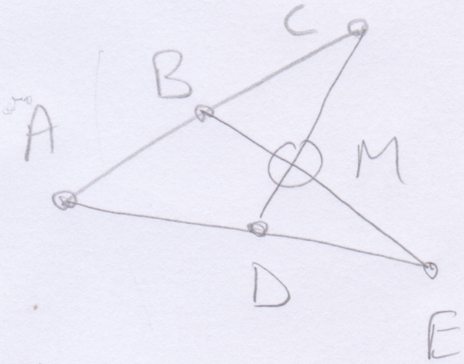
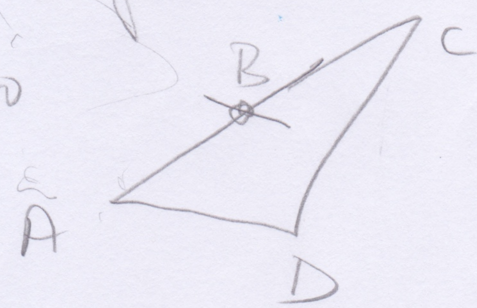
Res. dos Exercícios:

$\boxed{7.8}$ Assumimos que $A * B * C$ e $A * D * E$, em retas $l \neq \tilde{l}$. Mostre que $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ se encontram num ponto M:



Prova: O único ferramento que temos para provar existência de um ponto num segmento é (B4). Considerando então



com m a reta BE basta provar que m não encontra $\overline{AD}$. Por absurdo: se m encontra $\overline{AD}$ num ponto N, temos ou $N = A$, $N = D$, ou $A * N * D$. Mas $m \cap r(AD) \ni E$, com $A * D * E$, então $E \neq A$, $E \neq D$, $N \neq D$, e não pode ter 2 pontos em comum com $r(A, D)$.

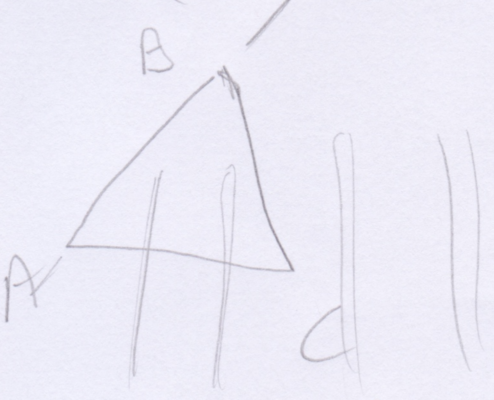
(Sendo que $m \neq r(A,D)$.)
Daí, m tem que encontrar $\overline{CD}$ num ponto $M \neq C, D$. //

7.9 O interior de ΔABC é não-vazio.

Prova: O interior do ΔABC

$= \bigcap$ interior($\angle ABC$) $\cap$ int ($\angle ACB$) $\cap$ int ($\angle CAB$). Mas isto $=$ int ($\angle ABC$) $\cap$ int ($\angle ACB$), pois:

int (ABC) = lado C da $r(A,B)$ $\cap$ lado A da $r(B,C)$



então int $(AB\cancel{C})$ =

$\underbrace{\text{lado } C\,(r_{AB}) \cap \text{lado } A\,(r_{BC})}$ $\cap$ lado $A\,(r_{BC})$ $\cap$ lado $B\,(r_{AC})$

já $\uparrow$ int $\angle ABC$

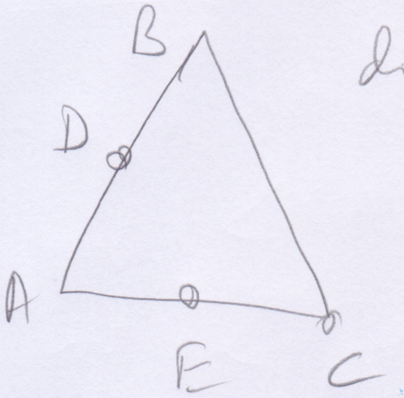
int BCA já

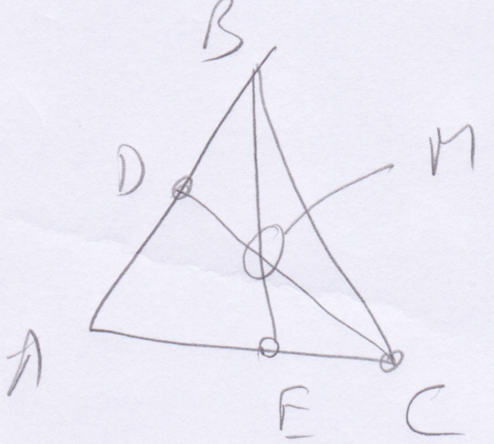
$\underbrace{\cap \text{ lado } C\,(r_{AB}) \cap \text{lado}_B\,(r_{AC})}$

int ($\angle BAC$)

então apenas 2 são necessários
(óbvio geometricamente!)

