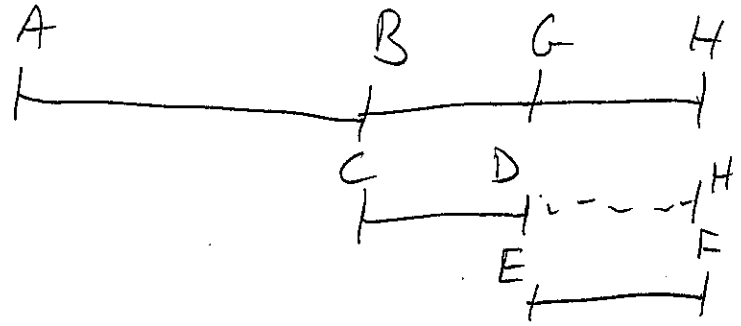
Se $x \neq C$, Consideramos a separação da reta por C, escrevendo: $E \overset{C}{\sim} F \Leftrightarrow C \notin \overline{EF}$. Sabemos pela teorema de separação da reta que dado x na reta $AB \setminus \{C\}$, ou $x \overset{C}{\sim} A$ ou $x \overset{C}{\sim} B$ (não ambos, pois $A * C * B \Rightarrow C \in \overline{AB} \Rightarrow A \overset{C}{\not\sim} B$). Caso $x \in \overline{AB}$ e $x \overset{C}{\sim} A$, daí $C \notin \overline{xA}$. Dos pontos x, C, A apenas um está no meio. C não está no meio; A também não, pois, $(x * A * C) \wedge (A * C * B) \Rightarrow x * A * B$ (por exerc. 7.1) $\Rightarrow x \notin \overline{AB}$. E $A * x * C \Rightarrow x \in \overline{AC}$. Se x estiver no outro lado, o argumento é igual. //

8.1 $(\overline{AB}+\overline{CD})+\overline{EF} = \overline{AB}+(\overline{CD}+\overline{EF})$

Prova: $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AG}$ onde $G\in\overrightarrow{AB}$ é o único ponto ($\boxed{B1}$) tal que $\overline{BG}\cong\overline{CD}$,

$\overline{AG}+\overline{EF}=\overline{AH}$ onde H é o único ponto no $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}$ (porque são iguais?) tal que $\overline{GH}\cong\overline{EF}$,

H' é tal que $H'\in\overrightarrow{CD}$ e $\overline{DH'}\cong\overline{EF}$,



Definimos $\overline{AB}+(\overline{CH'} = \overline{AH''}$

$\overline{CD}\cong\overline{BG}$ e $\overline{EF}\cong\overline{DH'}$ $\Rightarrow$ $\overline{CD}+\overline{EF}\cong\overline{BG}+\overline{EF}$

$\overline{EF}\cong\overline{GH}$, $\quad \overline{CD}+\overline{EF}=\overline{CH'}$, $\quad \overline{BG}+\overline{EF}=\overline{BH''}$.

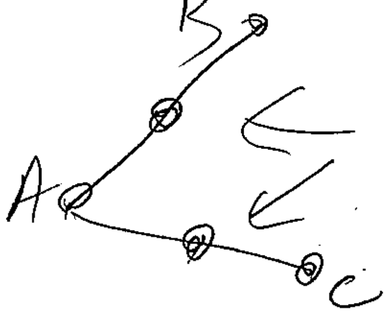
Pela $\boxed{B.1}$, marcamos um ponto H'' na $\overrightarrow{BG}$ com $\overline{BH''}\cong\overline{CH'}\cong\overline{BH}$.

Daí, sendo que é único, $H''=H$. //

7.9 o interior do $\triangle ABC$ ~~é~~ é não vazio

<u>Prova</u>: por def., o interior é a interseção dos interiores dos 3 angulos. (basta utilizar 2 ~~dos~~ 3 porque?!?)

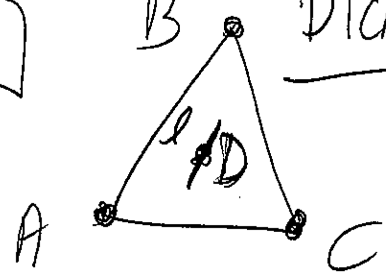
<u>Dicas</u>:



por 7.6

Depois utilize (7.8), e depois isto ...(!!)

7.10



<u>DICAS</u>: <u>Caso 1</u>: l contem um vertice. Neste caso...

<u>Caso 2</u>. l não contem nenhum vertice. Agora considere o triangulo ADC ...(!!)