Agora, por um exercício anterior,
$\exists$ D, E com $A * D * B$ e com
$A * E * C$. Estamos na situação
do exercício 7.8!,





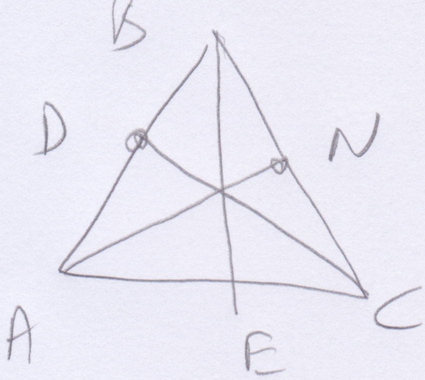
$\exists$ ponto M
na interseção
$\overline{DC} \cap \overline{BE}$. Afirmamos que
M está no interior de 2 dos
ângulos do $\triangle ABC$; por exemplo,

$B * M * E$ então $B \overset{E}{\sim} M \Rightarrow B \overset{(A,C)}{\sim} M$

$D * M * C$ então $C \overset{D}{\sim} M \Rightarrow C \overset{(A,B)}{\sim} M$

$\Rightarrow M \in \text{int}(\angle BAC)$. Também

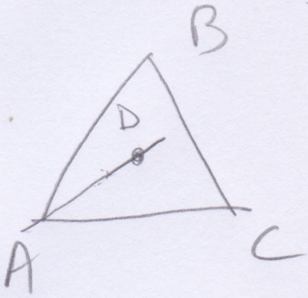
Pela Teorema da Barra Cruzada, $\overrightarrow{AM}$ encontra $\overline{BC}$ num ponto N (utilizando o fato que $M \in \text{int}(\angle BAC)$),



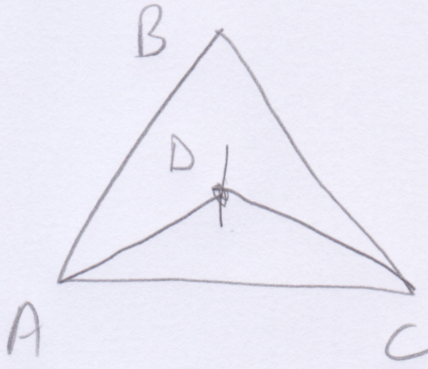
e o mesmo tipo de argumento prova que $M \in \text{int}(\angle ABC)$ ou $M \in \text{int}(\angle BCA)$. //

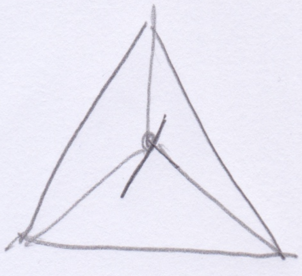
7.10 Dado: $\triangle ABC$ e um ponto D no interior, e uma reta l que passe por D, mostre que l vai encontrar um dos lados, não no vértice.

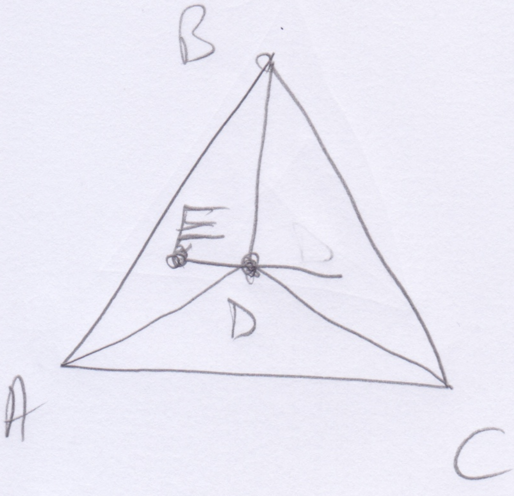
Prova. Caso 1: l contem um dos vertices, digamos A, então encontra o lado $\overline{BC}$ pela Teorema da Barra Cruzada.



Caso 2: l não contem A, B, C. Consideramos $\triangle ADC$. Caso um dos lados do l (separado por D) passe no interior do $\angle ADC$, daí estamos no Caso 1, então l encontra $\overline{AC}$. Afirmamos que isto tem que acontecer com um dos triangulos na figura!







$\exists$ um outro ponto, digamos E, na reta l (com $E \neq D$).

Se $E \in \operatorname{int}(\angle ADC)$, estamos no caso anterior.

Se não, $E \notin$ (lado A do r_{DC} $\cap$ lado $C(r_{AD})$).

Digamos que $E \notin$ lado $A(r_{DC})$. Então $E \in$ lado $B(r_{DC})$. Sabemos que E esta num lado da r_{BD}. Se no lado $A(r_{BD})$ daí, $E \in \operatorname{int}(\angle BDA)$.

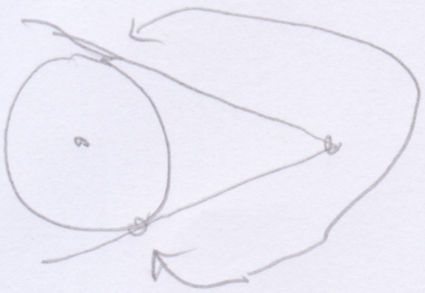
Se no lado $C(r_{BD})$ daí, $E \in \operatorname{int}(\angle BDC)$.

Em ambos os casos, voltamos para Caso I. //

Resolução do Exercício (2.8) (1)

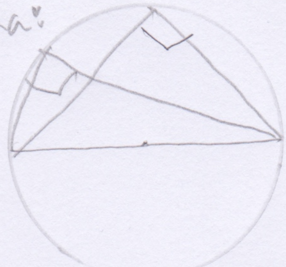
Exercício (DICA) (com compasso e regua)

Dado uma circumferencia, e o centro dela, e um ponto fora da circumferência, ache os tangentes ao circumferencia passando pelo ponto,



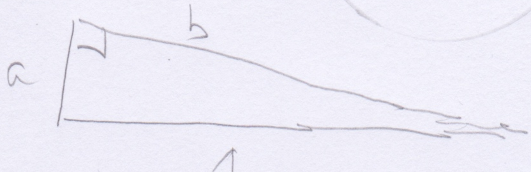
temos que construir estes 2 pontos!

A ideia é de utilizar uma teorema da geometria cartesiana:



estes angulos são retos,

prova:



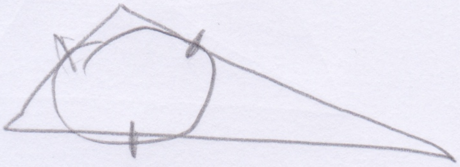
$a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow$ reto; equação da circumferencia e $x^2+y^2=1$.

Então * se desenhamos uma segunda circ. com centro no *, ta feito! (Faça!)

Ex 2.9. Construir círculo inscrito num Δ:

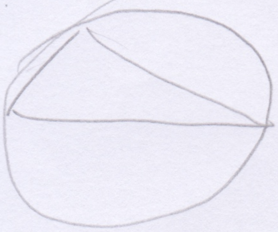
Resolução:



Dado um angulo, e um círculo tangente a ele, o centro da circunferência tem que ser no bisetrice do angulo!

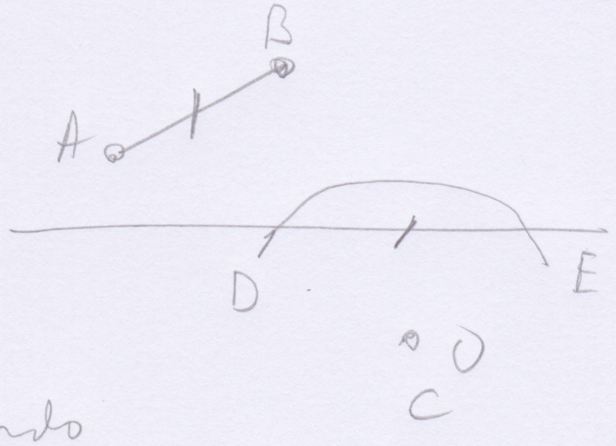
(E um fato que os 3 bisetrizes vão se encontrar num ponto...)

Ex 2.10. Dado um triangulo, ache a circunferencia de circumscrição:



Dica: O centro tem que ser equidistante dos 3 pontos. Se uma circumferencia é equidistante ao 2 pontos, o que você pode dizer sobre o centro?

2.11 Dado um segmento $\overline{AB}$, uma reta l e um ponto C fora da reta, ache uma circunferência com centro C que corta l num segmento $\cong \overline{AB}$:



(Dica: ~~bis~~ usando $\overline{AB}$, marca os pontos D, E.)

2.12 Dado reta l com $B \in l$ e um ponto A fora da reta, desenhe uma circunferência tagente ao l no ponto B, e que passe por A.

Dica: O que você sabe sobre o centro da circunferência?